UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES FUNCIONALES

TESIS DOCTORAL

Espacios de Hardy asociados a un peso

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

José García-Cuerva Abengoza

Madrid, 2015

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

ESPACIOS DE HARDY ASOCIADOS A UN PESO

MEMORIA

que para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

presenta

JOSE GARCIA-CUERVA ABENGOZA

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES FUNCIONALES

Madrid, 1975

INDICE

Pág.

A Jolie, con amor y gratitud.

Quiero expresar mi gratitud al Profesor Ronald R. Coifman de la Universidad Washington en St. Louis, Missouri EE.UU., bajo cuya dirección realicé la presente investigación.

Vaya también mi reconocimiento a los Profesores Miguel de Guzmán de la Universidad Complutense de Madrid y Guido-Weiss de la Universidad Washington que me apoyaron y animaron constantemente a lo largo de mi estancia en EE.UU.

Gracias a los profesores Ireneo Peral y Mª Magdalena Walias, que se encargaron en mi ausencia, de dirigir la confección de la copia final a partir de mi manuscrito, así como al Profesor Baldomero Rubio por sus gestiones burocráticas y a los profesores del Departamento, J. Alvarez, Mª T. Carrillo, A. Casas, J. Fortea, A. Gutiérrez, E. de la Rosa, A. Ruiz y J.M. Vegas que han colaborado en la "penosa" corrección de la mecanografía.

Por último, mi gratitud a la Srta. Isi Vázquez Díaz, por el entusiasmo que ha puesto en el laborioso trabajo de poner en forma legible mi manuscrito.

Madrid, Diciembre 1975

JOSE GARCIA-CUERVA ABENGOZA

INTRODUCCION

La problemática de esta memoria aparece dentro del círculo de ideas que han permitido en los últimos años, el estudio de los espacios de Hardy mediante técnicas de variable real.

Estas técnicas no sólo reemplazan a las técnicas clásicas sino que proyectan nueva luz sobre la naturaleza de estos espacios y sobre el papel que tienen en el análisis armónico y en otras ramas de la matemática.

Los espacios de Hardy nacen de la conexión entre series de Fourier y funciones analíticas. Si f es una función real integrable sobre el borde T del disco $|z| < 1$ con serie de Fourier

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta},$$

la asociamos a la función analítica

$$F(z) = a_0 + 2 \sum_{1}^{\infty} a_k z^k$$

para $|z| < 1$. Esta asociación permite utilizar métodos potentes de la teoría de funciones para obtener resultados en la teoría de las series de Fourier; ya que las propiedades de F pueden ser reinterpretadas en términos de f, que se recupera a partir de F en casi todo punto, como el límite radial de Re F.

Si $f \in L^p(T)$, $1 < p < \infty$, se cumple la desigualdad de M. Riesz:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right)^{1/p} \leq A_p \, ||f||_p$$

con A_p independiente de f y de r.

Fue Hardy quien por primera vez estudió las medias

$$m_p(F;r) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right)^{1/p}; \quad 0 < p < \infty$$

Demostró, entre otras cosas, que $m_p(F;r)$ es no decreciente como función de r, al igual que el módulo máximo

$$m_\infty(F;r) = \sup_{-\pi\leq\theta\leq\pi} |F(re^{i\theta})|$$

Estos resultados fueron publicados en 1915.

En 1923, F. Riesz introdujo el espacio de las funciones F analíticas en el disco $|z| < 1$ para las que

$$||F||_{H^p} = \sup_{0\leq r<1} m_p(F;r) < \infty,$$

para $0 < p \leq \infty$. Le llamó H^p en honor a Hardy. Desde entonces estos espacios se conocen como espacios de Hardy.

Al principio la teoría H^p se desarrolló como un capítulo de la teoría de funciones. Nosotros centraremos nuestra atención en el espacio real ReH^p formado por las partes reales de las funciones de H^p. Si dos funciones en H^p tienen la misma parte real, difieren tan sólo en una constante imaginaria pura. Así pues existe una correspondencia 1:1 entre ReH^p y el subespacio H_0^p formado por aquellas funciones $F \in H^p$ tales que $F(0)$ es real.

$$H^p = H_0^p \oplus \mathbb{R}i$$

Mediante esta correspondencia 1:1 trasladamos a ReH^p la estructura topológica de H_0^p.

Si $F \in H_0^p$ con $1 < p < \infty$; la función f, límite radial de ReF pertenece a $L^p(T)$ y F puede recuperarse a partir de f transformando la serie de Fourier de f en serie de potencias en la forma indicada anteriormente. Recíprocamente, si $f \in ReL^p(T)$ y $1 < p < \infty$, se deduce de la desigualdad de M. Riesz que $F \in H^p$. Así se establece una equivalencia de espacios de Banach entre Re H^p y $ReL^p(T)$. El panorama cambia notablemente para p = 1. Por ejemplo para $f \in L^1(T)$ no negativa, $F \in H^1$ si y sólo si

$$\int_0^{2\pi} f(1 + \log^+ f) < \infty .$$

No ha sido fácil llegar a una caracterización real de ReH^1 que se ha obtenido hace menos de cuatro años. En cierto sentido esta caracterización es el punto de partida y una de las ideas centrales de la memoria.

A continuación hacemos un esquema de los avances más importantes en la teoría H^p que llevaron a la caracterización real de ReH^1.

El espacio ReH^1 cobró gran importancia dentro del análisis armónico porque se observó que muchos resultados que son verdad en $ReL^p(T)$ para $1 < p < \infty$ y fallan en $ReL^1(T)$ se cumplen. sin embargo, en ReH^1. Como para $1 < p < q \leq \infty$

$$ReL^q(T) \underset{\neq}{\subset} ReL^p(T) \underset{\neq}{\subset} ReH^1 \underset{\neq}{\subset} ReL^1(T)$$

se comprende que se empezara a mirar a ReH^1 como a un sustituto de $ReL^1(T)$ en la cadena de los espacios $ReL^p(T)$.

Veamos algunos ejemplos que ilustran esta propiedad de ReH^1.

Si $f \in ReL^p(T)$ $1 < p \leq 2$, tiene serie de Fourier

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k \, e^{ik\theta};$$

entonces los coeficientes a_k satisfacen la siguiente desigualdad, debida a Paley

$$\sum_{k\neq 0} |a_k|\ |k|^{p-2} < \infty .$$

Este resultado deja de ser válido para p = 1. Se sabe, por ejemplo, que existe una función integrable con serie de Fourier

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{\cos k\theta}{\log k}$$

Sin embargo Hardy demostró que si $f \in ReH^1$ entonces

$$\sum_{k\neq 0} \frac{|a_k|}{|k|} < \infty .$$

Esto resulta aún más sorprendente si se piensa que nada puede decirse sobre la rapidez con que los coeficientes de Fourier de una función arbitraria de $L^1(T)$ tienden a 0 cuando k tiende a ∞.

Un análisis de la demostración clásica de la desigualdad de Hardy nos dará una idea del espíritu de la teoría H^p en sus comienzos:

Primero se demuestra que toda $F \in H^1$ puede factorizarse como $F = F_1.F_2$ donde $F_1, F_2 \in H^2$ y

$$||F||_{H^1} = ||F_1||_{H^2} \cdot ||F_2||_{H^2}.$$

Para obtener esta descomposición se agrupan todos los ceros de F en el factor de Blaschke

$$B(z) = z^m \prod_n \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha}_n z}$$

donde se supone que F tiene un cero de multiplicidad m en el origen y $\{\alpha_n\}$ es la sucesión de los ceros de F fuera del origen repetidos de acuerdo con sus multiplicidades; y así se obtiene $F = B\,G$ donde

$$||G||_{H^1} = ||F||_{H^1}$$

y G(z) no se anula en ningún punto del disco $|z| < 1$.

Como G no se anula, podemos considerar la función analítica $\{G(z)\}^{1/2}$. Basta escribir $F_1 = BG^{1/2}$ y $F_2 = G^{1/2}$. Con ayuda del teorema de factorización se demuestra este otro resultado auxiliar:

Si

$$F(z) = \sum_0^\infty b_k\, z^k$$

está en H^1; entonces existe

$$F_+(z) = \sum_0^\infty B_k z^k$$

también en H^1, tal que para todo k es $|b_k| \leq B_k$.

En efecto; sea $F = F_1 \cdot F_2$ con $F_1, F_2 \in H^2$, y

$$||F||_{H^1} = ||F_1||_{H^2} \cdot ||F_2||_{H^2}$$

Si

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^\infty \beta_k z^k \quad \text{y} \quad F_2(z) = \sum_{k=0}^\infty \gamma_k z^k,$$

consideremos

$$F_{1,+}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k| z^k \quad y \quad F_{2,+}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k| z^k.$$

Claramente, en virtud del teorema de Plancherel,

$$||F_{1,+}||_{H^2} = (\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2)^{1/2} < \infty \; y \; ||F_{2,+}||_{H^2} = (\sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k|^2)^{1/2} < \infty$$

Así pues $F_{1,+}$ y $F_{2,+}$ están en H^2 y su producto

$$F_+(z) = F_{1,+}(z).F_{2,+}(z)$$

está en H^1.

$$F_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{0}^{k} |\beta_j| \; |\gamma_{k-j}|) z^k$$

Por tanto

$$B_k = \sum_{0}^{k} |\beta_j| \; |\gamma_{k-j}| \geq |\sum_{0}^{k} \beta_j \; \gamma_{k-j}| = |b_k|.$$

A partir de este resultado podemos demostrar que si $\lambda \in L^{\infty}(T)$ y tiene coeficientes de Fourier no negativos $\{\lambda_k\}$ y

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \; z^k$$

está en H^1, entonces

$$\sum_{0}^{\infty} \lambda_k \; |b_k| < \infty .$$

En efecto, podemos considerar

$$F_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \; z^k$$

eb H^1 tal que $|b_k| \leq B_k$ para todo k. Entonces

$$\sum_0^\infty \lambda_k |b_k| \leq \sum_0^\infty \lambda_k B_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_+(\theta)\overline{\lambda(\theta)}d\theta \leq ||F_+||_1 ||\lambda||_\infty < \infty.$$

Tomando

$$\lambda(\theta) = ie^{i\theta}(\pi - |\theta|)\ \mathrm{sgn}\ \theta \qquad -\pi < \theta \leq \pi$$

se tiene $\lambda_k = 1/(k+1)$; así pues queda demostrado que

$$\sum_0^\infty \frac{|b_k|}{k+1} < \infty.$$

Aplicando ésto a la función F asociada a $f \in ReH^1$ con serie de Fourier

$$\sum_{-\infty}^\infty a_k\ e^{ik\theta},$$

concluimos que

$$\sum_{k\neq 0} \frac{|a_k|}{k} < \infty.$$

Otro ejemplo de la misma situación es el siguiente resultado de Paley: si $\{a_k\}$ son los coeficientes de Fourier de $f \in ReH^1$, entonces:

$$\sum_0^\infty |a_{2^k}|^2 < \infty.$$

Obviamente esto falla para $ReL^1(T)$ y el contraejemplo es la serie de Fourier que ya utilizamos anteriormente

$$\sum_2^\infty \frac{\cos k\theta}{\log k}$$

La demostración utiliza nuevamente el teorema de factorización. Sea

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

una función de H^1 $F = F_1 \cdot F_2$ con F_1, F_2 e H^2 y

$$||F||_{H^1} = ||F_1||_{H^2} \cdot ||F_2||_{H^2}$$

Sean

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k \quad \text{y} \quad F_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k$$

Entonces

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} \beta_{k-j} \gamma_j$$

$$|b_{2^k}| \leq \sum_{j=0}^{2^{k-1}} |\beta_{2^k-j}| \, |\gamma_j| + \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} |\beta_{2^k-j}| \, |\gamma_j| \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k} |\beta_i|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_j|^2 \Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=0}^{\infty} |\beta_i|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=2^{k-1}}^{2^k} |\gamma_i|^2 \Big)^{1/2}$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{2^k}|^2 \leq (\text{const}) \, ||F||^2_{H^1} < \infty .$$

y

$$\sum_{0}^{\infty} |a_{2^k}| < \infty .$$

Una diferencia importante entre $\mathrm{Re}L^1(T)$ y $\mathrm{Re}H^1$ es el comportamiento de la integral de Poisson de f

$$(P_r * f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1-2r\cos(\theta-\psi)+r^2} f(\psi) d\psi \equiv u_f(re^{i\theta})$$

$$0 \leq r < 1$$

Sea

$$(P^{*}f)(\theta) = \sup_{|w-e^{i\theta}|<2(1-|w|)} |u_f(w)|$$

la función maximal no-tangencial de f. Hardy y Littlewood demostraron que si $f \in ReH^1$, entonces $P^{*}f \in L^1(T)$ mientras que esto no es necesariamente cierto para una función arbitraria de $ReL^1(T)$. Recientemente, Burkholder, Gundy y Silverstein demostraron que ésto es una caracterización de ReH^1 es decir: Dada $f \in ReL^1(T)$, $P^{*}f \in L^1(T)$ si y sólo si $f \in ReH^1$.

El siguiente paso importante hacia un entendimiento profundo de ReH^1 fue dado por Ch. Fefferman y E.M. Stein que obtuvieron una caracterización del dual $(ReH^1)^{*}$ identificándolo con el espacio de funciones de Oscilación Acotada en Media (O.A.M. o B.M.O. en inglés) que ya había sido introducido antes por John y Nirenberg [9].

Diremos que l está en O.A.M. si $l \in L^1(T)$ y para cada intervalo $I \subset T$ se tiene

$$\frac{1}{|I|}\int_I |l(\theta) - m_I(l)|\, d\theta \leq C$$

donde C no depende de I y

$$m_I(l) = \frac{1}{|I|}\int_I l(\theta)\, d\theta$$

O.A.M. es un espacio de Banach con la norma

$$||l||_{O.A.M.} = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} l(\theta)\, d\theta\right| +$$

$$+ \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I |l(\theta) - m_I(l)|\, d\theta.$$

Ch. Fefferman y E.M. Stein demostraron que toda $l \in$ O.A.M. da lugar a un funcional perteneciente a $(\mathrm{Re}H^1)^*$ definido como

$$f \longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, l(\theta)\, d\theta .$$

(las integrales han de interpretarse de forma apropiada) y esta correspondencia es una equivalencia de espacios de Banach.

El resultado de dualidad de Ch. Fefferman y E.M. Stein es equivalente a un teorema de descomposición de toda función $f \in \mathrm{Re}H^1$ en funciones particularmente simples que llamaremos átomos. En concreto un átomo o de forma más precisa un 1-átomo es, o bien la función constante $a_0(\theta) = 1/2\pi$ o bien una función $a(\theta)$ con soporte contenido en un intervalo $I \subseteq T$ tal que $|a(\theta)| \leq 1/|I|$ para todo

$$-\pi < \theta \leq \pi \quad \text{y} \quad \int_{-\pi}^{\pi} a(\theta)\, d\theta = 0.$$

El teorema de descomposición es el siguiente: $f \in \mathrm{Re}H^1$ si y sólo si:

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j\, a_j$$

donde los a_j son átomos, y

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| < \infty .$$

Además si F es la función analítica asociada a f, existen dos constantes absolutas, C_1 y C_2 tales que:

$$C_1\, \|F\|_{H^1} \leq \inf \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| \leq C_2\, \|F\|_{H^1}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las descomposiciones de f en átomos.

Hemos de hacer notar que la misma caracterización puede obtenerse en términos de $(1,q)$-átomos donde q es cualquier número mayor que 1. Para definir un $(1,q)$-átomo basta sustituir la condición $|a(\theta)| \leq 1/|I|$ por la menos restrictiva

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I |a(\theta)|^q \, d\theta\right)^{1/q} \leq \frac{1}{|I|}$$

En este espíritu los 1-átomos definidos anteriormente debieran llamarse propiamente $(1,\infty)$-átomos.

Esta caracterización de $\mathrm{Re}H^1$ se extiende a $\mathrm{Re}H^p$ para $0 < p < 1$. La diferencia es que $\mathrm{Re}H^p$ ya no es un espacio de funciones. Por ejemplo

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1+z}{1-z}$$

pertenece a H^p para cualquier $p < 1$ y su parte real converge a 0 cuando

$$z = re^{i\theta} \longrightarrow e^{i\theta}$$

radialmente, es decir $r \to 1$. $\mathrm{Re}H^p$ ha de definirse como un espacio de distribuciones (En nuestro ejemplo el valor en el borde de F es la medida de Dirac concentrada en $\theta = 0$). Para $1/2 < p < 1$, estas distribuciones se obtienen por distinta normalización de los átomos introducidos más arriba. Definimos un p-átomo como una función con soporte contenido en un intervalo $I \subset T$, tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} a(\theta)\, d\theta = 0 \quad \text{y} \quad |a(\theta)| \leq \frac{1}{|I|^{1/p}} .$$

La caracterización de $\mathrm{Re}H^p$, debida a Coifman (Véase [2]) es entonces, la siguiente: Una distribución f pertenece a $\mathrm{Re}\, H^p$, $1/2 < p \leq 1$, si y sólo si puede ser representada como:

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \, a_j$$

donde los a_j son átomos y

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty .$$

La suma ha de entenderse en el espacio de distribuciones. Además existen dos constantes absolutas C_1 y C_2 tales que si F es la función analítica asociada a f:

$$C_1 ||F||_{H^p} \leq \inf \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p \right)^{1/p} \leq C_2 \, ||F||_{H^p}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las descomposiciones de f en átomos.

Estas caracterizaciones proporcionan métodos nuevos para estudiar $\mathrm{Re}H^p$ sin recurrir a la teoría de funciones. Como ejemplo veamos una demostracion de la desigualdad de Hardy mucho más simple que la clásica. En virtud de la descomposición atómica, bastará que demostremos que para un átomo $a(\theta)$, los coeficientes de Fourier

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(\theta) \, e^{-ik\theta} d\theta ,$$

son tales que

$$\sum_{k\neq 0} \frac{|a_k|}{|k|} \leq 4.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el soporte de $a(\theta)$ está contenido en un intervalo centrado en $\theta = 0$, ya que el valor absoluto $|a_k|$ no es afectado por traslaciones. Entonces

$$|a_k| = \left|\frac{1}{2\pi} \int_I a(\theta)(e^{-ik\theta}-1) \, d\theta\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_I |a(\theta)| \; |k\,\theta| \; d\theta \leq \frac{|k| \; |I|}{\pi} \int_I |a(\theta)| \; d\theta \leq \frac{|k| \; |I|}{\pi}$$

Por otra parte, en virtud del teorema de Plancherel:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |a(\theta)|^2 \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|I|}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k\neq 0} \frac{|a_k|}{|k|} = \sum_{|k|\leq 1/|I|} \frac{|a_k|}{|k|} + \sum_{|k|>1/|I|} \frac{|a_k|}{|k|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \sum_{|k|\leq 1/|I|} |I| + \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{|k|>1/|I|} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \leq 4.$$

Y en general para $f \in ReH^1$

$$\sum_{k\neq 0} \frac{|\hat{f}(k)|}{|k|} \leq 4\, C_2 \, ||F||_{H^1}.$$

La caracterización de ReH^p mediante átomos permite identificar el espacio dual $(ReH^p)^*$ para $1/2 < p \leq 1$. A todo funcional $L \in (ReH^p)^*$ se le asocia de manera unívoca una función integrable l tal que para todo átomo a:

$$La = \int_{-\pi}^{\pi} a(\theta)\, l(\theta)\, d\theta$$

Entonces

$$\frac{1}{|I|}\int_I |l(\theta)-m_I(l)|\,d\theta \leq 2||L||\; |I|^{1/p\,-\,1}$$

donde

$$m_I(l) = \frac{1}{|I|}\int_I l(\theta)\,d\theta;$$

para todo intervalo I.

Basta ver que para cualquier ϕ que viva en I y tenga $||\phi||_\infty \leq 1$,

$$\frac{(\phi(\theta) - m_I(\phi)\chi_I(\theta))}{2\ |I|^{1/p}}$$

es un p-átomo de forma que

$$\frac{1}{|I|}\left|\int_I \phi(\theta)(l(\theta)-m_I(l))d\theta\right| = \frac{1}{|I|}\left|\int_I (\phi(\theta)-m_I(\phi))l(\theta)d\theta\right| \leq$$

$$\leq 2\ ||L||\ |I|^{1/p - 1}.$$

Recíprocamente cualquier función $l(\theta)$ para la que sea

$$\frac{1}{|I|}\int_I |l(\theta) - m_I(l)|\ d\theta \leq (\text{const})|I|^{1/p - 1}$$

para todo intervalo I con (const) independiente de I, define un funcional lineal continuo sobre $(\mathrm{Re}H^p)^*$. Para p = 1 se obtiene el espacio O.A.M. y para $1/2 < p < 1$, la condición

$$\frac{1}{|I|}\int_I |l(\theta) - m_I(l)|\ d\theta \leq (\text{const})\ |I|^{1/p - 1}$$

es una condición de Lipschitz L^1, que equivale a la condición de Lipschitz L^∞, es decir:

$$|l(\theta) - l(\psi)| \leq (\text{const})\ |\theta-\psi|^{1/p - 1}.$$

El espacio obtenido es el espacio de funciones de Lipschitz de orden 1/p - 1. Esta caracterización fue obtenida por Duren, Romberg y Shields hace algunos años.

Hemos visto así cómo una serie de resultados ya conocidos sobre $\mathrm{Re}H^p$ se obtienen de manera muy simple utilizando la descomposición atómica. Vamos a ver ahora algunos resultados nuevos. Comenzamos con un estudio de los coeficientes de Fourier de los elementos de ReH^p. Este estudio, debido a Coifman, puede aplicarse para obtener condiciones suficientes para que el multiplicador

$$\sum a_k e^{ik\theta} \longmapsto \sum \mu_k a_k e^{ik\theta}$$

sea acotado en ReH^p.

Ante todo vemos que si $a(\theta)$ es un átomo centrado en $\theta = 0$, y no constante:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |a(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |a(\theta)|^2 \, |e^{i\theta}-1|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \leq \sqrt{2}$$

En efecto

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |a(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \leq \frac{1}{|I|^{1/2}}$$

y, como

$$|e^{i\theta}-1| \leq \sqrt{2} \, |\theta| \; : \; \left(\int_{-\pi}^{\pi} |a(\theta)|^2 \, |e^{i\theta}-1|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \, |I|^{1/2}.$$

Si $a(\theta)$ tiene serie de Fourier

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k \, e^{ik\theta},$$

la función analítica asociada a $a(\theta)$ será

$$A(z) = 2 \sum_{1}^{\infty} a_k \, z^k.$$

La función en el borde $A(e^{i\theta})$ cumplirá:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{i\theta})|^2 d\theta\right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{i\theta})|^2 \; |e^{i\theta}-1|^2 \; d\theta\right)^{1/2} \leq 2$$

En efecto, en virtud del teorema de Plancherel:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{i\theta})|^2 \, d\theta = 2\pi \; 4 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 =$$

$$= 2\pi . 2 . \sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = 2 \int_{-\pi}^{\pi} |a(\theta)|^2 \, d\theta.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{i\theta})|^2 \; |e^{i\theta}-1|^2 \, d\theta = 2\pi . 4 \left(\sum_{1}^{\infty} |a_{k+1}-a_k|^2 + |a_1|^2\right) =$$

$$= 2\pi . 2 \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |a_{k+1}-a_k|^2\right) = 2\int_{-\pi}^{\pi} |a(\theta)|^2 |e^{i\theta}-1|^2 \, d\theta.$$

Así pues

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{i\theta})|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \left(\int_{\pi}^{\pi} |A(e^{i\theta})|^2 |e^{i\theta}-1|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \leq 2.$$

Nótese que A es una función posiblemente con valores complejos, mucho más general que un átomo. Por ejemplo: A no puede anularse en casi ningún punto, salvo que sea trivial.

En general, consideraremos funciones $M \in L^2(T)$, tales que:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2 \; |e^{i\theta}-1|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \leq 1.$$

Esta condición implica que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)| d\theta \leq \sqrt{2} + \pi.$$

En efecto:

$$\int_{|\theta|\leq 1/||M||_2^2} |M(\theta)|d\theta \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \frac{\sqrt{2}}{||M||_2} = \sqrt{2}$$

y si $\frac{1}{||M||_2^2} < \pi$:

$$\int_{\frac{1}{||M||_2^2} < |\theta| \leq \pi} |M(\theta)|d\theta \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2 |e^{i\theta}-1|^2 d\theta\right)^{1/2} .$$

$$\cdot \left(\int_{\frac{1}{||M||_2^2} < |\theta| \leq \pi} \frac{1}{|e^{i\theta}-1|^2} \, d\theta\right)^{1/2} \leq \frac{1}{||M||_2} \leq \pi \left(\int_{\frac{1}{||M||_2^2}}^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^2}\right)^{1/2} = \pi$$

Llamaremos molécula o más propiamente 1-molécula centrada en $\theta = 0$ a una función $M \in L^2(T)$ tal que

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2 |e^{i\theta}-1|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \leq 1$$

y además

$$\int_{-\pi}^{\pi} M(\theta) \, d\theta = 0.$$

La razón de llamarla así es que M puede descomponerse en suma de átomos centrados en 0 que viven en intervalos crecientes. De la misma manera definiríamos una molécula centrada en $\theta_0 \in \left]-\pi,\pi\right]$ mediante la condición:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2 |e^{i\theta}-e^{i\theta_0}|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \leq 1.$$

Es claro que todo átomo no constante es una molécula y se ve fácilmente que las moléculas están en H^1 con norma acotada por una constante absoluta. Basta ver que la función conjugada de una molécula es también una molécula y esto se deduce inmediatamente observando lo que significa ser una molécula en términos de los coeficientes de Fourier $\{m_k\}$:

$$(\sum_{-\infty}^{\infty} |m_k|^2)^{1/2}(\sum_{-\infty}^{\infty} |m_{k+1}-m_k|^2)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2\pi}$$

$m_0 = 0.$

Esta condición permenece invariante al pasar a la función conjugada. Vemos así, sin necesidad de exhibir una descomposición atómica concreta de una molécula, que también se puede caracterizar ReH^1 utilizando moléculas en vez de átomos. Estudiemos ahora la situación para $p < 1$. Para obtener un p-átomo basta multiplicar un 1-átomo a, con soporte contenido en I, por $1/|I|^{1/p - 1}$. Teniendo en cuenta que para una 1-molécula, $1/||M||_2^2$ juega el mismo papel que $|I|$ para un 1-átomo, tiene sentido, en principio, definir una p-molécula como

$$||M||_2^{2(\frac{1}{p} - 1)} \quad M$$

donde M es una 1-molécula. Esto conduce a definir una p-molécula centrada en $\theta = 0$, para $2/3 < p \leqslant 1$ mediante la relación

$$(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2 \, d\theta)^{\frac{3p-2}{2}} (\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2 |e^{i\theta}-1|^2 \, d\theta)^{\frac{2-p}{2}} \leqslant 1$$

y, por supuesto

$$\int_{-\pi}^{\pi} M(\theta) \, d\theta = 0.$$

La razón de tomar $2/3 < p$ es que solo para este rango, nuestra condición implica

$$\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^p \, d\theta \leqslant (\text{const})$$

ReH^p puede describirse en términos de p-moléculas. Esta descripción es muy útil en el estudio de los operadores que conmutan con traslaciones; es decir: los multiplicadores. Al considerar coeficientes de Fourier, parece más natural moverse en la complexificación $ReH^p \oplus iReH^p$ de ReH^p que en ReH^p. Este espacio es diferente del espacio de funciones en el borde correspondiente a funciones de H^p que es simplemente un subespacio de $L^p(T)$ mientras que $ReH^p \oplus iReH^p$ es un espacio de distribuciones. Siempre que no se preste a confusión designaremos a $ReH^p \oplus iReH^p$ sencillamente como H^p. Si ReH^1 es un buen sustituto de $ReL^1(T)$, $H^1 = ReH^1 \oplus iReH^1$ es un buen sustituto de $L^1(T)$. Volviendo a los multiplicadores, vemos que si S es un operador tal que para todo 1-átomo centrado en $\theta = 0$, S a cumple:

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |(Sa)(\theta)|^2\, d\theta\right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |(Sa)(\theta)|^2 |e^{i\theta}-1|^2 d\theta\right)^{1/2} \leq (\mathrm{const})$$

donde (const) no depende de a; entonces S tiene una extensión que es un operador acotado de H^1 en $L^1(T)$.

Si además

$$\int (Sa)(\theta)\, d\theta = 0$$

para todo a; es decir S lleva átomos a moléculas; entonces S da lugar a un operador acotado de H^1 en H^1.

Veamos un ejemplo típico de la aplicación de este método:

<u>TEOREMA 0.1</u>. <u>Sea $\{\mu_k\}$ una sucesión acotada de números complejos, tal que</u>

$$|\mu_{k+1} - \mu_k| \leq \frac{(\mathrm{const})}{k}$$

<u>Entonces el multiplicador</u>

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k\, e^{ik\theta} \longmapsto \sum_{-\infty}^{\infty} \mu_k a_k e^{ik\theta}$$

<u>es un operador acotado de</u> H^1 <u>en</u> H^1.

<u>DEMOSTRACION</u>. Empezamos con un âtomo centrado en $\theta = 0$,

$$a(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta}$$

cuya imagen serâ

$$M(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mu_k a_k e^{ik\theta}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2\, d\theta\right)^{1/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |M(\theta)|^2 |e^{i\theta}-1|^2\, d\theta\right)^{1/2} =$$

$$= 2\pi\left(\sum_{-}^{\infty} |\mu_k a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\mu_{k+1} a_{k+1} - \mu_k a_k|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2\pi\left\{\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\mu_k a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 |a_{k+1} - a_k|^2\right)^{1/2} +\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{-}^{\infty} |\mu_k a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{-}^{\infty} |\mu_{k+1} - \mu_k|^2 |a_{k+1}|^2\right)^{1/2}\right\}$$

Si llamamos $||\mu||_{\infty} = \sup |\mu_k|$; serâ

$$2\pi\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\mu_k a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 |a_{k+1} - a_k|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2\pi\ ||\mu||_{\infty}^2 \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|^2\right)^{1/2} =$$

$$= ||\mu||_{\infty}^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} |a(\theta)|^2\, d\theta\right)^{1/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |a(\theta)|^2 |e^{i\theta}-1|^2\, d\theta\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\ ||\mu||_\infty^2$$

Por otra parte:

$$2\pi\Big(\sum_{-\infty}^{\infty}|\mu_k a_k|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{-\infty}^{\infty}|\mu_{k+1}-\mu_k|^2|a_{k+1}|^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2\pi||\mu||_\infty \Big(\sum_{-\infty}^{\infty}|a_k|^2\Big)^{1/2}\Big(\frac{(\mathrm{const})^2}{\pi}\sum_{|k|\leq||a||_2^2}\frac{1}{k^2}(k+1)^2\ ||a||_2^{-4} +$$

$$+ (\mathrm{const})^2\sum_{|k|\geq||a||_2^2}\frac{1}{k^2}\Big)^{1/2} \leq \sqrt{\pi}\ ||\mu||_\infty||a||_2((\mathrm{const})||a||_2^{-2})^{1/2} =$$

$$= (\mathrm{const})\ ||\mu||_\infty .$$

c.q.d.

De la misma forma se demuestra que en las hipôtesis del teorema anterior, el operador

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta} \longmapsto \sum_{-\infty}^{\infty} \mu_k a_k e^{ik\theta}$$

es acotado de H^p en sí mismo para $p > 2/3$.

Un ejemplo importante de multiplicador que cumple las hipôtesis del teorema es el dado por $\mu_k = |k|^{i\gamma}$ donde γ es un número real.

La caracterización atômica de H^p $p \leq 1$, permite obtener fácilmente teoremas de interpolación. La posibilidad de interpolar entre H^p y $L^2(T)$ o, en general $L^q(T)$ con $q > 1$, reafirma el valor de H^p $p \leq 1$ como continuación natural de la cadena de los espacios $L^q(T)$, $q > 1$.

A continuación damos un ejemplo sencillo de teorema de interpolación.

TEOREMA 0.2. Sea $p_0 \leq 1$. Supongamos que S es un operador lineal acotado en $L^2(T)$ tal que, además, para todo p_0-átomo a, se tiene: $||Sa||_{p_0} \leq$ (const) independiente de a. Entonces

$$||Sf||_p \leq C_p||f||_{H^p}$$

para $p_0 \leq p \leq 1$ y

$$||Sf||_p \leq C'_p||f||_p$$

para $1 < p \leq 2$, con C_p y C'_p independientes de f.

DEMOSTRACION. La demostración se puede dividir en dos partes. Primero demostraremos el teorema para $p_0 < 1$ y $p_0 < p \leq 1$. Luego suponemos que $p_0 = 1$ y $1 < p < 2$. Claramente esto basta para demostrar el teorema.

1º. Sea $p_0 < 1$ y $p_0 < p \leq 1$.

Queremos ver que S es un operador acotado de H^p en $L^p(T)$. Demostraremos? en efecto, que si a es un p-átomo,

$$||Sa||_p \leq (\text{const})$$

independientemente de a.

Observemos que si a es un p-átomo con soporte contenido en el intervalo I, entonces

$$\frac{1}{|I|^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}}\, a$$

es un p_0-átomo. Así pues

$$||Sa||_{p_0} \leq (\text{const})\ |I|^{(1/p_0)\ -\ (1/p)}$$

$$||Sa||_2 \leq (\text{const})\ ||a||_2 \leq (\text{const})\ \frac{1}{|I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}$$

Escribimos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |(Sa)(\theta)|^p d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |(Sa)(\theta)|^{\frac{p_0(2-p)}{2-p_0}}\ |(Sa)(\theta)|^{\frac{2(p-p_0)}{2-p_0}}\ d\theta$$

y luego estimamos esta integral utilizando la desigualdad de Hölder con los exponentes $(2-p_0)/(2-p)$ y $(2-p_0)/(p-p_0)$ que son claramente conjugados el uno del otro. Obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} |(Sa)(\theta)|^p\ d\theta \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |(Sa)(\theta)|^{p_0} d\theta\right)^{\frac{2-p}{2-p_0}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |(Sa)(\theta)|^2 d\theta\right)^{\frac{p-p_0}{2-p_0}} \leq$$

$$\leq (\text{const})|I|^{(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p})p_0\frac{2-p}{2-p_0}} \left(\frac{1}{|I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}\right)^{2\,\frac{p-p_0}{2-p_0}} \leq (\text{const})$$

pues

$$\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}\right)p_0\,\frac{2-p}{2-p_0} = \frac{p-p_0}{p}\ \frac{2-p}{2-p_0}$$

y

$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)2\ \frac{p-p_0}{2-p_0} = \frac{2-p}{p}\ \frac{p-p_0}{2-p_0}$$

2º. Sea $p_0 = 1$ y $1 < p < 2$. Tomemos p_1 tal que $1 < p_1 < p$.

Sea $f \in L^p(T)$. Consideremos

$$M(f) = (|f|^{p_1})^{*\frac{1}{p_1}}$$

donde $(|f|^{p_1})^*$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood aplicado a la función $|f|^{p_1}$. Claramente M es un operador acotado en $L^q(T)$ para $q > p_1$.

Para $\lambda > 0$ consideramos el abierto

$$\theta^{\lambda} = \{e^{i\theta} \in T : (Mf)(\theta) \geq \lambda\}$$

Para $\lambda > \frac{||f||_p}{(2\pi)^{1/p}}$, θ^{λ} no coincide con T. θ^{λ} será unión de intervalos $\{I_{\lambda}^{i}\}$ que son las componentes conexas de θ^{λ}.

Para $\lambda > \frac{||f||_p}{(2\pi)^{1/p}}$ escribimos

$$f(\theta) = g^{\lambda}(\theta) + b^{\lambda}(\theta)$$

donde

$$g^{\lambda}(\theta) = f(\theta)\chi_{T-\theta^{\lambda}}(\theta) + \sum_i m_{I_{\lambda}^{i}}(f)\chi_{I_{\lambda}^{i}}(\theta)$$

con

$$m_{I_{\lambda}^{i}} = \frac{1}{|I_{\lambda}^{i}|} \int_{I_{\lambda}^{i}} f(\theta)\, d\theta.$$

Así pues

$$b^{\lambda}(\theta) = \sum_i (f(\theta) - m_{I_{\lambda}^{i}}(f))\, \chi_{I_{\lambda}^{i}}(\theta)$$

Para cada i,

$$(f(\theta) - m_{I_{\lambda}^{i}}(f))\chi_{I_{\lambda}^{i}}(\theta)$$

tiene media 0 y además

$$\left(\frac{1}{|I_{\lambda}^{i}|} \int |f(\theta) - m_{I_{\lambda}^{i}}(f)|^{p_1}\, d\theta\right)^{1/p_1} \leq \left(\frac{1}{|I_{\lambda}^{i}|} \int |f(\theta)|^{p_1}\, d\theta\right)^{1/p_1} +$$

$$+ |m_{I_{\lambda}^{i}}(f)| \leq 2\, M(f)(\theta_0) \leq 2\lambda$$

donde θ_0 es un extremo cualquiera del intervalo I_λ^i. Así pues

$$a_i(\theta) = \frac{(f(\theta) - m_{I_\lambda^i}(f))\chi_{I_\lambda^i}(\theta)}{2\,|I_\lambda^i|\,\lambda}$$

es un $(1,p_1)$-âtomo. Como

$$b^\lambda(\theta) = \sum_i 2\lambda|I_\lambda^i|\; a_i(\theta),$$

se deduce que $b^\lambda \in H^1$ y $||b^\lambda||_{H^1} \leq 2\lambda|\theta^\lambda|$. Por otra parte

$$|g^\lambda(\theta)| \leq (\text{const})\,\lambda$$

de forma que $g^\lambda \in L^2(T)$.

Para $\lambda > \dfrac{||f||_p}{(2\pi)^{1/p}}$ se tendrá:

$$\{e^{i\theta}\in T : |(Sf)(\theta)| > \lambda\} \subset \{e^{i\theta}\in T : |(Sg^\lambda)(\theta)| > \frac{\lambda}{2}\} \cup$$

$$\cup \{e^{i\theta}\in T : |(Sb^\lambda)(\theta)| > \frac{\lambda}{2}\};$$

por lo tanto:

$$|\{|(Sf)(\theta)| > \lambda\}| \leq |\{|(Sg^\lambda)(\theta)| > \frac{\lambda}{2}\}| +$$

$$+ |\{|(Sb^\lambda)(\theta)| > \frac{\lambda}{2}\}| \leq (\text{const})\,(\frac{||g^\lambda||_2}{\lambda})^2 + (\text{const})\,|\theta^\lambda|.$$

Así pues:

$$||Sf||_p^p = (\text{const}) \int_0^\infty \lambda^{p-1}\, |\{|Sf| > \lambda\}|\, d\lambda =$$

$$= (\text{const}) \int_0^{||f||_p/(2\pi)^{1/p}} \lambda^{p-1}\, d\lambda +$$

$$+ \text{(const)} \int_{||f||_p/(2\pi)^{1/p}}^{\infty} \lambda^{p-1} \left(\frac{||g^\lambda||_2}{\lambda}\right) d\lambda +$$

$$+ \text{(const)} \int_{||f||_p/(2\pi)^{1/p}}^{\infty} \lambda^{p-1} |\theta^\lambda| \, d\lambda.$$

Ahora bien

$$\int_0^{||f||_p/(2\pi)^{1/p}} \lambda^{p-1} \, d\lambda = \text{(const)} \, ||f||_p^p$$

$$\int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \left(\frac{||g^\lambda||_2}{\lambda}\right)^2 d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \lambda^{-2} \int_{\theta^\lambda} |g^\lambda(\theta)|^2 \, d\theta d\lambda +$$

$$+ \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \lambda^{-2} \int_{T-\theta^\lambda} |g^\lambda(\theta)|^2 \, d\theta d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \text{(const)} \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \int_{\{(Mf)(\theta)>\lambda\}} d\theta d\lambda +$$

$$+ \text{(const)} \int_0^{\infty} \lambda^{p-3} \int_{\{(Mf)(\theta)\leqslant\lambda\}}^{\infty} ((Mf)(\theta))^2 \, d\theta \, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \text{(const)} \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \, |\{(Mf)(\theta)>\lambda\}| \, d\lambda +$$

$$+ \text{(const)} \int_{-\pi}^{\pi} ((Mf)(\theta))^2 \int_{(Mf)(\theta)}^{\infty} \lambda^{p-3} \, d\lambda \, d\theta =$$

$$= \text{(const)} \, ||Mf||_p^p \leqslant \text{(const)} \, ||f||_p^p$$

y

$$\int_0^{\infty} \lambda^{p-1} |\theta^\lambda| \, d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \, |\{(Mf)(\theta) > \lambda\}| \, d\lambda$$

$$\leq (\text{const}) \; ||Mf||_p^p \leq (\text{const})|||f||_p^p.$$

c.q.d.

Observemos que en 2º. hemos hecho uso solamente del hecho de que el operador S es de tipo dêbil 2-2 y de tipo dêbil $H^1 - 1$.

Otro "modelo" de H^p es el espacio $H^p(\mathbb{R})$ que se define, para $p > 0$, como el espacio de las funciones F analîticas en el semiplano superior

$$\mathbb{R}_+^2 = \{z = z+it \in \mathbb{R}^2 \; : \; t > 0\}$$

tales que

$$||F||_{H^p(\mathbb{R})} = \sup_{t>0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Existe un paralelismo total entre la teoría de los espacios $H^p(\mathbb{R})$ y la de los espacios $H^p(T)$ o simplemente H^p que discutimos anteriormente. Hay, sin embargo, diferencias têcnicas. La conexiôn con la teoría de funciones es transparente en $H^p(T)$ y se complica un poco para $H^p(\mathbb{R})$. Sin embargo la caracterizaciôn atômica es más significativa en $H^p(\mathbb{R})$. De hecho, puede obtenerse una caracterizaciôn de $H^p(\mathbb{R})$ mediante âtomos para $0 < p \leq 1$. Para $0 < p \leq 1$ y $q > p$, $q \geq 1$; se define un (p,q)-âtomo como una funciôn a(x) con soporte contenido en un intervalo acotado I, tal que:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, a(x) \, dx = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, [\frac{1}{p}] - 1$, donde $[\frac{1}{p}]$ representa el mayor entero $\leq 1/p$.

(ii) $\left(\frac{1}{|I|} \int_I |a(x)|^q \, dx\right)^{1/q} \leq \frac{1}{|I|^{1/p}}$ si $q < \infty$, ó $||a||_\infty \leq \frac{1}{|I|^{1/p}}$ si $q = \infty$.

En este caso, la correspondencia entre $H^p(\mathbb{R})$ y $ReH^p(\mathbb{R})$ es $|:|$. Como antes, se considera el espacio real $ReH^p(\mathbb{R})$ con la topología trasladada de $H^p(\mathbb{R})$ o bien, cuando se quieren considerar funciones no necesariamente reales, la complexificación de $ReH^p(\mathbb{R})$ que es el espacio complejo $ReH^p(\mathbb{R}) \oplus iReH^p(\mathbb{R})$ al que se llamará también $H^p(\mathbb{R})$ siempre que no se preste a confusión. También como en el caso anterior $ReH^1(\mathbb{R})$ puede identificarse con un subespacio de $ReL^1(\mathbb{R})$ asignando a cada función en $ReH^1(\mathbb{R})$ su función en el borde y $ReH^p(\mathbb{R})$ para $p < 1$ puede identificarse con un espacio de distribuciones por el mismo procedimiento. Los teoremas de descomposición atómica tienen entonces el mismo enunciado que en el caso de T.

Un tipo particularmente importante de átomos es el que se obtiene para $q = 2$. Sea a un $(p,2)$-átomo centrado en el origen. La transformada de Fourier compleja

$$\hat{a}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx}\, a(x)\, dx$$

es una función entera y además

$$|\hat{a}(z)| \leq e^{|z|\,|I|}$$

es decir $\hat{a}(z)$ es una función entera de tipo exponencial $|I|$. Por otra parte, en virtud del teorema de Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{a}(x)|^2 dx \leq |I|^{1-(2/p)}.$$

Finalmente (i) se traduce en que

$$\frac{d^k\hat{a}(0)}{dx^k} = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, [\tfrac{1}{p}] - 1.$$

El teorema de Paly-Wiener implica que estas propiedades caracterizan completamente la transformada de Fourier de un (p,2)-átomo centrado en el origen. Es decir: Si $A \in L^2(\mathbb{R})$ es la restricción de una función entera de tipo exponencial σ, tal que

$$||A||_2^2 \leq \sigma^{1-\frac{2}{p}} \quad y \quad \frac{d^k A(0)}{dx^k} = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, [\tfrac{1}{p}] - 1$$

entonces A es la transformada de Fourier de un (p,2)-átomo centrado en el origen.

Teniendo en cuenta que una traslación por α se convierte en multiplicación por $e^{-ix\alpha}$ en el espacio de las transformadas de Fourier, obtenemos la siguiente caracterización de las transformadas de Fourier de elementos de $H^p(\mathbb{R})$.

<u>TEOREMA 0.3.</u> $\hat{f}$ <u>es la transformada de Fourier de una distribución de</u> $H^p(\mathbb{R})$, $0 < p \leq 1$ <u>si y sólo si puede ser representada (en el sentido de las distribuciones) como:</u>

$$\hat{f} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \, e^{i\alpha_j x} A_j(x)$$

<u>donde</u>

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty,$$

α_j <u>son números reales y las</u> A_j <u>son restricciones de funciones enteras de tipo exponencial</u> σ_j <u>tales que</u>

$$||A_j||_2^2 \leq \sigma_j^{1-\frac{2}{p}}$$

<u>y</u>

$$\frac{d^k A_j(0)}{dx^k} = 0 \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, [\tfrac{1}{p}] - 1.$$

Un (1,2)-átomo siempre satisface la desigualdad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(x)|^2\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |a(x)|^2 |x|^2\, dx \leq 1.$$

Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier de $xa(x)$ es $-i\,\hat{a}'(x)$, el teorema de Plancherel implica que

$$||\hat{a}||_2\; ||\hat{a}'||_2 \leq 1.$$

Esto conduce a definir una 1-molécula como una función m tal que:

(i) $||\hat{m}||_2 ||\hat{m}'||_2 \leq 1.$

(ii) $|\hat{m}(x)| \leq \dfrac{|x|}{||\hat{m}||_2^2}$

De hecho lo que definimos son transformadas de Fourier de moléculas.

Para $2/3 < p \leq 1$ tiene sentido definir la transformada de Fourier de una p-molécula como una función $\hat{m}$ tal que $\sigma^{1-(1/p)}\hat{m}$ es la transformada de Fourier de una 1-molécula, donde

$$\sigma = ||\hat{m}||_2^{2p/(2-p)}$$

Se obtiene como en el caso del círculo, el siguiente resultado sobre multiplicadores:

<u>TEOREMA 0.4</u>. <u>Supongamos que</u> $\mu \in L^\infty(\mathbb{R})$ <u>es tal que</u>

$$\sup_{R>0} \int_{R\leq |x|<2R} |\mu'(x)|^2\, dx < \infty$$

<u>Entonces</u> $f \longmapsto (\mu\hat{f})^\vee$ es un operador acotado en $H^p(\mathbb{R})$ para $2/3 < p$.

En vista de los descubrimientos recientes analizados más arriba, que enriquecen notablemente la teoría H^p y asignan a los espacios H^p un papel importante en el análisis; tiene sentido acometer el estudio de los espacios que se obtienen cuando en las distintas caracterizaciónes de H^p se sustituye la medida de Lebesgue dx o dθ por una medida "pesada" $w(x)dx$ o $w(\theta)d\theta$; y de las relaciones entre los mismos. Este es el programa de la presente memoria. Naturalmente han de imponerse algunas restricciones al peso $w(x)$ para lograr una teoría suficientemente rica; pero a la vez ha de permitirse suficiente libertad para que la teoría se pueda aplicar a una serie de problemas. Es claro que sería muy conveniente incluir los pesos $|x|^\alpha$, $\alpha > 0$.

En casi todo el trabajo, el peso $w(x)$ va a tomarse en la clase A_∞ de Muckenhoupt, que es la unión de las clases A_q, $q > 1$. La clase A_q se define por la condición

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-1/(q-1)}\,dx\right)^{q-1} < \infty$$

donde el supremo se toma sobre todos los intervalos finitos. Estos pesos incluyen claramente los pesos $|x|^\alpha$, $\alpha > -1/2$.

Las propiedades de los pesos de A_∞ o A_q que son relevantes en nuestra investigación, son estudiadas en el capítulo I. El hecho clave es el teorema I.9 que afirma que para $1 < q < \infty$ $w \in A_q \iff$ el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado en $L^q(w(x)\,dx) \iff$ la transformación de Hilbert es acotada en $L^q(w(x)dx)$.

De aquí se deduce toda la riqueza de la teoría H^p que va a desarrollarse. Hemos de observar que la condición A_q es muy natural y aparece en gran número de problemas, particularmente en ecuaciones diferenciales.

La teoría de estos pesos, extensamente desarrollada por Muckenhoupt y Wheeden, fue acogida en un principio sin gran entusiasmo pero ultimamente se ha revelado su utilidad en situaciones muy variadas. Permítasenos mencionar, como aplicación inesperada del teorema I.9, el siguiente resultado de Coifman, Rochberg y Weiss:

TEOREMA 0.5. Sea H la transformación de Hilbert

$$f(x) \longmapsto Hf(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

y B el operador de multiplicación

$$f(x) \longmapsto b(x)\, f(x)$$

asociado a una función b e O.A.M. Entonces el conmutador $C = [B,H]$ que se define como:

$$C(f) = bH(f) - H(bf),$$

es un operador acotado en $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, con norma

$$\|C\|_{(p)} \leq C_p \|b\|_{O.A.M.}$$

Examinemos brevemente una demostración de este resultado que utiliza el teorema I.9. Lo haremos para $p = 2$ para mayor simplicidad. Si b e O.A.M., el teorema de John y Niremberg (véase [9]) implica que la función $e^{\alpha b(x)}$ cumple la condición A_2 para todo número real α tal que

$$|\alpha| \leq \frac{(\text{const})}{\|b\|_{O.A.M.}}$$

donde (const) no depende de b. Esto implica que H está acotado en $L^2(e^{\alpha b(x)}dx)$ es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Hf(x)|^2 \, e^{\alpha b(x)} \, dx \leq (\text{const})_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, e^{\alpha b(x)} dx$$

lo que equivale a decir que el operador T_α dado por:

$$(T_\alpha f)(x) = e^{\frac{\alpha}{2} b(x)} H(f.e^{-\frac{\alpha}{2} b})(x) =$$

$$= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(b(x)-b(y))}}{x - y} f(y) \, dy$$

está acotado en $L^2(\mathbb{R})$. De hecho, si α es un número complejo tal que

$$|\alpha| \leq \frac{(\text{const})}{||b||_{\text{O.A.M.}}}$$

el operador T_α definido por la misma fórmula que para α real, es acotado en $L^2(\mathbb{R})$ y

$$\sup_{|\alpha|=r} ||T_\alpha||_{(2)} \leq M < \infty .$$

Para $\alpha = re^{i\theta}$ se tiene, al menos formalmente:

$$(T_\alpha f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(b(x)-b(y))}}{x - y} f(y) \, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\frac{\alpha}{2})^n (b(x)-b(y))^n}{x - y} f(y) \, dy =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\tfrac{1}{2})^n \, r^n \, e^{in\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b(x) - b(y))^n}{x - y} f(y)dy$$

Tenemos así el desarrollo en serie de Fourier de la función

$$\theta \longmapsto (T_{re^{i\theta}} f)(x)$$

Para n = 1 obtenemos como coeficiente de Fourier

$$\frac{1}{2}\, r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(x) - b(y)}{x-y}\, f(y)\, dy = \frac{1}{2}\, r\, C(f)(x)$$

Así pues

$$C(f)(x) = \frac{1}{\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta} (T_{re^{i\theta}} f)(x)\, d\theta$$

Todas estas manipulaciones formales pueden justificarse sin más que considerar los operadores truncados.

Se tiene

$$||Cf||_2 \leq \frac{1}{\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} ||T_{re^{i\theta}} f||_2\, d\theta \leq 2M\, \frac{1}{r}\, ||f||_2.$$

Puede tomarse

$$r = \frac{(\mathrm{const})}{||b||_{O.A.M.}}$$

de donde resulta:

$$||Cf||_2 \leq (\mathrm{const})\; ||b||_{O.A.M.}\; ||f||_2$$

Observemos que este teorema tiene un recíproco:

<u>Si el conmutador</u> $C = [B,H]$ <u>del operador de multiplicación</u> $B : f \longmapsto bf$ <u>con la transformación de Hilbert</u> H, <u>es acotado en</u> $L^p(\mathbb{R})$ <u>para algún</u> p, $1 < p < \infty$, <u>entonces</u> $b \in O.A.M.$ <u>y</u>

$$||b||_{O.A.M.} \leq (\mathrm{const})_p\; ||C||_{(p)}.$$

Así pues, tenemos una completa caracterización de O.A.M.

Hemos de hacer notar también que la misma demostración proporciona la acotación en $L^2(\mathbb{R})$ de cualquier operador de la forma $[B_1[B_2[\ldots[B_n,H]\ldots]]]$ dado por

$$f(x) \longmapsto \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b_1(x)-b_1(y))\ldots(b_n(x)-b_n(y))}{x-y} f(y)dy$$

con $b_1, \ldots, b_n \in$ O.A.M.; con norma $\leq$

$$\leq (\text{const}) \; ||b_1||_{O.A.M.} \cdots ||b_n||_{O.A.M.}$$

Este resultado ha sido utilizado por Coifman para dar una demostración muy sencilla de la acotación del conmutador de Calderón dado por

$$C(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x)-A(y)}{(x-y)^2} f(y)\, dy = -[A,\tfrac{d}{dx} H]f(x)$$

donde

$$|A(x) - A(y)| \leq (\text{const}) \; |x - y|.$$

es decir $A' \in L^{\infty}$. El estudio de C se reduce al del operador $\frac{d}{dx}[A,H]$ dado por

$$\frac{d}{dx}[A,H]f(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x) - A(y)}{x - y} f(y)\, dy\right]$$

En efecto

$$\frac{d}{dx}[A,H]\; f(x) = A'(x)(Hf)(x) + [A,\tfrac{d}{dx} H]f(x)$$

En general para cualquier operador de convolución con núcleo k

$$(A.k*f - k*(a.f))^{\wedge}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{A}(\alpha)\ \hat{k}(s-\alpha)\ \hat{f}(s-\alpha) -$$

$$- \hat{k}(s)\ \hat{A}(\alpha)\ \hat{f}(s-\alpha))\ d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{k}(s-\alpha) - \hat{k}(s)]\hat{A}(\alpha)\hat{f}(s-\alpha)d\alpha$$

En particular:

$$([A,H]f)^{\wedge}(s) = (\mathrm{const})\int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{sgn}\ (s-\alpha) - \mathrm{sgn}\ s)\hat{A}(\alpha)\hat{f}(s-\alpha)\ d\alpha$$

Sea

$$\frac{d}{dx}[A,H]\ f = F \quad y \quad A' = a.$$

Entonces

$$\hat{F}(s) = (\mathrm{const}) \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathrm{sgn}\ (s-\alpha) - \mathrm{sgn}\ s)\hat{A}(\alpha)\ \hat{f}(s-\alpha)\ d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{\alpha}\ (\mathrm{sgn}\ (s-\alpha) - \mathrm{sgn}\ s)\ \hat{a}(\alpha)\ \hat{f}(s-\alpha)\ d\alpha$$

Observemos ahora que

$$\mathrm{sgn}\ (s-\alpha) - \mathrm{sgn}\ s \neq 0$$

solamente cuando $0 < s/\alpha < 1$.

Ahora bien, para $0 < u < 1$, se tiene:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} u^{i\gamma}\phi(\gamma)\ d\gamma$$

donde ϕ es una función en la clase $\mathcal{S}$ de Sehwartz, es decir C^{∞} y que decrece a 0 rápidamente en ∞.

Esto es consecuencia del hecho de que para $r > 0$

$$e^{-r} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ir\gamma}\phi(\gamma)\, d\gamma$$

donde $\phi(\gamma)$ es la transformada de Fourier inversa de cualquier función de la clase $\mathcal{S}$ que coincida con e^{-r} para $r > 0$.

Escribimos, pues:

$$\frac{s}{\alpha} = |\frac{s}{\alpha}| = \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{s}{\alpha}|^{i\gamma}\, \phi(\gamma)\, d\gamma$$

Entonces:

$$\hat{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{s}{\alpha}| (\mathrm{sgn}\,(s-\alpha) - \mathrm{sgn}\, s)\, \hat{a}(\alpha)\, \hat{f}(s-\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{s}{\alpha}|^{i\gamma}\, (\mathrm{sgn}\,(s-\alpha) - \mathrm{sgn}\, s)\, \hat{a}(\alpha)\, \hat{f}(s-\alpha)\, d\alpha\, d\gamma =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\gamma)\, |s|^{i\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{sgn}\,(s-\alpha) - \mathrm{sgn}\, s)(|\alpha|^{-i\gamma}\, \hat{a}(\alpha))\hat{f}(s-\alpha) d\alpha d\gamma$$

Definimos

$$M_\gamma g = (|s|^{i\gamma}\, \hat{g})^{v}$$

$$|\frac{d}{ds}\, |s|^{i\gamma}| = |\gamma|\, |s|^{-1}.$$

El teorema 0.4 implica que M_γ aplica H^1 en sí mismo con norma $O(|\gamma|)$. Por dualidad M_γ aplica O.A.M. en sí mismo con norma $O(|\gamma|)$.

Aunque esto es suficiente para nuestros propósitos, hemos de señalar, que la norma de M_γ es, de hecho, $O(|\gamma|^{1/2} \log |\gamma|)$ como puede verse estudiando el núcleo de M_γ que es de la forma

$$\frac{C(\gamma)}{|x|^{1-i\gamma}}$$

Utilizando teoría H^p y la convexidad de la interpolación puede verse que M_γ es $O(|\gamma|^{1/2+\varepsilon})$ para todo $\varepsilon > 0$. Basta tener en cuenta que M_γ aplica H^p en sí mismo para todo p con $2/3 < p \leqslant 1$ con norma $O(|\gamma|)$ y L^2 en sí mismo con norma $O(1)$.

En cualquier caso:

$$\hat{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\gamma)|s|^{i\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}(\operatorname{sgn}(s-\alpha) - \operatorname{sgn} s)(|\alpha|^{-i\gamma}\hat{a}(\alpha))\hat{f}(s-\alpha)d\alpha d\gamma =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\gamma)\ \left[M_\gamma\left(\int_{-\infty}^{\infty}(\operatorname{sgn}(s-\alpha) - \operatorname{sgn} s)(M_{-\gamma}a)^\wedge(\alpha)\hat{f}(s-\alpha)d\alpha\right)\right]^\wedge d\gamma$$

de donde

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\gamma)\ M_\gamma\left((\text{const})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(M_{-\gamma}a)(x)-(M_{-\gamma}a)(y)}{x-y}\ f(y)dy\right)d\gamma$$

es decir:

$$\frac{d}{dx}\,[A,H]f = (\text{const})\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\gamma)\ M_\gamma[M_{-\gamma}a,H]\ f\ d\gamma$$

de donde

$$\left\|\frac{d}{dx}\,[A,H]f\right\|_2 \leqslant (\text{const})\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\gamma)|\ \|M_{-\gamma}a\|_{O.A.M.}\|f\|_2 d\gamma \leqslant$$

$$\leqslant (\text{const})\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\gamma)|\ |\gamma|\ d\gamma\right)\|a\|_{O.A.M.}\|f\|_2$$

que demuestra la acotación del conmutador de Calderón.

El propósito de la digresión anterior fue situar la teoría de Muckenhoupt en el seno del análisis de Fourier.

Entramos ahora en la descripción de los métodos y resultados de la memoria.

Se utiliza siempre la recta real $\mathbb{R}$ para construir los modelos de H^p con pesos. Hay dos formas de introducir un peso $w(x)$ en la teoría H^p. La primera es partir de la definición clásica de $H^p(\mathbb{R})$ y cambiar la medida de Lebesgue dx por $w(x)\,dx$. Se obtiene así el espacio $H^p(w(x)\,dx)$ formado por las funciones $F(x+it)$ analíticas en el semiplano superior

$$\mathbb{R}^2_+ = \{x+it : t > 0\}$$

tales que

$$||F||_{H^p(w(x)dx)} = \sup_{t>0} \{\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p\, w(x)\, dx\}^{1/p} < \infty$$

Estos espacios se estudian en el capítulo II. La discusión está dividida en cuatro secciones. En la primera se generalizan los resultados clásicos sobre convergencia no tangencial en puntos del borde $x+i0$ así como convergencia en $L^p(w(x)\,dx)$. La única dificultad que presenta la introducción del peso, en este caso, es la conducta de las funciones para $|x| \to \infty$. Como el peso puede tender a 0, las funciones de $H^p(w(x)\,dx)$ pueden tender a ∞ para $|x| \to \infty$. Los lemas I.11 y I.12 se establecen para controlar este crecimiento posible en ∞. Termina la sección con la identificación de un subespacio denso formado por funciones buenas (continuas en el borde y que tienden a 0 en ∞ con suficiente rapidez). En la sección segunda se obtiene un operador maximal que caracteriza a $H^p(w(x)\,dx)$. El método es esencialmente el de Fefferman y Stein (véase [7]). Se restringe la atención a una clase densa y se demuestra la equivalencia de una serie de normas o quasi-normas. Se parte del operador maximal no tangencial de Poisson que, por definición, caracteriza a $H^p(w(x)\,dx)$ y se va cambiando la aproximación a la identidad hasta conseguir un operador maximal equivalente obtenido por convolución con funciones de clase C^∞ y con soporte compacto. Esta caracterización permite obtener en la siguiente sección una descomposición atómica de $H^p(w(x)\,dx)$ para $0 < p \leq 1$.

La esencia del método es la utilización de la descomposición de Calderón y Zygmund para distintos valores de $\lambda > 0$, para escribir la función de $H^p(w(x)\,dx)$ como suma de una serie telescópica cuyos elementos tienen un número de momentos nulos. Estos términos una vez normalizados constituyen los átomos. Un (p,q)-átomo para $0 < p \leq 1$ y $q > q_0$ exponente crítico de w (es decir $w \in A_q$) es una función soportada en un intervalo finito I tal que:

(i) $$\left(\frac{1}{w(I)} \int_I |a(x)|^q\, w(x)\, dx\right)^{1/q} \leq \frac{1}{w(I)^{1/p}} \quad \text{si } q < \infty \text{ o}$$

$$||a||_\infty \leq \frac{1}{w(I)^{1/p}} \quad \text{si } q = \infty\ ,$$

y

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, x^k\, dx = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{q_0}{p}\right]-1.$$

Así pues, para estos espacios, los átomos son de tipo mixto, con momentos nulos con respecto a la medida de Lebesgue y normalización con respecto al peso. Asimismo se observa que el número mínimo de momentos nulos depende del mínimo q tal que $w \in A_q$.

El teorema II.3.15 nos da la descomposición atómica de $H^p(w(x)\,dx)$. En general $H^p(w(x)\,dx)$ no puede identificarse con un espacio de distribuciones; pero esto es sin duda cierto para la mayor parte de los casos que aparecen en la práctica, por ejemplo para pesos de la forma $|x|^\alpha$. No se ha tratado de hacer una discusión de este punto y el teorema de descomposición atómica se ha enunciado en forma general. En la sección cuarta y utilizando la descomposición atómica, se identifica el espacio dual de $H^p(w(x)\,dx)$ para $0 < p \leq 1$. Dicho espacio dual se define mediante una familia de condiciones integrales cuya equivalencia es un subproducto de la teoría, que recuerda el teorema de John y Nirenberg sobre las distintas caracterizaciones de O.A.M. (Véase [9]). Hay otra forma de introducir un peso en la teoría H^p y es arrancando de átomos definidos utilizando la medida $w(x)\,dx$ a la vez en la normalización (i) y en la propiedad de cancelación (ii) (átomos de tipo homogéneo). Estos espacios, para los que se usa el símbolo $\mathcal{H}^p(w(x)\,dx)$ son estudiados en el capítulo III. Estos son los espacios de Hardy más naturales asociados con el peso w. El resultado fundamental del capítulo III es la equivalencia entre $\mathcal{H}^p(w(x)\,dx)$ y $H^p(w(x)^{1-p}\,dx)$, que viene dada, al menos para átomos por $f(x) \longmapsto$ $\longmapsto f(x)\,w(x)$. Así pues, el espacio $\mathcal{H}^1(w(x)\,dx)$ es equivalente a $H^1(dx)$ que es simplemente el espacio clásico $H^1(\mathbb{R})$. En cambio para $p < 1$, $\mathcal{H}^p(w(x)\,dx)$ es equivalente a $H^p(w(x)^{1-p}dx)$ que es uno de los espacios estudiados anteriormente. Hemos de hacer notar que la equivalencia se establece tan solo para un cierto intervalo de p's cercanos a 1.

La conclusión es que los espacios $\mathcal{H}^p(w(x)\,dx)$ aparecen como un caso particular de los $H^p(w(x)\,dx)$, lo cual no deja de ser sorprendente si se tiene en cuenta que la definición de $\mathcal{H}^p(w(x)\,dx)$ es muy simple y utiliza tan solo variables reales mientras que en los espacios $H^p(w(x)\,dx)$ se utiliza la fuerza de la analiticidad o si se quiere, la transformación de Hilbert.

El capítulo IV incluye algunos ejemplos y una serie de aplicaciones. Se obtiene una equivalencia entre el espacio de las funciones radiales de $H^1(\mathbb{R}^n)$ y el de las funciones pares de $\mathcal{H}^1(|r|^{n-1}\,dr)$. (De hecho, el resultado es cierto para un intervalo de p's menores que 1). Se dan dos demostraciones de este resultado. En la sección segunda se da una demostración muy geométrica que utiliza fundamentalmente la descomposición atómica de $H^1(\mathbb{R}^n)$. En la sección tercera se da una demostración basada en un análisis de la acción de diversos sistemas de transformaciones de Riesz sobre funciones radiales. Esta última demostración que no utiliza la geometría del espacio euclídeo, se extiende en parte a los pesos $|r|^{2\lambda}$ donde 2λ no es necesariamente entero y proporciona una relación entre el espacio de las funciones pares en $\mathcal{H}^1(|r|^{2\lambda}\,dr)$ con $2\lambda \geq 1$ y el espacio $\mathcal{H}^1(|r|^{2\lambda}\,dr)$ introducido por Muckenhoupt y Stein (Véase [11]).

En la sección cuarta, la relación entre el espacio de funciones radiales en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y el espacio ordinario $H^1(\mathbb{R})$, es utilizada para obtener una función radial F en $L^1(\mathbb{R}^2)$ pero no en $H^1(\mathbb{R}^2)$ y para la que, sin embargo, la integral singular dada en notación compleja como

$$\tilde{F}(w) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z^2} F(w-z)\, dx = \text{v.p.} \int_{\mathbb{C}} \frac{e^{-i2\theta}}{|z|^2} F(w-z) dz$$

$(w = re^{i\psi};\ z = se^{i\theta})$, está en $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Se demuestra, por tanto, que dicha integral singular no caracteriza a $H^1(\mathbb{R}^2)$.

El operador $F \longmapsto \tilde{F}$, que no es otra cosa que el multiplicador

$$F \longmapsto (e^{-2i\theta}\ \hat{F})^{\vee},$$

proporciona un contraejemplo a la conjetura sugerida por Fefferman en el simposio sobre análisis armónico que se celebró en la universidad de De Paul en Chicago en 1974 (véase [1]) y según la cual todo multiplicador "suficientemente bueno" serviría para caracterizar a $H^1(\mathbb{R}^n)$ de la misma forma que el multiplicador

$$F \longmapsto (e^{-i\theta}\ \hat{F})^{\vee},$$

que es el sistema de transformadas de Riesz de orden 1 mediante el cual se define comúnmente $H^1(\mathbb{R}^2)$. Sucede que $e^{-2i\theta}$ es un ejemplo típico de multiplicador "suficientemente bueno" que, sin embargo, no caracteriza a $H^1(\mathbb{R}^2)$. Lo mismo puede decirse para cualquier $\mathbb{R}^n$ y la integral singular vectorial formada por las transformadas de Riesz de orden 2 o, más generalmente, de cualquier orden par, en lugar de $F \longmapsto \tilde{F}$. El problema de identificar los multiplicadores que caracterizan a $H^1(\mathbb{R}^n)$ sigue en pie y, una vez descartada la conjetura de Fefferman, ninguna otra se destaca como plausible. Observemos que nuestro método es muy particular ya que utiliza funciones radiales. Si consideramos sistemas de Riesz de orden impar, que son en definitiva, suma de transformaciones de Hilbert en distintas direcciones, es claro que el contraejemplo, si existe, no va a ser una función radial.

Por último, la sección quinta consiste en unas cuantas observaciones sobre la relación entre $H^p(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{H}^p(|r|^{n-1}\,dr)$ para $p < 1$.

CAPITULO I

ALGUNOS RESULTADOS AUXILIARES

Sea $w(x)$ una función medible definida en la recta real $\mathbb{R}$ con valores en $[0,\infty]$.

Para $1 < q < \infty$, diremos que $w(x)$ cumple la condición A_q con constante C, si para cada intervalo I, se tiene:

$$(I.1) \qquad \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{q-1}}\,dx\right)^{q-1} \leq C$$

En (I.1) se entiende que $0.\infty = 0$.

Diremos que $w(x)$ cumple la condición A_∞ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si I es un intervalo y E un subconjunto medible de I con $|E| < \delta|I|$; entonces

$$\int_E w(x)\,dx \leq \varepsilon \int_I w(x)\,dx.$$

Muckenhoupt ha demostrado que una función localmente integrable cumple la condición A_∞ si y sólo si cumple alguna de las condiciones A_q $1 < q < \infty$. Véase [3].

Llamaremos "peso" a una función $w(x)$ no negativa, localmente integrable, que no es igual a cero en casi todo punto y que cumple la condición A_∞.

Si q' es el exponente conjugado de q; es decir: $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, o lo que es lo mismo: $q' = \frac{q}{q-1}$; entonces (I.1) puede escribirse:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \left(w(x)^{-\frac{1}{q-1}}\right)^{-(q-1)}\,dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{q-1}}\,dx\right)^{q-1} \leq C$$

Pero $\frac{1}{q'-1} = q-1$, de forma que tenemos:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I (w(x)^{-\frac{1}{q-1}})^{-\frac{1}{q'-1}}\,dx\right)^{q'-1}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{q-1}}\,dx\right) \leq$$

$$\leq C^{1/(q-1)}$$

Esto no es otra cosa que decir que $w(x)^{-\frac{1}{q-1}}$ cumple la condición $A_{q'}$, con constante $C^{1/(q-1)}$.

Aparte los casos triviales $w(x) = 0$ para casi todo x y $w(x) = \infty$ para casi todo x (I.1) implica que tanto $w(x)$ como $w(x)^{-1/(q-1)}$ son localmente integrables (Si, por ejemplo,

$$\int_I w(x)^{-\frac{1}{q-1}}\,dx = \infty$$

para algún intervalo I, entonces (I.1) implica que para cualquier intervalo J:

$$\int_J w(x)\,dx = 0$$

y, por lo tanto: $w(x) = 0$ para casi todo x).

Para un peso w en la clase A_q (es decir: que cumple la condición A_q), se sigue de la desigualdad de Hölder que:

$$1 \leq \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)^{1/q}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{q-1}}\,dx\right)^{\frac{q-1}{q}}$$

Vemos así que la función definida para intervalos como:

$$I \longrightarrow \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{q-1}}\,dx\right)^{q-1}$$

está acotada lejos de 0 e ∞.

Aceptaremos los resultados sobre pesos contenidos en [3] y demostraremos algunos otros que serán utilizados a lo largo de todo el trabajo.

Desde este punto hasta el lema I.18 **w será un peso en la clase** A_q. En los dos últimos lemas del capítulo utilizaremos la noción de "exponente crítico" de un peso w que es

$$q_0 = \inf \{q : w \text{ cumple } A_q\}.$$

Puesto que un peso siempre cumple alguna condición A_q con $1 < q < \infty$, siempre es $1 \leq q_0 < \infty$. En [3] se demuestra que si w cumple A_q también cumple $A_{q-\varepsilon}$ para algún $\varepsilon > 0$. Así pues, w nunca cumple A_{q_0}.

Para un conjunto medible E, utilizaremos la notación

$$w(E) = \int_E w(x)\, dx.$$

<u>LEMA I.2</u>. <u>Dado</u> $\alpha > 1$ <u>y un intervalo</u> I, <u>consideramos su</u> α-<u>dilatado</u>

$$\delta_\alpha(I) = c_I + \alpha(I - c_I)$$

<u>donde</u> c_I <u>es el centro de</u> I. <u>Entonces</u>

$$w(\delta_\alpha(I)) \leq (\text{const})\ \alpha^q\ w(I)$$

<u>con</u> (const) <u>independiente de</u> α <u>y de</u> I. <u>De hecho puede tomarse como</u> (const) <u>la constante de la condición</u> A_q <u>para</u> w.

<u>DEMOSTRACION</u>.

$$1 \leq \frac{1}{|I|}\ w(I)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{q-1}}\, dx\right)^{q-1} =$$

$$= \frac{1}{|I|} w(I)\, \alpha^{q-1} \left(\frac{1}{|\delta_\alpha(I)|} \int_I w(x)^{-\frac{1}{q-1}} dx\right)^{q-1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|I|} w(I)\, \alpha^{q-1} \left(\frac{1}{|\delta_\alpha(I)|} \int_{\delta_\alpha(I)} w(x)^{-\frac{1}{q-1}} dx\right)^{q-1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|I|} w(I)\, \alpha^{q-1} \left(\frac{(\mathrm{const})}{w(\delta_\alpha(I))/|\delta_\alpha(I)|}\right) =$$

$$= (\mathrm{const})\, \alpha^q \frac{w(I)}{w(\delta_\alpha(I))}$$

Por tanto:

$$w(\delta_\alpha(I)) \leq (\mathrm{const})\, \alpha^q\, w(I).$$

c.q.d.

LEMA I.3. *Supongamos que* I_1 *e* I_2 *son dos intervalos tales que*

$$I_1 \subset I_2 \neq \phi \quad \underline{y} \quad |I_2| = \beta |I_1|$$

para algún $\beta > 0$. *Entonces:*

$$(\mathrm{const}) \frac{1}{(1+2\beta)^q} w(I_2) \leq w(I_1) \leq (\mathrm{const})(1+\tfrac{2}{\beta})^q\, w(I_2)$$

donde (const) *representa una constante que no depende de* I_1, I_2 o β. La constante no tiene que ser la misma en los dos sitios aunque la representemos por el mismo símbolo. Utilizaremos esta notación de una manera sistemática siempre que no se preste a confusión.

DEMOSTRACION. Por simetría sólo necesitamos demostrar una de las desigualdades. Por ejemplo la de la derecha. Es consecuencia del lema I.2 ya que

$$I_1 \subset \delta_{1+\frac{2}{\beta}}(I_2)$$

En efecto:

$$x \in I_1 \Rightarrow |x - c_{I_1}| \leq r_{I_1}$$

(c_{I_j} y r_{I_j} son respectivamente, el centro y el radio de I_j). Así pues

$$|x - c_{I_2}| \leq |x - c_{I_1}| + |c_{I_1} - c_{I_2}| \leq$$

$$\leq r_{I_1} + r_{I_1} + r_{I_2} = 2r_{I_1} + r_{I_2} =$$

$$= \frac{2}{\beta} r_{I_2} + r_{I_2} = (1 + \frac{2}{\beta}) r_{I_2}$$

lo que demuestra que $x \in \delta_{1+\frac{2}{\beta}}(I_2)$.

c.q.d.

<u>LEMA I.4</u>. <u>Para cualquier intervalo</u> I:

$$\int_{x\notin I} \frac{w(x)\,dx}{|x-c_I|^q} \leq \frac{(\text{const})}{|I|^q} \int_I w(x)\,dx$$

<u>donde</u> (const) <u>no depende de</u> I.

<u>DEMOSTRACION</u>. El hecho clave, que se encuentra en [3], es que si w cumple la condición A_q, también cumple la condición $A_{q-\varepsilon}$ para algún $\varepsilon > 0$.

Para k = 0, 1, ..., estimamos

$$\int_{2^k \frac{|I|}{2} < |x-c_I| < 2^{k+1} \frac{|I|}{2}} \frac{w(x)\,dx}{|x-c_I|^q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{kq}(\frac{|I|}{2})^q} \int_{\delta_{2^{k+1}}(I)} w(x)\,dx =$$

$$= 2^{-kq}\, 2^q \frac{1}{|I|^q} w(\delta_{2^{k+1}}(I)) \leq$$

$$\leq (\text{const})\; 2^{-kq} \frac{1}{|I|^q} (2^{k+1})^{q-\varepsilon}\; w(I)$$

en virtud del lema I.2 y del hecho de que w cumple la condición $A_{q-\varepsilon}$. Así pues,

$$\int_{2^k \frac{|I|}{2} < |x-c_I| < 2^{k+1} \frac{|I|}{2}} \frac{w(x)\,dx}{|x - c_I|^q} \leq$$

$$\leq (\text{const})\; (2^{-\varepsilon})^k \frac{1}{|I|^q} w(I)$$

Entonces

$$\int_{x \notin I} \frac{w(x)\,dx}{|x-c_I|^q} = \sum_0^{\infty} \int_{2^k \frac{|I|}{2} < |x-c_I| < 2^{k+1} \frac{|I|}{2}} \frac{w(x)\,dx}{|x-c_I|^q} \leq$$

$$\leq (\text{const}) \frac{1}{|I|^q} w(I) \sum_0^{\infty} (2^{-\varepsilon})^k \leq (\text{const}) \frac{1}{|I|^q} w(I).$$

c.q.d.

LEMA I.5. Si $f \in L^q(w(x)\,dx)$, entonces f es localmente integrable. En particular, para cada intervalo I:

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|dx \leq (\text{const})\left(\frac{1}{w(I)}\int_I |f(x)|^q\, w(x)\, dx\right)^{1/q}$$

donde $(\text{const})^q$ es la C en la condición A_q para w.

DEMOSTRACION.

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|dx = \frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|w(x)^{1/q}\, w(x)^{-1/q}\, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{|I|}\left(\int_I |f(x)|^q\, w(x)\, dx\right)^{1/q}\left(\int_I w(x)^{-q'/q}\, dx\right)^{1/q'} =$$

$$= \left(\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|^q\, w(x)\, dx\right)^{1/q}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-1/(q-1)}\, dx\right)^{(q-1)/q} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{|I|}\int_I |f(x)|^q\, w(x)\, dx\right)^{1/q}\left(\frac{(\text{const})}{\frac{w(I)}{|I|}}\right)^{1/q} =$$

$$= (\text{const})\left(\frac{1}{w(I)}\int_I |f(x)|^q\, w(x)\, dx\right)^{1/q}$$

c.q.d.

Observemos que el lema I.2 puede obtenerse como caso particular de (I.5) poniendo $\delta_\alpha(I)$ en lugar de I y $f = \chi_I$.

LEMA I.6. Existe un α, $0 < \alpha < 1$, que depende del peso y de q, tal que si $f \in L^q(w(x)\,dx)$ y ϕ cumple que

$$|\phi(x)| \leq \frac{(\text{const})}{(1 + |x|)^\alpha}\ ;$$

entonces definiendo para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi_t(x) = \frac{1}{t}\,\phi(\frac{x}{t}),$$

la convolución $(f * \phi_t)(x)$ tiene sentido y se cumple:

$$|(f*\phi_t)(x)| \leq (\text{const})\ ||f||_{L^q(w(x)dx)}\ w(I(x;t))^{-1/q}$$

donde

$$I(x;t) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < t\}.$$

DEMOSTRACION.

$$(f*\phi_t)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\frac{\phi_t(x-y)}{w(y)}\,w(y)\,dy$$

Demostraremos que, como función de y,

$$\frac{\phi_t(x - y)}{w(y)}$$

pertenece a $L^{q'}(w(y)\,dy)$ donde $q' = \frac{q}{q-1}$ es el exponente conjugado de q.

$$\text{(I.7)} \qquad \int_{|x-y|<t} \left|\frac{\phi_t(x-y)}{w(y)}\right|^{q'} w(y)\,dy =$$

$$= \int_{|x-y|<t} |\phi_t(x-y)|^{q/(q-1)}\ w(y)^{-1/(q-1)}\ dy =$$

$$= \int_{|x-y|<t} \left|\frac{1}{t}\,\phi(\frac{x-y}{t})\right|^{q/(q-1)}\ w(y)^{-1/(q-1)}\ dy \leq$$

$$\leq (\text{const})\ t^{-\frac{q}{q-1}} \int_{I(x;t)} w(y)^{-\frac{1}{q-1}}\, dy$$

implemente porque ϕ es acotada.

Por otra parte

$$\int_{t<|x-y|} |\phi_t(x-y)|^{q/(q-1)}\, w(y)^{-1/(q-1)}\, dy =$$

$$= \int_{t<|x-y|} \left|\frac{1}{t}\, \phi\left(\frac{x-y}{t}\right)\right|^{q/(q-1)} w(y)^{-1/(q-1)}\, dy \leq$$

$$\leq t^{-q/(q-1)} \int_{t<|x-y|} \frac{(\text{const})}{\left|\frac{x-y}{t}\right|^{(\alpha q)/(q-1)}}\, w(y)^{-1/(q-1)}\, dy =$$

$$= t^{-q/(q-1)}\, t^{(\alpha q)/(q-1)} \int_{t<|x-y|} \frac{(\text{const})}{|x-y|^{(\alpha q)/(q-1)}}\, w(y)^{-1/(q-1)} dy$$

Pero w cumple $A_q \Rightarrow w^{-1/(q-1)}$ cumple

$$A_{\frac{q}{q-1}} \Longrightarrow w^{-1/(q-1)} \text{ cumple } A_{\frac{\alpha q}{q-1}}$$

para $\alpha < 1$ suficientemente próximo a 1.

Aplicando (I.4) obtenemos:

(I.8)
$$\int_{t<|x-y|} \left|\frac{\phi_t(x-y)}{w(y)}\right|^{q'} w(y)\, dy \leq$$

$$\leq t^{-q/(q-1)}\, t^{(\alpha q)/(q-1)}\, (\text{const}) \frac{1}{|I(x;t)|^{\frac{\alpha q}{q-1}}} \int_{I(x;t)} w(y)^{-\frac{1}{q-1}}\, dy =$$

$$= (\text{const})\ t^{-q/(q-1)} \int_{I(x;t)} w(y)^{-1/(q-1)}\, dy$$

Combinando (I.7) y (I.8) obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\phi_t(x-y)}{w(y)}\right|^{q'} w(y)\, dy \leqslant (\text{const})\ t^{-q/(q-1)} \int_{I(x;t)} w(y)^{-\frac{1}{q-1}}\, dy =$$

$$= (\text{const})\ t^{-q/(q-1)}\ 2t\ \frac{1}{|I(x;t)|} \int_{I(x;t)} w(y)^{-\frac{1}{q-1}}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant (\text{const})\ t^{-\frac{1}{q-1}} \left\{\frac{(\text{const})}{\frac{1}{|I(x;t)|}\int_{I(x;t)} w(y)dy}\right\}^{\frac{1}{q-1}} =$$

$$= (\text{const})\ w(I(x;t))^{-1/(q-1)}$$

Aplicando **ahora** la desigualdad de Hölder:

$$|(f*\phi_t)(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\ \frac{\phi_t(x-y)}{w(y)}\ w(y)\ dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant ||f||_{L^q(w(x)dx)}\ \left|\left|\frac{\phi_t(x-y)}{w(y)}\right|\right|_{L^{q'}(w(y)dy)} \leqslant$$

$$\leqslant (\text{const})\ ||f||_{L^q(w(x)dx)}\ w(I(x;t))^{-1/q}.$$

c.q.d.

El interés de la condición A_q deriva del siguiente resultado cuya demostración puede verse en [3].

TEOREMA I.9. Sea $q > 1$ y sea w una función localmente integrable y no negativa. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) $$\int_{-\infty}^{\infty} |f^*(x)|^q \, w(x)\, dx \leq (\text{const}) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^q \, w(x)\, dx$$

donde

$$f^*(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)|\, dy$$

es la función maximal de Hardy - Littlewood de f

(ii) $$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(x)|^q \, w(x)\, dx \leq (\text{const}) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^q \, w(x)\, dx$$

donde

$$\tilde{f}(x) = \text{v.p.}\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

es la transformada de Hilbert de f.

(iii) w cumple la condición A_q.

Dada una función ϕ como en el lema I.6, le asociamos el operador maximal ϕ_∇^* definido para funciones $f \in L^q(w(x)\,dx)$ como:

$$\phi_\nabla^*(f)(x) = \sup_{|x-y|<t} |(f * \phi_t)(y)|.$$

LEMA I.10. Si

$$|\phi(x)| \leq \frac{(\text{const})}{(1+|x|)^\alpha}$$

con $\alpha > 1$, entonces

$$\phi^*_\nabla(f)(x) \leq (\text{const})\ f^*(x)$$

en casi todo x.

DEMOSTRACION. Dado x, sea $(y,t) \in \mathbb{R}^2_+$ tal que $|x-y| < t$. Entonces

$$|(f * \phi_t)(y)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\ \phi_t(y-u)du\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\ \left|\phi\left(\frac{y-u}{t}\right)\right|du \leq \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\ \frac{(\text{const})}{\left(1+\left|\frac{y-u}{t}\right|\right)^\alpha}\ du \leq$$

$$\leq (\text{const})\Big(2\ \frac{1}{2t}\int_{|y-u|<t} |f(u)|du + \ldots + 2^{k+1}\ \frac{1}{2^{k+1}t}\ \cdot$$

$$\cdot \int_{2^{k-1}t<|y-u|<2^k t} |f(u)| \frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}\ du + \ldots\Big)$$

$$\leq 2(\text{const})\ (f^*(x) + \ldots + 2^{-k(\alpha-1)}\ 2^\alpha\ f^*(x) + \ldots) \leq$$

$$\leq (\text{const})\ f^*(x).$$

c.q.d.

(I.10) junto con la parte (i) de (I.9) implica:

$$||\phi^*_\nabla(f)||_{L^q(w(x)dx)} \leq (\text{const})\ ||f^*||_{L^q(w(x)dx)} \leq$$

$$\leqslant (\text{const})\ ||f||_{L^q(w(x)dx)}.$$

En particular, la función definida en el semiplano superior

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$$

como

$$f(x,t) = (f*\phi_t)(x)$$

está en $L^q(w(x)\,dx)$ uniformemente en t.

LEMA I.11. Sea $s(x,t)$ una función subarmónica no negativa definida en el semiplano superior $\mathbb{R}^2_+$ y que está en $L^q(w(x)\,dx)$ uniformemente en $t > 0$. Entonces existe α, $0 < \alpha < 1$ tal que:

$$s(x,t) \leqslant (\text{const})\ (1 + |x|)^{\alpha}$$

donde (const) depende de t; pero puede tomarse la misma (const) para una banda de la forma $0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_1 < \infty$.

DEMOSTRACION. Sabemos que para cualquier $t > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (s(x,t))^q\ w(x)\ dx \leqslant (\text{const})$$

donde (const) no depende de t. Aplicando el lema I.6 vemos que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x,t)\ (1 + |x|)^{-\alpha}\ dx$$

está biend definida. Además está acotada como función de t, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x,t)(1+|x|)^{-\alpha}dx \leq (\text{const})$$

independiente de t. Consideremos ahora la banda $0 < t_0 \leq t \leq t_1 < \infty$. Desde luego, la desigualdad

$$s(x,t) \leq (\text{const})\ (1 + |x|)^{\alpha}$$

necesitamos probarla únicamente para valores grandes de x puesto que s es continua y está, por lo tanto, acotada en cada rectángulo cerrado. Tenemos $(\bar{x},\bar{t})$ en nuestra banda y tal que sea, por ejemplo, $|\bar{x}| > t_0$. Como s es subarmónica, será:

$$s(\bar{x},\bar{t}) \leq (\text{const}) \frac{1}{(\frac{t_0}{2})^2} \iint_{B((\bar{x},\bar{t});\frac{t_0}{2})} s(x,t)dxdt \leq$$

$$\leq (\text{const}) \frac{1}{t_0^2} \int_{\bar{t}-t_0/2}^{\bar{t}+t_0/2} \int_{\bar{x}-t_0/2}^{\bar{x}+t_0/2} s(x,t)\ dx\ dt \leq$$

$$\leq (\text{const}) \frac{1}{t_0^2} \int_{t_0/2}^{t_1+t_0/2} \int_{\bar{x}-t_0/2}^{\bar{x}+t_0/2} s(x,t)(1+|x|)^{-\alpha}(1+|x|)^{\alpha}dxdt \leq$$

$$\leq (\text{const}) \frac{1}{t_0^2} (1 + |\bar{x} \pm \frac{t_0}{2}|)^{\alpha}\ t_1 \leq (\text{const})(1 + |x|)^{\alpha}$$

c.q.d.

<u>LEMA I.12</u>. En las mismas hipótesis del lema anterior:

$$s(x,t) \leq (\text{const}) \sup_{u>0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (s(y,u))^q w(y)dy\right)^{1/q} w(I(x;\tfrac{t}{2}))^{-1/q}$$

En particular: $s(x,t) = o(t)$ cuando $t \to \infty$.

DEMOSTRACION. Para cualquier $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$, se deduce de la subarmonicidad de s que:

$$s(x,t) \leq \frac{(\text{const})}{t^2} \int_{x-t/2}^{x+t/2} \int_{t/2}^{3t/2} s(y,u)\, du\, dy =$$

$$= \frac{(\text{const})}{t^2} \int_{t/2}^{3t/2} \left[\int_{x-t/2}^{x+t/2} s(y,u)\, dy \right] du$$

Aplicando el lema I.5.:

$$\int_{x-t/2}^{x+t/2} s(y,u)\, dy \leq$$

$$\leq (\text{const})\, t \sup_{u>0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (s(y,u))^q w(y)\, dy \right)^{1/q} w(I(x;\tfrac{t}{2}))^{-1/q}$$

Por tanto

$$s(x,t) \leq (\text{const}) \sup_{u>0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (s(y,u))^q\, w(y) dy \right)^{1/q} w(I(x;\tfrac{t}{2}))^{-1/q}$$

En particular, para $t > t_0 > 0$:

$$s(x,t) \leq (\text{const})\, w(I(x;\tfrac{t_0}{2}))^{-1/q}$$

es acotada y, por consiguiente, $s(x,t)$ es $o(t)$ cuando $t \to \infty$.

Los lemas I.11 y I.12 son útiles para aplicar, en varios casos el siguiente lema:

<u>LEMA I.13.</u> <u>Sea</u> $s(x,t)$ <u>una función continua en el semiplano cerrado</u>

$$\overline{\mathbb{R}^2_+} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\},$$

<u>subarmónica en</u> $\mathbb{R}^2_+$ <u>y con las siguientes restricciones en su crecimiento:</u>

(i) $s(x,t) = o(t)$ <u>cuando</u> $t \to \infty$.

(ii) $s(x,t) = o(e^{a|x|})$ <u>cuando</u> $|x| \to \infty$ <u>para todo</u> $a > 0$ <u>en cada banda</u>

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq t_0\}$$

<u>Entonces si</u> $s(x,0) \leq A < \infty$ <u>para todo</u> $x \in \mathbb{R}$, <u>se sigue que</u> $s(x,t) \leq A$ <u>para todo</u> $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$.

Este resultado es una simple extensión de (5.2) en el capítulo II de [14].

Como consecuencia del lema I.6 obtenemos la existencia de la integral de Poisson de una función $f \in L^q(w(x)\,dx)$. Tomamos

$$\phi(x) = P(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2},$$

núcleo de Poisson.

<u>LEMA I.14.</u> <u>Sea</u> $f \in L^q(w(x)\,dx)$. <u>La integral de Poisson de</u> f,

$$f(x,t) = (f * P_t)(x)$$

<u>es una función armónica en</u> $\mathbb{R}^2_+$ <u>que está en</u> $L^q(w(x)\,dx)$ <u>uniformemente en</u> $t > 0$.

<u>Supongamos que, además,</u> f <u>es continua en</u> $\mathbb{R}$ <u>y</u> $|f(x)| \leq (\text{const})\,(1+|x|)^{\alpha}$ <u>para algún</u> $\alpha < 1$. <u>Entonces la función definida como:</u>

$$f(x,t) = (f * P_t)(x) \ \underline{\text{si}}\ \ t > 0 \ \ \underline{\text{y}}\ \ f(x,0) = f(x)$$

<u>es continua en</u> $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ <u>y cumple las condiciones</u> (i) <u>y</u> (ii) <u>del lema</u> I.13.

<u>DEMOSTRACION</u>. El lema I.10 implica que $f(x,t)$ está en $L^q(w(x)\,dx)$ uniformemente en t. Su armonicidad en $\mathbb{R}^2_+$ se sigue de la propiedad del valor medio, ya que $f(x,t)$ es localmente integrable en $\mathbb{R}^2_+$ como se deduce de la desigualdad:

$$|(f*P_t)(x)| \leq (\text{const})\, ||f||_{L^q(w(x)dx)}\, w(I(x;t))^{-1/q}$$

Veamos ahora que $f(x,t)$ es continua en los puntos $(x,0)$ del borde. Fijemos x_0 e $\in \mathbb{R}$ y sea $\varepsilon > 0$

$$|(f*P_t)(x) - f(x_0)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)P_t(y)dy - f(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} P_t(y)dy\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}(f(x-y)-f(x_0))P_t(y)dy\right| \leq \int_{|y|<\delta} |f(x-y)-f(x_0)|P_t(y)dy +$$

$$+ \int_{|y|>\delta} |f(x-y)-f(x_0)|P_t(y)\,dy.$$

Puesto que $f(x)$ es continua en x_0; existe un entorno de x_0 para cuyos puntos x' se tiene:

$$|f(x') - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Tomando x en un entorno más pequeño si es necesario y haciendo δ suficientemente pequeño, podemos conseguir que sea

$$\int_{|y|<\delta} |f(x-y)-f(x_0)|\ P_t(y)\ dy \leq \varepsilon \int_{|y|<\delta} P_t(y)\ dy \leq \varepsilon$$

Por otra parte, la segunda integral está dominada por:

$$(\text{const}) \int_{|y|>\delta} |(1+|x-y|)^\alpha + (1+|x_0|)^\alpha|\ P_t(y)\ dy \leq$$

$$\leq (\text{const}) (\int_{|y|>\delta} P_t(y)\ dy + \int_{|y|>\delta} |y|^\alpha P_t(y)\ dy)$$

Ahora basta tomar t pequeño pues para $\delta > 0$ fijo se tiene que

$$\int_{|y|>\delta} P_t(y)\ dy \longrightarrow 0$$

y

$$\int_{|y|>\delta} |y|^\alpha\ P_t(y)\ dy \longrightarrow 0$$

cuando $t \to 0$.

Así queda demostrada la continuidad.

Ahora vamos a demostrar que $f(x,t)$ cumple las condiciones (i) y (ii) del lema I.13.

Los lemas I.11 y I.12 pueden aplicarse a $f(x,t)$. El lema I.12 implica que $f(x,t)$ cumple la condición (i) de (I.13). La condición (ii) es más fuerte que (I.11) pero se cumple en nuestro caso particular. En efecto, si consideramos la banda

$$S = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2_+ : 0 \leq t \leq t_0\}$$

tenemos, para $(x,t) \in S$ y $t > 0$:

$$|f(x,t)| = |(f*P_t)(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, P_t(y)\, dy\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, \frac{1}{t}\, P_1\left(\frac{y}{t}\right) dy\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t\lambda) P_1(\lambda)\, d\lambda\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t\lambda)|\; P_1(\lambda)\, d\lambda \leq (\text{const}) \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x-t\lambda|)^{\alpha} P_1(\lambda)\, d\lambda \leq$$

$$\leq (\text{const})(1 + |x|^{\alpha} + t^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{\alpha} P_1(\lambda)\, d\lambda) \leq$$

$$\leq (\text{const})(1+|x|^{\alpha}+t_0^{\alpha}) \leq (\text{const})\; (1 + |x|^{\alpha})$$

c.q.d.

<u>LEMA I.15.</u> <u>Sea</u> $s(x,t)$ <u>una función subarmónica no negativa definida en</u> $\mathbb{R}^2_+$ <u>que está en</u> $L^q(w(x)\, dx)$ <u>uniformemente en</u> $t > 0$. <u>Entonces</u> s <u>tiene una mayorante armónica mínima que es la integral de Poisson de alguna función</u> $s_0 \in L^q(w(x)\, dx)$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Para cada $t > 0$ definamos $s_t(x) = s(x,t)$; $s_t(x)$ está en $L^q(w(x)dx)$ uniformemente en $t > 0$. Así pues, el conjunto de funciones $\{s_t : t > 0\}$ está contenido en una bola cerrada de

$$L^q(w(x)\, dx) = (L^{q'}(w(x)\, dx))^*,$$

espacio dual de $L^{q'}(w(x)\, dx)$ donde $q' = \frac{q}{q-1}$. Esta bola es "compacta con respecto a sucesiones" cuando se le da la topología débil -* determinada en $L^q(w(x)\, dx)$ por $L^{q'}(w(x)\, dx)$. Por lo tanto, existe una sucesión $t_n \to 0$ tal que

$$s_{t_n} \longrightarrow s_0 \in L^q(w(x)\, dx);$$

donde la convergencia es en la topología débil-*; es decir: para cada ϕ e $\in L^{q'}(w(x)\,dx)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_{t_n}(x)\ \phi(x)\ w(x)\ dx \to \int_{-\infty}^{\infty} s_0(x)\ \phi(x)\ w(x)\ dx$$

cuando $n \to \infty$.

El lema I.6 nos permite considerar, para cada n, $(s_{t_n} * P_t)(x)$. (I.14) implica que $(s_{t_n} * P_t)(x)$ considerada como función de (x,t), es armónica. Se tiene

$$s(x,t+t_n) \leq (s_{t_n} * P_t)(x) \tag{I.16}$$

para todo n, x, t. Para obtener (I.16) basta aplicar (I.13) a la función u definida en $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ como

$$u(x,t) = s(x,t+t_n) - (s_{t_n} * P_t)(s)$$

si $t > 0$ y

$$u(x,0) = s(x,t_n) - s_{t_n}(x) = 0.$$

Que u cumple (i) y (ii) en (I.13) es consecuencia de (I.11), (I.12) y (I.14).

Luego, haciendo tender n a ∞ en (I.16) obtenemos que

$$s(x,t) \leq (s_0 * P_t)(x)$$

puesto que del hecho de que $\dfrac{P_t(x-y)}{w(y)}$ está en $L^{q'}(w(y)\,dy)$ se desprende que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_{t_n}(y)\, \frac{P_t(x-y)}{w(y)}\, w(y)\, dy \to \int_{-\infty}^{\infty} s_0(y)\, \frac{P_t(x-y)}{w(y)}\, w(y)\, dy$$

cuando $n \to \infty$.

LEMA I.17. Supongamos que $u(x,t)$ es una función armónica en $\mathbb{R}^2_+$ que está acotada de forma no tangencial en todos los puntos de un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ de medida positiva (es decir: la función maximal no tangencial

$$m_u(x) = \sup_{|x-y|<t} |u(y,t)|$$

es finita en S).

Entonces $u(x,t)$ tiene límites "no tangenciales" en casi todo punto de S.

Este resultado se debe a A.P. Calderón. Véase [14] (Capítulo II, teorema 3.19).

Concluimos esta serie de lemas auxiliares con dos que relacionan diferentes potencias de un peso dado w.

LEMA I.18. Dado un peso w con exponente crítico q_0, existe α, $0 < \alpha \leq 1$, tal que para cada p que sea $1-\alpha < p \leq 1$, podemos encontrar un $q > q_0(1-p)+p$ y una constante tales que:

(I.19)
$$\left(\frac{1}{\int_I w(x)^{1-p} dx} \int_I w(x)^q\, w(x)^{1-p}\, dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq (\text{const}) \left(\frac{1}{\int_I w(x)^{1-p}\, dx} \int_I w(x)\, dx\right)^{1/p}$$

DEMOSTRACION. Si $p = 1$, necesitamos únicamente $q > 1$ y entonces (I.19) no es otra cosa que una desigualdad de Hölder al revés para w, que siempre se cumple (véase [3]). Podemos, pues, suponer que $p < 1$. El exponente crítico de

$$w(x)^{1-p} \text{ es } \leq q_0(1-p) + p \leq q_0.$$

En efecto, si w cumple la condición A_r, $w(x)^{1-p}$ cumple la condición $A_{r(1-p)+p}$. Esto es consecuencia de la desigualdad de Hölder:

$$\{(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1-p}dx)(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{(1-p)(-\frac{1}{r(1-p)+p-1})}\, dx)^{r(1-p)+p-1}\}^{\frac{1}{1-p}} \leq$$

$$\leq (\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\, dx)(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{r-1}}\, dx)^{r-1} \leq C.$$

En particular, para cualquier $q_1 > q_0$, $(w(x))^{1-p}$ cumple la condición A_{q_1}. Es decir, existen C_1 y C_2 con $C_1 > 0$ $C_2 < \infty$ tales que para cada intervalo I:

$$C_1 \leq (\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1-p}\, dx)(\frac{1}{|I|}\int_I \frac{1}{w(x)^{(1-p)\frac{1}{q_1-1}}}\, dx)^{q_1-1} \leq C_2$$

Esto lo podemos escribir abreviadamente como:

$$(\text{I.20}) \qquad (\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1-p}\, dx)^{1/(1-p)} \approx \frac{1}{(\frac{1}{|I|}\int_I \frac{1}{w(x)^s}\, dx)^{1/s}}$$

con $s = \frac{1-p}{q_1-1}$.

Tomemos q tal que sea $q - p = \delta$ donde $1+\delta$ es un exponente con el que w cumple una desigualdad de Hölder al revés. Puesto que q ha de ser $> q_0(1-p)+p$; será:

$$\delta = q - p > q_0(1 - p)$$

es decir: $1 - p < \frac{\delta}{p_0}$ o, lo que es lo mismo: $p > 1 - \frac{\delta}{q_0}$. Esto ya impone una restricción en el rango de las p's. En efecto: α va a ser δ/q_0 si $\delta < q_0$ o 1 si $\delta \geq q_0$.

La desigualdad (I.19) puede escribirse como:

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1-p}\,dx}\ \frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1+\delta}\,dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq (\text{const}) \left(\frac{1}{\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1-p}\,dx}\ \frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)^{1/p}$$

La desigualdad de Holder al revés para w implica que la cantidad de la izquierda es

$$\leq \frac{(\text{const})}{\left[\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1-p}\,dx\right]^{1/q}} \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)^{(1+\delta)/q} =$$

$$= (\text{const}) \left[\frac{1}{\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1-p}\,dx}\ \frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right]^{1/p}.$$

$$.\ \left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1-p}\,dx\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)^{\frac{1+\delta}{q}-\frac{1}{p}}\right\}$$

A continuación demostramos que

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1-p}\,dx\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)^{\frac{1+\delta}{q}-\frac{1}{p}}$$

está acotada. En efecto:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1-p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q}+\frac{\delta}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{|I|}\int_I \frac{1}{w(x)^s}\,dx\right)^{-\frac{(1-p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}{s}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\frac{q-p}{q}} =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{|I|}\int_I \frac{1}{w(x)^s}\,dx\right)^{1/s}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)\right]^{-(1-p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$$

La expresión entre corchetes corresponde a la cond ción A_N con $s = 1/(N-1)$, es decir:

$$N = 1 + \frac{1}{s} = 1 + \frac{q_1 - 1}{1 - p} > q_1.$$

Así pues, la expresión entre corchetes está acotada lejos de 0.

Sólo necesitamos la parte trivial de la condición A_N ya que el exponente que tenemos es negativo.

c.q.d.

LEMA I.21. Sea w un peso con exponente crítico q_0. Para cualquier p que sea $0 < p \leq 1$, existe un $q > 1$ y una constante tales que:

(I.22)
$$\left(\frac{1}{\int_I w(x)\,dx}\int_I w(x)^{-q}\, w(x)\,dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq (\text{const})\left(\frac{\int_I w(x)^{1-p}\,dx}{\int_I w(x)\,dx}\right)^{1/p}$$

DEMOSTRACION. Tomemos $q_1 > q_0$ de forma que w cumple la condición A_{q_1}. Sabemos que la condición A_{q_1} para w(x) es equivalente a la desigualdad de Holder al revês para 1/w(x) con respecto a w(x) con exponente $1 + \delta$ donde $q_1 = 1/\delta + 1$

(En efecto:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{q_1-1}}\,dx\right)^{q_1-1} \leq (\text{const})$$

equivale a

$$\left(\frac{1}{w(I)}\int_I w(x)^{1-\frac{q_1}{q_1-1}}\,dx\right)^{\frac{q_1-1}{q_1}} =$$

$$= \left(\frac{1}{w(I)}\int_I w(x)^{-\frac{1}{q_1-1}}\,dx\right)^{\frac{q_1-1}{q_1}} \leq (\text{const})\,\frac{|I|}{w(I)}$$

es decir:

$$\left(\frac{1}{w(I)}\int_I \left(\frac{1}{w(x)}\right)^{1+\frac{1}{q_1-1}} w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{1+1/(q_1-1)}} \leq$$

$$\leqslant (\text{const}) \left(\frac{1}{w(x)} \int_I \frac{1}{w(x)}\, w(x)\, dx\right))$$

Para $p = 1$, (I.22) es sencillamente una desigualdad de Hölder al revês para $1/w(x)$ con respecto a $w(x)$ y basta tomar

$$q = \frac{q_1}{q_1-1} = 1 + \frac{1}{q_1-1} > 1$$

Supongamos ahora que $p < 1$. Sea $q - 1 = s = (1-p)/(q_1-1)$. Claramente

$$q = 1 + \frac{1 - p}{q_1 - 1} > 1.$$

Sea

$$N = 1 + \frac{1}{s} = 1 + \frac{q_1 - 1}{1 - p} > q_1.$$

$w(x)$ cumple, pues, la condición A_N. Por lo tanto $1/w(x)$ cumplirá una desigualdad de Hölder al revês con respecto a $w(x)$ con exponente $1 + s$. Es decir, tendremos:

$$\left(\frac{1}{\int_I w(x)\, dx} \int_I \frac{w(x)\, dx}{w(x)^{1+s}}\right)^{1/(s+1)} \leqslant (\text{const}) \frac{|I|}{w(I)}$$

Teniendo en cuenta que $1+s = q$:

$$\left(\frac{1}{\int_I w(x)\, dx} \int_I w(x)^{-q}\, w(x)\, dx\right)^{1/q} \leqslant (\text{const}) \frac{|I|}{w(I)} \leqslant$$

$$\leq (\text{const}) \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^{-s} \, dx\right)^{1/s} \leq$$

$$\leq \frac{(\text{const})}{\left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x) \, dx\right)^{1/p} \left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^{-s} \, dx\right)^{((1/p)-1)(1/s)}} \leq$$

$$\leq (\text{const}) \frac{\left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x)^{1-p} \, dx\right)^{1/p}}{\left(\frac{1}{|I|} \int_I w(x) \, dx\right)^{1/p}}$$

La última desigualdad es consecuencia de (I.20).

c.q.d.

CAPITULO II

ESPACIOS DE FUNCIONES DE TIPO ANALITICO

§1. COMPORTAMIENTO EN LA FRONTERA.

Sea $w(x)$ un peso con exponente crítico q_0. Para p tal que $0 < p < \infty$ definimos $H^p(w(x)\,dx)$ como el conjunto de todas las funciones de $F(z)$ analíticas en el semiplano superior $\mathbb{R}^2_+$, tales que

$$||F||_{H^p(w(x)dx)} = \sup_{t>0} \{\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p w(x)dx\}^{1/p} < \infty .$$

Claramente

$$||\lambda F||_{H^p(w(x)dx)} = |\lambda|\ ||F||_{H^p(w(x)dx)}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y toda $F \in H^p(w(x)\,dx)$.

Para $p \geq 1$ se deduce de la desigualdad de Minkowski que:

$$||F+G||_{H^p(w(x)dx)} \leq ||F||_{H^p(w(x)dx)} + ||G||_{H^p(w(x)dx)}$$

Aunque para $p < 1$ ya no se cumple esta desigualdad, se tiene, sin embargo:

$$||F+G||^p_{H^p(w(x)dx)} \leq ||F||^p_{H^p(w(x)dx)} + ||G||^p_{H^p(w(x)dx)}$$

Así pues; $H^p(w(x)\,dx)$ es siempre un espacio vectorial (Lo consideraremos como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$).

Para $p \geq 1$, $|| \ ||_{H^p(w(x)dx)}$ es una norma en $H^p(w(x)\,dx)$ y para $p \leq 1$, la aplicación

$$(F,G) \longrightarrow ||F-G||^p_{H^p(w(x)dx)}$$

es una distancia en $H^p(w(x)dx)$ que es compatible con la estructura lineal de $H^p(w(x)\,dx)$ (Claramente, en virtud de la analiticidad de F, se tiene:

$$|||F||_{H^p(w(x)dx)} = 0 \Rightarrow F(z) \equiv 0).$$

Para $p < 1$, $|| \ ||^p_{H^p(w(x)\,dx)}$ no es una norma porque no es "positivamente homogénea" de grado 1. Pero es subaditiva y "positivamente homogénea" de "grado" p. Esto implica que $|| \ ||^p_{H^p(w(x)dx)}$ es lo que Yosida llama una quasi-norma (véase [15]). A partir de aquí $H^p(w(x)\,dx)$ será el espacio vectorial topológico obtenido mediante la norma

$$|| \ ||_{H^p(w(x)dx)} \quad \text{si } p \geq 1$$

o la quasi-norma

$$|| \ ||^p_{H^p(w(x)dx)} \quad \text{si } p \leq 1.$$

El propósito de este capítulo es reducir el estudio de las funciones en $H^p(w(x)\,dx)$ al estudio de funciones definidas en $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ va a identificarse con la frontera de $\mathbb{R}^2_+$). Un primer paso en esta dirección es el siguiente teorema que extiende a nuestra situación algunos resultados clásicos.

<u>TEOREMA II.1.1.</u> <u>Sea</u> $F \in H^p(w(x)\,dx)$.

(i) $\lim\limits_{t\to 0} F(x+it)$ <u>existe para casi todo</u> $x \in \mathbb{R}$ <u>y la función</u>

$$F(x) = \lim_{t\to 0} F(x+it)$$

está en $L^p(w(x)\,dx)$.

(ii) $\lim\limits_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+it)-F(x)|^p\,w(x)\,dx = 0$ y, en consecuencia:

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+it)|^p\,w(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^p\,w(x)\,dx$$

(iii) $||F||_{H^p(w(x)dx)} \leq (\text{const})\,\{\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^p w(x)dx\}^{1/p}$ donde (const) no depende de F.

DEMOSTRACION. Vamos a demostrar que la función maximal no tangencial

$$m_F(x) = \sup_{|x-y|<t}|F(y+it)|$$

es finita en casi todo punto. Esto implica la existencia de $\lim\limits_{t\to 0} F(x+it)$ de acuerdo con el lema I.17.

Consideremos $s(z) = |F(z)|^{\varepsilon}$ con $0<\varepsilon<\frac{p}{q_0}$. s es **subarmónica** ya que F es analítica. Llamemos $q = \frac{p}{\varepsilon} > q_0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}(s(x+it))^q\,w(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}|F(x+it)|^p\,w(x)\,dx \leq ||F||^p_{H^p(w(x)dx)} < \infty$$

Vemos así que $s(x+it)$ es una función subarmónica no negativa en $\mathbb{R}^2_+$ que está en $L^q(w(x)\,dx)$ uniformemente en $t>0$. Como w está en la clase A_q, podemos aplicar el lema I.15, según el cual

$$s(x+it) \leq (s_0 * P_t)(x) \quad \text{con} \quad s_0 \in L^q(w(x)\,dx).$$

De aquí se deduce:

$$m_F = \sup_{|x-y|<t} |F(y + it)| =$$

$$= \sup_{|x-y|<t} (s(y+it))^{1/\varepsilon} = \left(\sup_{|x-y|<t} s(y+it)\right)^{1/\varepsilon} \leq$$

$$\leq \left(\sup_{|x-y|<t} (s_0 * P_t)(y)\right)^{1/\varepsilon} = (P_\nabla^*(s_0)(x))^{1/\varepsilon} \leq$$

$$\leq (\text{const})(s_0^*(x))^{1/\varepsilon}.$$

La última desigualdad es consecuencia del lema I.10. Así pues

$$\text{(II.12)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (m_F(x))^p \, w(x)dx \leq (\text{const})\int_{-\infty}^{\infty} (s_0^*(x))^q w(x) \, dx \leq$$

$$\leq (\text{const}) \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(x)|^q \, W(x) \, dx < \infty.$$

Es decir; $m_F(x)$ está en $L^p(w(x)\,dx)$ lo que implica, en particular, que m_F es finita en casi todo punto. Queda así demostrada la existencia de

$$F(x) = \lim_{t\to 0} F(x + it).$$

De hecho, hemos demostrado mucho más. De acuerdo con el lema (I.17) se tiene que, para casi todo $x \in \mathbb{R}$; $F(z) \to F(x)$ cuando $z \to x$ de forma no tangencial (es decir: si existe $A > 0$ tal que

$$\operatorname{Im} z > A\,|x - \operatorname{Re} z|).$$

Como

$$|F(x)| \leq m_F(x)$$

y

$$m_F \in L^p(w(x)\,dx);$$

está claro que F(x) está en $L^p(w(x)\,dx)$. Así queda completamente demostrado (i).

(ii) Es consecuencia del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue ya que

$$|F(x+it)-F(x)|^p w(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to 0$$

para casi todo x, y

$$|F(x+it) - F(x)|^p\, w(x)$$

está siempre dominado por

$$(\text{const})\ (m_F(x))^p\ w(x)$$

que es integrable.

La clave de (iii) está en el hecho de que la mayorante armónica mínima de s es $(s_0 * P_t)(x)$ donde $s_0(x) = |F(x)|^{\varepsilon}$. Para ver ésto, basta observar que s_0 se obtiene como límite cuando $n \to \infty$ en la topología débil-* de $L^q(w(x)dx)$, de la sucesión $\{s_{t_n}\}$ donde $\{t_n\}$ es una sucesión de números positivos que tiende ahora a 0. Ahora bien:

$$s_{t_n}(x) = s(x+it_n) = |F(x+it_n)|^{\varepsilon} \longrightarrow |F(x)|^{\varepsilon}$$

cuando $n \to \infty$, en $L^q(w(x)\,dx)$. Esto es consecuencia del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue aplicado a las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| |F(x+it_n)|^{\varepsilon} - |F(x)|^{\varepsilon} \right|^q w(x)\, dx$$

puesto que

$$|F(x+it)|^{\varepsilon} - |F(x)|^{\varepsilon} \longrightarrow 0$$

cuando $t \to 0$ para casi todo x, y

$$\left| |F(x+it_n)|^{\varepsilon} - |F(x)|^{\varepsilon} \right|^q \leq (|F(x+it_n)|^{\varepsilon} + |F(x)|^{\varepsilon})^q \leq$$

$$\leq (\text{const})(|F(x+it_n)|^p + |F(x)|^p) \leq (\text{const})(m_F(x))^p$$

que está en $L^1(w(x)\,dx)$. Así pues $s_{t_n} \longrightarrow |F|^{\varepsilon}$ también en la topología débil-* de $L^q(w(x)\,dx)$. Por lo tanto:

$$s_0(x) = |F(x)|^{\varepsilon}.$$

Para cualquier $t > 0$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p\, w(x)\, dx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} (m_F(x))^p\, w(x)\, dx \leq (\text{const}) \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(x)|^q\, w(x)\, dx =$$

$$= (\text{const}) \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p\, w(x)\, dx$$

La última desigualdad es simplemente (II.1.2). Así, finalmente

$$||F||_{H^p(w(x)dx)} \leq (\mathrm{const}) \{\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p\ w(x)\ dx\}^{1/p}.$$

c.q.d.

De hecho, puesto que

$$\{\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p\ w(x)\ dx\}^{1/p} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \{\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p\ w(x)\ dx\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \sup_{t>0} \{\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p\ w(x)\ dx\}^{1/p} = ||F||_{H^p(w(x)dx)};$$

$$\{\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p\ w(x)\ dx\}^{1/p} \quad \text{si} \quad p \geq 1$$

(respectivamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p\ w(x)\ dx \quad \text{si} \quad p < 1)$$

es una norma (respectivamente quasi-norma) en $H^p(w(x)\ dx)$ equivalente a $||\ ||_{H^p(w(x)dx)}$ (respectivamente $||\ ||^p_{H^p(w(x)dx)}$).

<u>LEMA II.1.3</u>. <u>Si</u> F e $H^p(w(x)\ dx)$:

$$|F(x,t)| \leq (\mathrm{const})\ ||F||_{H^p(w(x)dx)}\ w(I(x;\tfrac{t}{2}))^{-1/p}.$$

DEMOSTRACION. Aplicando el lema I.12 a

$$s(x,t) = |F(x,t)|^{\varepsilon},$$

obtenemos:

$$|F(x,t)|^{\varepsilon} \leq (\text{const}) \sup_{u>0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(y,u)|^{\varepsilon\frac{p}{\varepsilon}} w(y)dy\right)^{\varepsilon/p} w(I(x;\tfrac{t}{2}))^{-\varepsilon/p}$$

de donde

$$|F(x,t)| \leq (\text{const}) \; ||F||_{H^p(w(x)dx)} \; w(I(x;\tfrac{t}{2}))^{-1/p}.$$

c.q.d.

Como consecuencia de II.1.3 vemos que la inclusión de $H^p(w(x)dx)$ en el espacio $H(\mathbb{R}^2_+)$ de todas las funciones holomorfas en el semiplano superior, con la topología de la convergencia uniforme en compactos; es continua.

TEOREMA II.1.4. Para todo $p > 0$, $H^p(w(x)\,dx)$ es completo.

DEMOSTRACION. Sea (F_n) una sucesión de Cauchy en $H^p(w(x)\,dx)$. Como la inclusión de $H^p(w(x)\,dx)$ en $H(\mathbb{R}^2_+)$ es continua y $H(\mathbb{R}^2_+)$ es completo, vemos que (F_n) converge uniformemente sobre subconjuntos compactos hacia alguna $F \in H(\mathbb{R}^2_+)$.

Queda por ver que $F \in H^p(w(x)\,dx)$ y $F_n \to F$ en $H^p(w(x)\,dx)$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que para cada $n, m \geq n_0$ es

$$||F_n - F_m||^p_{H^p(w(x)dx)} < \varepsilon.$$

Entonces, cualesquiera que sean N, t y $n \geq n_0$ será:

(II.1.5) $$\int_{-N}^{N} |F(x+it) - F_n(x+it)|^p \, w(x)\, dx =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{-N}^{N} |F_k(x+it) - F_n(x+it)|^p \, w(x)\, dx \leq \varepsilon.$$

ya que

$$F(x+it) = \lim_{k\to\infty} F_k(x + it)$$

uniformemente en $x \in |-N,N|$. Pero

$$\int_{-N}^{N} |F(x+it)|^p \, w(x)\, dx \leq$$

$$\leq (\text{const})(\int_{-N}^{N} |F(x+it) - F_n(x+it)|^p \, w(x)\, dx +$$

$$+ \int_{-N}^{N} |F_n(x+it)|^p \, w(x)\, dx) \leq (\text{const})(\varepsilon + \int_{-N}^{N} |F_n(x+it)|^p w(x)dx) \leq$$

$$\leq (\text{const})(\varepsilon + ||F_n||^p_{H^p(w(x)dx)}) \leq (\text{const}) < \infty.$$

Por tanto $F \in H^p(w(x)\, dx)$.

A partir de (II.1.5) se deduce que para $n \geq n_0$

$$\sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it) - F_n(x+it)|^p w(x)\, dx =$$

$$= ||F - F_n||^p_{H^p(w(x)\, dx)} \leq \varepsilon.$$

Queda así probado que $F_n \to F$ cuando $n \to \infty$ en $H^p(w(x)\,dx)$.

c.q.d.

Si $F \in H^p(w(x)\,dx)$ con $p > q_0$, entonces la función en el borde $F \in L^p(w(x)\,dx)$ y, puesto que w es un peso en la clase A_p, el lema I.14 implica que la integral de Poisson $(F * P_t)(x)$ tiene sentido y es una función armónica. Puede verse fácilmente que

$$F(x + it) = (F * P_t)(x)$$

(En efecto, el lema I.13 implica que

$$F(x + it + is) = (F(. + is) * P_t)(x)$$

Luego se hace tender s a 0). También es fácil ver que $F(x) = f(x) + i\tilde{f}(x)$ donde f es una función real en $L^p(w(x)\,dx)$ y

$$\tilde{f}(x) = \text{v.p. } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\,dy$$

es la transformada de Hilbert de f. En efecto: sea $f(x) = \operatorname{Re} F(x)$ que está en $L^p(w(x)\,dx)$. Como w está en la clase A_p, tiene sentido considerar $\tilde{f}(x)$ y según (I.9):

$$||\tilde{f}||_{L^p(w(x)dx)} \leq (\text{const})\ ||f||_{L^p(w(x)\,dx)}$$

$$((f + i\tilde{f}) * P_t)(x)$$

será una función analítica en $\mathbb{R}^2_+$ con la misma parte real que F. Así pues

$$F(x + it) = ((f + i\tilde{f}) * P_t)(x)$$

donde

$$F(x) = f(x) + i\tilde{f}(x).$$

En este caso en que $p > q_0$, la imagen de $H^p(w(x)\,dx)$ mediante la aplicación

$$H^p(w(x)\,dx) \xrightarrow{\Phi} L^p(w(x)\,dx)$$

que asignar a $F(x+it)$ su correspondiente función en el borde $F(x)$; será el conjunto $\{f(x) + i\tilde{f}(x) : f$ es real y está en $L^p\,(w(x)\,dx)\}$

De la observación que sigue al teorema (II.1.1) se desprende que

$$H^p(w(x)\,dx) \xrightarrow{\Phi} \Phi(H^p(w(x)\,dx)) \quad L^p(w(x)\,dx)$$

es, para cualquier $p > 0$, una equivalencia de espacios vectoriales métricos.

En el caso $p > q_0$, puesto que

$$||\tilde{f}||_{L^p(w(x)\,dx)} \leq (\text{const})\ ||f||_{L^p(w(x)\,dx)},$$

tenemos otra equivalencia:

$$\text{Re } L^p(w(x)\,dx) \longrightarrow \Phi(H^p(w(x)\,dx)$$

$$f(x) \longrightarrow f(x) + i\tilde{f}(x)$$

La composición de estas dos equivalencias nos permite identificar $H^p(w(x)\,dx)$ para $p > q_0$ con Re $L^p(w(x)\,dx)$. La situación es muy diferente para

$p \leq q_0$. Aquí estudiaremos solamente el caso $p \leq 1$. La primera tarea es ver que podemos restringir nuestra atención a una clase densa formada por funciones "suficientemente buenas".

TEOREMA II.1.6. Para N entero positivo, definimos $\mathcal{S}_N^p$ como el subespacio formado por las funciones $F \in H^p(w(x)\,dx)$ tales que:

(i) F es continua en $\overline{\mathbb{R}^2_+} = \{(x,t) \mid t \geq 0\}$.

(ii) Para cada $t \geq 0$ $F(x+it)$ tiende a 0 cuando $|x| \to \infty$, más rápidamente que $|x|^{-N}$. Entonces $\mathcal{S}_N^p$ es denso en $H^p(w(x)\,dx)$.

DEMOSTRACION. Puesto que cada $F(z)$ en $H^p(w(x)\,dx)$ es el límite en $H^p(w(x)dx)$ de las funciones $F(z+it)$ cuando $t \to 0$; podemos suponer que F es ya continua en $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ y que para cada $t \geq 0$, $|F(x+it)|$ no crece más deprisa en ∞ que $|x|^M$ para algún entero positivo M. Consideremos ahora para $n = 1, 2, \ldots$, las funciones analíticas

$$G_n(z) = \left(\frac{i}{\frac{z}{n} + i}\right)^{M+N}$$

Como

$$|G_n(z)| = \frac{1}{\left|\frac{z}{n} + i\right|^{M+N}} \leq 1;$$

queda claro que $G_n(z)\,F(z)$ está en $H^p(w(x)\,dx)$ para cada n; $G_n(z)\,F(z)$ es continua en $\overline{\mathbb{R}^2_+}$

$$|G_n(x+it)\,F(x+it)| \leq c(n,t)\,\frac{(1+|x|)^M}{(1+|x|)^{M+N}} \leq$$

$$\leq (\text{const})\,\frac{1}{(1+|x|)^N}\,.$$

Asi pues, para cada n, $G_n(z)\, F(z)$ está en $\mathcal{S}_N^p$. Vemos ahora que $G_n(z)\, F(z) \to F(z)$ en $H^p(w(x)\, dx)$ cuando $n \to \infty$. En efecto

$$||G_n . F - F||^p_{H^p(w(x)dx)} \leq$$

$$\leq (\text{const}) \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{i^{M+N}}{(\frac{x}{n} + i)^{M+N}} - 1 \right|^p |F(x)|^p w(x)\, dx \to 0$$

ya que

$$\left| \frac{i^{M+N}}{(\frac{x}{n} + i)^{M+N}} - 1 \right| \longrightarrow 0$$

de forma dominada.

c.q.d.

<u>COROLARIO II.1.7.</u> <u>Para cualquier</u> $q > q_0$:

$$H^p(w(x)\, dx) \cap H^q(w(x)\, dx)$$

<u>es denso en</u> $H^p(w(x)\, dx)$.

<u>DEMOSTRACION.</u> Esto es consecuencia del hecho de que para cualquier N

$$\mathcal{S}_N^p \subset H^p(w(x)\, dx) \cap H^q(w(x)\, dx)$$

En efecto si $F \in \mathcal{S}_N^p$, la función en el borde pertenece a $L^q(w(x)\, dx)$ en virtud del lema I.4. Luego, aplicando el lema I.13 puede verse que F es la integral de Poisson de su función en el borde. Por lo tanto se sigue del lema I.14 que $F \in H^q(w(x)\, dx)$.

c.q.d.

En vista de la equivalencia:

$$H^p(w(x)\ dx) \xrightarrow{\Phi} \Phi(H^p(w(x)\ dx)) \subset L^p(w(x)\ dx)$$

la compleción de $\Phi(\mathcal{S}_N^p)$ con respecto a la quasi-norma $\|\ \|^p_{L^p(w(x)\ dx)}$, es una copia equivalente de $H^p(w(x)\ dx)$. Pero cualquier $F(x)$ en $\Phi(\mathcal{S}_N^p)$ es de la forma $f(x) + i\tilde{f}(x)$ con $f(x)$ en $L^q(w(x)\ dx)$ para todo $q > q_0$. Así pues, otra forma de ver $H^p(w(x)\ dx)$ es mirar a la compleción de

$$\operatorname{Re} \Phi(\mathcal{S}_N^p) \subset \bigcap_{q>q_0} L^q(w(x)\ dx)$$

con respecto a la quasi-norma

$$\|f\|^p_{L^p(w(x)\ dx)} + \|\tilde{f}\|^p_{L^p(w(x)\ dx)}$$

§2. CARACTERIZACION MEDIANTE FUNCIONES MAXIMALES

Sea V un espacio vectorial real. Llamaremos indicador sobre V a toda aplicación $\mathcal{G} : V \to |0,\infty|$ que cumpla:

(i) Para cada $v_1, v_2 \in V$:

$$\mathcal{G}(v_1 + v_2) \leq \mathcal{G}(v_1) + \mathcal{G}(v_2)$$

(ii) Existe $p > 0$ tal que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y cada $v \in V$:

$$\mathcal{G}(\lambda v) = |\lambda|^p \mathcal{G}(v)$$

(indicaremos ésto diciendo que $\mathcal{G}$ es un indicador de tipo p.)

(iii) $\mathcal{G}(v) = 0$ si y sólo si $v = 0$.

La restricción de $\mathcal{G}$ a $V_{\mathcal{G}} = \{v \in V : \mathcal{G}(v) < \infty\}$ es claramente una quasi-norma. Diremos que $V_{\mathcal{G}}$ con esta quasi-norma es el espacio vectorial topológico determinado por el indicador $\mathcal{G}$ sobre V.

Dados dos indicadores $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ sobre V, diremos que $\mathcal{G}_1$ está dominado por $\mathcal{G}_2$ y escribiremos $\mathcal{G}_1 \prec \mathcal{G}_2$ si y sólo si existe $c < \infty$ tal que para cada $v \in V$:

$$\mathcal{G}_1(x) \leq c\, \mathcal{G}_2(v).$$

Diremos que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son equivalentes y escribiremos $\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{G}_2$ si y sólo si $\mathcal{G}_1 \prec \mathcal{G}_2$ y $\mathcal{G}_2 \prec \mathcal{G}_1$. Claramente

$$\mathcal{G}_1 \sim \mathcal{G}_2 \Rightarrow V_{\mathcal{G}_1} = V_{\mathcal{G}_2}$$

y $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ restringidos a este espacio proporcionan quasi-normas equivalentes.

El ejemplo concreto que vamos a estudiar es el siguiente: w es un peso con exponente crítico q_0. Sobre el espacio vectorial real Re $L^q(w(x)\,dx)$ donde $q > q_0$ o bien sobre

$$\bigcap_{q>q_0} \mathrm{Re}\, L^q(w(x)\,dx),$$

consideramos el indicador

$$f \longmapsto \|P_\nabla^*(f+i\tilde{f})\|^p_{L^p(w(x)\,dx)} \tag{II.2.1}$$

donde $0 < p \leq 1$.

El espacio vectorial topológico determinado por este indicador es, una vez completado, una copia equivalente de $H^p(w(x)\,dx)$.

La tarea que vamos a abordar en esta sección es la de encontrar nuevos indicadores equivalentes a (II.2.1) que nos darán nuevas maneras de ver $H^p(w(x)dx)$. El punto de partida será el indicador

$$f \longmapsto \|P_\nabla^*(f)\|^p_{L^p(w(x)\,dx)} \tag{II.2.2}$$

que está, desde luego, dominado por (II.2.1), (II.2.2) está dado por el operador maximal no tangencial asociado al núcleo de Poisson. A continuación consideraremos mos otras aproximaciones a la identidad.

En general si ϕ es tal que

$$|\phi(x)| \leq \frac{(\mathrm{const})}{(1+|x|)^\alpha}$$

con $\alpha > 1$, podemos asociar a cada $f \in \operatorname{Re} L^q(w(x)\,dx)$ una función definida en el semiplano superior $\mathbb{R}^2_+$ como

$$f(x,t) = (f * \phi_t)(x)$$

(esto tiene sentido en virtud del lema I.6) y a partir de esta función, podemos derivar las funciones maximales:

(i) $\phi^*_\nabla(f)(x) = \sup\limits_{|x-y|<t} |f(y,t)|$

(ii) En general para $N \geq 1$

$$\phi^*_{\nabla,N}(f)(x) = \sup_{|x-y|<Nt} |f(y,t)|$$

Esta es la función maximal no tangencial de amplitud N.

(iii) Para $M \geq 1$

$$\phi^{**}_M(f)(x) = \sup_{(y,t)\in\mathbb{R}^2_+} |f(y,t)|\left(\frac{t}{|x-y| + t}\right)^M$$

que llamaremos función maximal tangencial de exponente M.

A continuación investigamos las relaciones que existen entre estos diferentes operadores maximales y entre los indicadores a que dan lugar.

<u>LEMA II.2.3.</u>

$$||\phi^*_{\nabla,N}(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} \leq (\text{const})N^q||\phi^*_\nabla(f)||^p_{L^p(w(x)dx)}$$

<u>donde</u> (const) <u>depende de</u> w, <u>de</u> p <u>y de</u> $q > q_0$ <u>pero no de</u> N <u>o de</u> f.

DEMOSTRACION. (II.2.3) es consecuencia de:

(II.2.4) $\quad$ para todo $\lambda > 0 \quad w(\{x\in\mathbb{R} : \phi^*_{\nabla,N}(f)(x) > \lambda\}) \leq$

$$\leq (\text{const})\, N^q\, w(\{x\in\mathbb{R} : \phi^*_{\nabla}(f)(x) > \lambda\})$$

Para demostrar (II.2.4) basta poner

$$\{x \in \mathbb{R} : \phi^*_{\nabla}(f)(x) > \lambda\} = \bigcup_i I_i$$

donde I_i son las componentes conexas de

$$\{x \in \mathbb{R} : \phi^*_{\nabla}(f)(x) > \lambda\}$$

que son, naturalmente, intervalos abiertos; y darse cuenta de que

$$\{x \in \mathbb{R} : \phi^*_{\nabla,N}(f)(x) > \lambda\} \subset \bigcup_i \delta_N(I_i).$$

Entonces en virtud del lema I.2

$$w(\{x\in\mathbb{R} : \phi^*_{\nabla,N}(f)(x) > \lambda\}) \leq \sum_i w(\delta_N(I_i)) \leq$$

$$\leq (\text{const})\, N^q \sum_i w(I_i) = (\text{const})\, N^q\, w(\{x\in\mathbb{R} : \phi^*_{\nabla}(f)(x) > \lambda\})$$

Ahora a partir de (II.2.4):

$$||\phi^*_{\nabla,N}(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi^*_{\nabla,N}(f)(x))^p\, w(x)dx =$$

$$= p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1}\, w(\{x\in\mathbb{R} : \phi^*_{\nabla,N}(f)(x) > \lambda\})\, d\lambda \leq$$

$$\leq (\text{const})\ N^q\ p \int_0^\infty \lambda^{p-1}\ w(\{x \in \mathbb{R} : \phi_\nabla^*(f)(x) \geq \lambda\})\ d\lambda =$$

$$= (\text{const})\ N^q\ ||\phi_\nabla^*(f)||^p_{L^p(w(x)\ dx)}$$

c.q.d.

Ahora, mediante los operadores $\phi^*_{\nabla,N}$ para diferentes N's, conseguimos una desigualdad entre las quasi-normas de la función maximal tangencial de exponente M suficientemente grande y la función maximal no tangencial.

<u>LEMA II.2.5.</u> <u>Si</u> $M > \frac{q}{p}$, <u>entonces:</u>

$$||\phi_M^{**}(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} \leq (\text{const})||\phi_\nabla^*(f)||^p_{L^p(w(x)\ dx)}$$

<u>donde</u> (const) <u>depende solamente de</u> M, p, q <u>y</u> w.

<u>DEMOSTRACION.</u>

$$\phi_M^{**}(f)(x) = \sup_{(y,t)\in\mathbb{R}^2_+} |f(y,t)|\left(\frac{t}{|x-y|+t}\right)^M =$$

$$= \sup \{\sup_{|x-y|<t} |f(y,t)|\left(\frac{t}{|x-y|+t}\right)^M; \ \ldots;$$

$$\sup_{2^k t\leq|x-y|<2^{k+1}t} |f(y,t)|\left(\frac{t}{|x-y|+t}\right)^M; \ \ldots\} \leq$$

$$\leq \sup \{\phi_\nabla^*(f)(x); \ \ldots; \ 2^{-kM}\ \phi^*_{\nabla,2^{k+1}}(f)(x); \ \ldots\}$$

Así pues

$$(\phi_M^{**}(f)(x))^p \leq$$

$$\leq \sup \{(\phi_\nabla^*(f)(x))^p; \ldots; 2^{-kMp}(\phi_{\nabla,2^{k+1}}^*(f)(x))^p; \ldots\} \leq$$

$$\leq (\phi_\nabla^*(f)(x))^p + \sum_0^\infty 2^{-kMp}(\phi_{\nabla,2^{k+1}}^*(f)(x))^p.$$

Por tanto

$$||\phi_M^{**}(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} \leq \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_\nabla^*(f)(x))^p \, w(x) \, dx +$$

$$+ \sum_0^\infty 2^{-kMp} \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_{\nabla,2^{k+1}}^* (f)(x))^p \, w(x) \, dx \leq$$

$$\leq ||\phi_\nabla^*(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} + \sum_0^\infty 2^{-kMp}(\text{const}) \, 2^{(k+1)q} ||\phi_\nabla^*(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} =$$

$$= ||\phi_\nabla^*(f)||^p_{L^p(w(x)\,dx)} \, (1 + (\text{const}) \sum_0^\infty 2^{(q-Mp)k}) \leq$$

$$\leq (\text{const}) \, ||\phi_\nabla^*(f)||^p_{L^p(w(x)\,dx)}$$

ya que $q - Mp < 0$.

c.q.d.

Como consecuencia de (II.2.5) vemos que el indicador

$$f \longmapsto ||P_M^{**}(f)||^p_{L^p(w(x)\,dx)}$$

está dominado por (II.2.2) siempre que sea $M > q/p$.

Ahora, de la misma forma que en [7], pasamos del núcleo de Poisson

P a un núcleo σ en la clase $\mathcal{S}$ de Schwartz. Empezamos con una función continua ψ definida en $[1,\infty[$ que decrece rápidamente en ∞ y tal que

$$\int_1^\infty \psi(\lambda)\, d\lambda = 1$$

y

$$\int_1^\infty \lambda^k \psi(\lambda)\, d\lambda = 0$$

para $k = 1, 2, \ldots$ (la construcción de una ψ con estas propiedades puede verse en |13|, página 182). Definimos luego

$$\sigma(x) = \int_1^\infty \psi(s)\, P_s(x)\, ds$$

$\sigma \in L^1(\mathbb{R})$ ya que

$$\int_{-\infty}^\infty |\sigma(x)|\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \left|\int_1^\infty \psi(s)\, P_s(x)\, ds\right| dx \leq \int_{-\infty}^\infty \int_1^\infty |\psi(s)|\ |P_s(x)|\, ds\, dx =$$

$$= \int_1^\infty |\psi(s)| \left(\int_{-\infty}^\infty P_s(x)\, dx\right) ds = \int_1^\infty |\psi(s)|\, ds < \infty .$$

$$\hat{\sigma}(x) = \int_1^\infty \psi(s)\, \hat{P}_s(x)\, ds = \int_1^\infty \psi(s)\, e^{-s|x|}\, ds$$

$\hat{\sigma}$ decrece rápidamente en ∞. En efecto:

$$|x|^N\, |\hat{\sigma}(x)| = |x|^N \left|\int_1^\infty \psi(s)\, e^{-s|x|}\, ds\right| \leq$$

$$\leqslant |x|^N \int_1^{\infty} |\psi(s)| e^{-s|x|} \, ds \leqslant |x|^N e^{-|x|} \int_1^{\infty} |\psi(s)| \, ds \leqslant$$

$$\leqslant N! \int_1^{\infty} |\psi(s)| \, ds < \infty$$

$\hat{\sigma} \in {}^{\infty}(\mathbb{R})$: Para $x > 0$,

$$\hat{\sigma}(x) = \int_1^{\infty} \psi(s) \, e^{-sx} \, ds$$

Por lo tanto:

$$\hat{\sigma}'(x) = \int_1^{\infty} \psi(s) \, e^{-sx} \, (-s) \, ds$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\hat{\sigma}^{(N)}(x) = \int_1^{\infty} \psi(s) \, e^{-sx} (-s)^N \, ds$$

Para $x < 0$

$$\hat{\sigma}(x) = \int_1^{\infty} \psi(s) \, e^{sx} \, ds$$

Así

$$\hat{\sigma}'(x) = \int_1^{\infty} \psi(s) \, e^{sx} s \, ds$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\hat{\sigma}^{(N)}(x) = \int_1^{\infty} \psi(s) \, e^{sx} \, s^N \, ds$$

Vemos, pues, que para $x \neq 0$ se tiene:

$$\hat{\sigma}^{(N)}(x) = (-\mathrm{sgn}\ x)^N \int_1^{\infty} \psi(s)\ e^{-s|x|} s^N ds$$

Queda por estudiar la situación en el punto x = 0. Ahora bien:

$$\hat{\sigma}(x) = \int_1^{\infty} \psi(s)\ e^{-s|x|}\ ds =$$

$$= \int_1^{\infty} \psi(s)\ (1 - s|x| + \frac{s^2|x|^2}{2!} + \ldots + O((s|x|)^N))\ ds =$$

$$= \int_1^{\infty} \psi(s)\ ds - |x| \int_1^{\infty} \psi(s) s\ ds + \ldots + \int_1^{\infty} \psi(s)\ O((s|x|)^N)\ ds =$$

$$= 1 + O(|x|^N) = \hat{\sigma}(0) + O(|x|^N).$$

Esto implica que $\hat{\sigma}'(0) = 0$, de manera que la fórmula

$$\hat{\sigma}'(x) = (-\mathrm{sgn}\ x) \int_1^{\infty} \psi(s)\ e^{-s|x|} s\ ds$$

se cumple en todos los puntos incluido x = 0. $\hat{\sigma}'$ es una función continua ya que

$$\int_1^{\infty} \psi(s)\ e^{-s|x|}\ s\ ds$$

toma el valor 0 para x = 0. El mismo procedimiento puede aplicarse a las derivadas de orden superior. Para cada N,

$$\hat{\sigma}^{(N)}(x) = (-\mathrm{sgn}\ x)^N \int_1^{\infty} \psi(s)\ e^{-s|x|} s^N\ ds$$

se cumple en cada punto x. Así $\hat{\sigma}^{(N)}$ es continua. Esta última fórmula nos permite también demostrar que $\hat{\sigma}^{(N)}$ decrece rápidamente en ∞, exactamente de la misma manera que lo demostramos para $\hat{\sigma}$. La conclusión es que $\hat{\sigma} \in \mathcal{S}$, la clase de Schwartz, y, por consiguiente, $\sigma \in \mathcal{S}$. Otras propiedades interesantes de σ son:

(i) σ es par.

(ii) σ tiene todos los momentos de orden ≥ 1 iguales a cero. En efecto, para $k = 1, 2, \ldots$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \sigma(x)\, dx = (x^k\sigma(x))\hat{}\,(0) = i^k \hat{\sigma}^{(k)}(0) = 0$$

(iii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x)\, dx = \hat{\sigma}(0) = \int_1^{\infty} \psi(s)\, ds = 1.$$

σ da lugar a la aproximación a la identidad $\{\sigma_t\}$ donde

$$\sigma_t(x) = \frac{1}{t}\,\sigma\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t}\int_1^{\infty} \psi(s)\, P_s\left(\frac{x}{t}\right) ds =$$

$$= \int_1^{\infty} \psi(s)\, P_{st}(x)\, ds.$$

Para esta aproximación a la identidad, podemos considerar la función maximal

$$\sigma_\nabla^*(f)(x) = \sup_{|x-y|<t} |(f*\sigma_t)(y)|.$$

LEMA II.2.6. *Para cualquier* M

$$\sigma_\nabla^*(f)(x) \leq (\text{const})\, P_M^{**}(f)(x)$$

donde (const) *sólo depende de* M.

DEMOSTRACION. Sea $(y,t) \in \mathbb{R}_t^2$ tal que $|x-y| < t$. Entonces

$$(\sigma_t * f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_t(y-u)\, f(u)\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_1^{\infty} \psi(s)\, P_{st}(y-u)\, ds \Big) f(u)\, du =$$

$$= \int_1^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} P_{st}(y-u)\, f(u)\, du \Big) \psi(s)\, ds =$$

$$= \int_1^{\infty} (P_{st} * f)(y)\, \psi(s)\, ds.$$

Por tanto:

$$\sigma_\nabla^*(f)(x) = \sup_{|x-y|<t} |(\sigma_t * f)(y)| =$$

$$= \sup_{|x-y|<t} \Big| \int_1^{\infty} \psi(s) (P_{st} * f)(y)\, ds \Big| \leq$$

$$\leq \sup_{|x-y|<t} \int_1^{\infty} |\psi(s)|\, |(P_{st} * f)(y)|\, ds \leq$$

$$\leq \sup_{|x-y|<t} \int_1^{\infty} |\psi(s)|\, P_M^{**}(f)(x) \Big(\frac{|x-y|+st}{st} \Big)^M ds \leq$$

$$\leq P_M^{**}(f)(x) \int_1^{\infty} |\psi(s)| (1+s)^M\, ds \leq (\text{const})\, P_M^{**}(f)(x).$$

c.q.d.

Así pues, si $M > q/p$ tenemos una cadena de indicadores sobre Re $L^q(w(x)\, dx)$:

$$||\sigma_\nabla^*(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} < ||P_M^{**}(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} <$$

$$< ||P_\nabla^*(f)||^p_{L^p(w(x)\, dx)}$$

Ahora a partir de $\{\sigma_t\}$ pasaremos a una clase muy general de aproximaciones a la identidad. El primer paso en esta dirección es el siguiente:

LEMA II.2.7. Sea $\phi \in \mathcal{S}$ y supongamos que $\eta = \xi * \phi_s$ donde $\xi \in \mathcal{S}$ y $0 < s \leq 1$. Entonces

$$\eta^*_\nabla(f)(x) \leq 2^M s^{-M} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)|(1+|\lambda|)^M \, d\lambda\right)\phi^{**}_M(f)(x)$$

DEMOSTRACION. Sea $(y,t) \in \mathbb{R}^2_+$ tal que $|x-y| < t$. Entonces

$$|(\eta_t * f)(y)| = |((\xi * \phi_s)_t * f)(y)| =$$

$$= |(\xi_t * \phi_{st} * f)(y)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \xi_t(y-u)(\phi_{st} * f)(u)\, du\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_t(y-u)|\; |(\phi_{st} * f)(u)|\, du \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_t(y-u)|\phi^{**}_M(f)(x)\left(\frac{|x-u|+st}{st}\right)^M du =$$

$$= \phi^{**}_M(f)(x)\; s^{-M} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_t(y-u)|\left(s + \left|\frac{x-u}{t}\right|\right)^M du \leq$$

$$\leq \phi^{**}_M(f)(x)\; s^{-M} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t}\left|\xi\left(\frac{y-u}{t}\right)\right|\left(1+\left|\frac{x-y}{t}\right| + \left|\frac{y-u}{t}\right|\right)^M du \leq$$

$$\leq 2^M \phi^{**}_M(f)(x)\; s^{-M} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)|\; (1 + |\lambda|)^M \, d\lambda.$$

c.q.d.

LEMA II.2.8. Supongamos que η es una función $\mathcal{C}^\infty$ con soporte compacto contenido en el intervalo $[-A,A]$. Entonces

$$\eta^*_\nabla(f)(x) \leq$$

$$\leq (\text{const})\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\eta(u)|\,du + \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^{M+1}\eta(u)}{du^{M+1}}\right| du\right)\sigma^{**}_M(f)(x)$$

donde σ es la misma función del lema II.2.6 y (const) depende sólo de A y de M y no de f o de η.

DEMOSTRACION.

$$\eta = \eta * \sigma * \sigma + \sum_{k=0}^{\infty} \eta * \sigma_{2^{-k-1}} * \sigma_{2^{-k-1}} - \eta * \sigma_{2^{-k}} * \sigma_{2^{-k}}$$

En efecto la suma parcial de la serie es

$$\eta * \sigma_{2^{-k-1}} * \sigma_{2^{-k-1}} = \eta * (\sigma * \sigma)_{2^{-k-1}} \to \eta$$

uniformemente cuando $k \to \infty$ ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma * \sigma)(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x-u)\sigma(u)\, du\, dx = 1$$

Así pues:

$$\eta = \eta * \sigma * \sigma + \sum_{k=0}^{\infty} \eta * (\sigma_{2^{-k-1}} - \sigma_{2^{-k}}) * (\sigma_{2^{-k-1}} + \sigma_{2^{-k}}) =$$

$$= \eta * \sigma * \sigma + \sum_{k=0}^{\infty} \eta * (\sigma_{2^{-1}} - \sigma)_{2^{-k}} * (\sigma_{2^{-1}} + \sigma)_{2^{-k}} =$$

$$= \eta * \sigma * \sigma + \sum_{k=0}^{\infty} \eta * (\sigma_-)_{2^{-k}} * (\sigma_+)_{2^{-k}}$$

donde

$$\sigma_- = \sigma_{2^{-1}} - \sigma \qquad \text{y} \qquad \sigma_+ = \sigma_{2^{-1}} + \sigma$$

σ_- y σ_+ están en $\mathcal{S}$, lo mismo que σ; son pares y tienen todos los momentos de orden ≥ 1 iguales a cero, σ_- tiene integral 0 y σ_+ tiene integral 2.

A continuación aplicamos el lema II.2.7 con σ y σ_+ en lugar de ϕ. Tomemos $(y,t) \in \mathbb{R}^2_+$ tal que $|x - y| < t$

$$|(\eta_t * f)(y)| =$$

$$= |((\eta * \sigma * \sigma)_t * f)(y) + \sum_{k=0}^{\infty} ((\eta * (\sigma_-)_{2^{-k}} * (\sigma_+)_{2^{-k}})_t * f)(y)| \leq$$

$$\leq |(((\eta * \sigma) * \sigma)_t * f)(y)| + \sum_{k=0}^{\infty} |(((\eta*(\sigma_-)_{2^{-k}}) * (\sigma_+)_{2^{-k}})_t * f)(y)| \leq$$

$$\leq ((\eta*\sigma) * \sigma)^*_\nabla (f)(x) + \sum_{k=0}^{\infty} ((\eta * (\sigma_-)_{2^{-k}}) * (\sigma_+)_{2^{-k}})^*_\nabla (f)(x) \leq$$

$$\leq 2^M \{\sigma^{**}_M (f)(x) \int_{-\infty}^{\infty} |(\eta*\sigma)(\lambda)| \; (1 + |\lambda|)^M \, d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma_+)^{**}_M (f)(x) \; 2^{kM} \int_{-\infty}^{\infty} |(\eta * (\sigma_-)_{2^{-k}})(\lambda)| (1+|\lambda|)^M \, d\lambda\}$$

Teniendo en cuenta que

$$(\sigma_+)^{**}_M (f)(x) \leq (2^M + 1)\sigma^{**}_M (f)(x)$$

resulta:

(II.2.9) $$|(\eta_t * f)(y)| \leq$$

$$\leq (\text{const})\sigma^{**}_M (f)(x) \; \{\int_{-\infty}^{\infty} |(\eta*\sigma)(\lambda)| (1 + |\lambda|)^M \, d\lambda +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kM} \int_{-\infty}^{\infty} |(\eta*(\sigma_-)_{2^{-k}})(\lambda)| \; (1 + |\lambda|)^M \, d\lambda\}$$

donde (const) depende solamente de M.

(II.2.10)
$$\int_{-\infty}^{\infty}|(\eta*\sigma)(\lambda)|\ (1+|\lambda|)^M d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\eta(u)\sigma(\lambda-u)du\right| (1+|\lambda|)^M d\lambda \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty}|\eta(u)|\ \left(\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma(\lambda-u)|(1+|\lambda|)^M\, d\lambda\right) du =$$

$$= \int_{-A}^{A} |\eta(u)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma(\mu)|\ (1+|\mu+u|)^M\, d\mu\right)du \leq$$

$$\leq (\text{const}) \int_{-\infty}^{\infty}|\eta(u)|\ du$$

donde (const) depende solamente de σ, A y M.

Ahora, usando el hecho de que σ_- es par y tiene todos los momentos iguales a cero, estimamos

$$\int_{-\infty}^{\infty}|(\eta*(\sigma_-)_s)(\lambda)|\ (1+|\lambda|)^M\, d\lambda$$

para $0 < s \leq 1$

$$(\eta * (\sigma_-)_s)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\eta(\lambda-u)(\sigma_-)_s(u)du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\eta(\lambda+u)(\sigma_-)_s(u)\ du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(\eta(\lambda+u) - \eta(\lambda) - u\eta'(\lambda) - \dots - \frac{u^M}{M!}\eta^{(M)}(\lambda))(\sigma_-)_s(u)du$$

Aplicando el teorema de Taylor:

$$(\eta * (\sigma_-)_s)(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u^{M+1}}{M!} \int_0^1 (1-r)^M \; \eta^{(M+1)}(\lambda+ru)dr\right)(\sigma_-)_s(u)du =$$

$$= \frac{1}{M!} \int_0^1 (1-r)^M \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^{M+1}(\sigma_-)_s(u) \; \eta^{(M+1)}(\lambda+ru)du\right)dr$$

Por lo tanto:

$$|(\eta * (\sigma_-)_s)(\lambda)| \leq \frac{1}{M!} \int_0^1 (1-r)^M \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{M+1} |(\sigma_-)_s(u)| \, |\eta^{(M+1)}(\lambda+ru)| dudr$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\eta * (\sigma_-)_s)(\lambda)| \; (1 + |\lambda|)^M \, d\lambda \leq$$

$$\leq \frac{1}{M!} \int_0^1 (1-r)^M \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{M+1} |(\sigma_-)_s(u)| \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^M |\eta^{(M+1)}(\lambda+ru)| d\lambda dudr$$

Pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|\lambda|)^M \; |\eta^{(M+1)}(\lambda+ru)| \; d\lambda =$$

$$= \int_{-A}^{A} (1 + |\mu-ru|)^M \; |\eta^{(M+1)}(\mu)| \; d\mu \leq$$

$$\leq (\text{const})(1 + |u|)^M \int_{-\infty}^{\infty} |\eta^{(M+1)}(\mu)| \; d\mu$$

Así pues:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\eta * (\sigma_-)_s)(\lambda) \; (1 + |\lambda|)^M \, d\lambda \leq$$

$$\leq (\text{const}) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{M+1} |(\sigma_-)_s(u)| (1 + |u|)^M \; du\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\eta^{(M+1)}(\mu)| d\mu\right)$$

Ahora bien:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{M+1} |(\sigma_-)_s(u)|(1 + |u|)^M \, du \leq$$

$$\leq (\text{const})\left(\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{M+1} |(\sigma_-)_s(u)| du + \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{2M+1} |(\sigma_-)_s(u)| du\right) =$$

$$= (\text{const})\left(s^{M+1} \int_{-\infty}^{\infty} |v|^{M+1} |\sigma_-(v)| \, dv +\right.$$

$$\left. + \, s^{2M+1} \int_{-\infty}^{\infty} |v|^{2M+1} \, |\sigma_-(v)| dv\right) \leq (\text{const}) \, s^{M+1}$$

donde (const) depende solo de M. En consecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\eta * (\sigma_-)_s)(\lambda)|(1 + |\lambda|)^M \, d\lambda \leq \tag{II.2.11}$$

$$\leq (\text{const}) \, s^{M+1} \int_{-\infty}^{\infty} |\eta^{(M+1)}(\mu)| \, d\mu$$

donde (const) no depende de s, sólo de A y de M.

Finalmente, llevando (II.2.10) y (II.2.11) a (II.2.9) obtenemos

$$|(\eta_t * f)(y)| \leq (\text{const}) \, \sigma_M^{**}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\eta(u)| \, du +\right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kM} \, 2^{-k(M+1)} \int_{-\infty}^{\infty} |\eta^{(M+1)}(u)| \, du\right) =$$

$$= (\text{const})\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\eta(u)| du + \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^{M+1}\eta(u)}{du^{M+1}}\right| du\right)\sigma_M^{**}(f)(x).$$

c.q.d.

<u>LEMA II.2.12.</u> <u>Sea</u> ϕ <u>una función</u> $\mathcal{C}^\infty$ <u>con soporte contenido en</u> $[-\delta,\delta]$ <u>y sean</u> x <u>e</u> y <u>tales que</u> $|x - y| < C\delta$ <u>donde</u> C <u>es una constante fija</u> > 0. <u>Entonces</u>

$$|(\phi * f)(y)| \leq (\text{const})\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(u)|\, du + \right.$$

$$\left. + \delta^{M+1} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi^{(M+1)}(u)|\, du\right)\sigma_M^{**}(f)(x).$$

donde (const) depende solamente de C y no de δ.

DEMOSTRACION. Como ϕ tiene el soporte contenido en $[-\delta,\delta]$, $\phi_{1/C\delta}$ tendrá el soporte contenido en $[-\frac{1}{C},\frac{1}{C}]$. Ahora aplicamos (II.2.8) a $\phi_{1/C\delta}$.

$$|(\phi * f)(y)| = |((\phi_{1/C\delta})_{C\delta} * f)(y)| \leq (\phi_{1/C\delta})_\nabla^*(f)(x) \leq$$

$$\leq (\text{const})\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{1/C\delta}(u)|du + \int_{-\infty}^{\infty} |(\phi_{1/C\delta})^{(M+1)}(u)|du\right)\sigma_M^{**}(f)(x) =$$

$$= (\text{const})\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(u)|du + (C\delta)^{M+1} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi^{(M+1)}(u)|du\right)\sigma_M^{**}(f)(x) \leq$$

$$\leq (\text{const})\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(u)|du + \delta^{M+1}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi^{(M+1)}(u)|du\right)\sigma_M^{**}(f)(x);$$

c.q.d.

donde (const) sôlo depende de C.

Sea ahora ϕ cualquier función C^∞ con soporte compacto. Llamemos I_ϕ al intervalo cerrado más pequeño que contenga al soporte de ϕ y C_ϕ al centro de dicho intervalo. Sea x tal que

$$\text{dist}\,(x,I_\phi) < C|I_\phi|$$

donde $C > 0$. Entonces

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \phi(t)\ dt\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(C_\phi - t)\ \phi(C_\phi - t)\ dt\right| =$$

$$= |(f * \phi(C_\phi - \cdot))\ (C_\phi)| \leq$$

$$\leq (\text{const})\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(C_\phi - u)|\ du + |I_\phi|^{M+1} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi^{(M+1)}(C_\phi - u)|du\right)\sigma_M^{**}(f)(x) =$$

$$= (\text{const})\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(u)|\ du + |I_\phi|^{M+1} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi^{(M+1)}(u)|du\right)\sigma_M^{**}(f)(x)$$

donde **(const)** depende de C.

Definimos el operador maximal:

$$S_M^*\ (f)(x) = \sup \left\{\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \phi(t)\ dt\right|}{\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(u)|du + |I_\phi|^{M+1} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi^{(M+1)}(u)|du} :\right.$$

$$\left. : \phi \text{ es } C^\infty \text{ con soporte compacto y dist } (x, I_\phi) < |I_\phi|\right\}.$$

Hemos demostrado:

TEOREMA II.2.13.

$$S_M^*(f)(x) \leq (\text{const})\ \sigma_M^{**}(f)(x)$$

Como siempre, tomamos $M > q/p$ y $f \in \mathrm{Re}\, L^q(w(x)\ dx)$. En este caso, (II.2.13) nos permite añadir un eslabón más a nuestra cadena de indicadores sobre Re $L^q(w(x)\ dx)$ que ahora presenta el siguiente aspecto:

$$\|S_M^*(f)\|^p_{L^p(w(x)dx)} \leq \|\sigma_M^{**}(f)\|^p_{L^p(w(x)dx)} \leq \|\sigma_\nabla^*(f)\|^p_{L^p(w(x)dx)} \leq$$

$$< \|P_M^{**}(f)\|^p_{L^p(w(x)\,dx)} < \|P_\nabla^{*}(f)\|^p_{L^p(w(x)dx)} <$$

$$< \|P_\nabla^{*}(f+i\tilde{f})\|^p_{L^p(w(x)dx)}.$$

En la próxima sección veremos que esta cadena, de hecho, se cierra; de forma que todos los indicadores que aparecen en ella son equivalentes y sirven, por tanto, para caracterizar $H^p(w(x)\,dx)$.

§3. DESCOMPOSICION ATOMICA.

Sea $w(x)$ un peso con exponente crítico q_0 y sea $0 < p \leq 1$. Para $q > q_0$ llamaremos (p,q)-átomo con respecto al peso w a una función real a con soporte contenido en un intervalo I y que cumple las siguientes condiciones:

$$\text{(i)} \quad \left(\frac{1}{w(I)} \int_I |a(x)|^q\, w(x)\, dx\right)^{1/q} \leq \frac{1}{w(I)^{1/p}}$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, x^k\, dx = 0 \text{ para todo entero } k \text{ tal que}$$

$$0 \leq k \leq \left[\frac{q_0}{p}\right] - 1$$

donde para $y \geq 0$ $[y]$ significa parte entera de y; es decir, el mayor entero $\leq y$.

En alguna ocasión consideraremos (p,∞)-átomos. La definición de un (p,∞)-átomo se obtiene a partir de la de un (p,q)-átomo cambiando (i) por

$$\text{(i')} \qquad ||a||_\infty \leq \frac{1}{w(I)^{1/p}}$$

Claramente un (p,∞)-átomo es siempre un (p,q)-átomo para cualquier q.

LEMA II.3.1. Sea a un (p,q)-átomo con respecto a w y sea I el intervalo cerrado más pequeño de los que contienen al soporte de a. Sea

$$I^* = \delta_2(I) = C_I + 2(I - C_I)$$

Entonces

$$\int_{I^*} |\tilde{a}(x)|^p\, w(x)\, dx \leq (\text{const})$$

donde (const) es independiente de a, para q fijo, pero depende de q.

DEMOSTRACION.

$$\left(\frac{1}{w(I^*)}\int_{I^*}|\tilde{a}(x)|^p w(x)dx\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{w(I^*)}\int_{I^*}|\tilde{a}(x)|^q w(x)dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{w(I^*)}\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{a}(x)|^q w(x)dx\right)^{1/q} \leq (\mathrm{const})\left(\frac{1}{w(I^*)}\int_{-\infty}^{\infty}|a(x)|^q w(x)dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq (\mathrm{const})\left(\frac{1}{w(I)}\int_{I}|a(x)|^q w(x)dx\right)^{1/q} \leq (\mathrm{const})\,\frac{1}{w(I)^{1/p}}$$

Así pues

$$\int_{I^*}|\tilde{a}(x)|^p\, w(x)dx \leq (\mathrm{const})\,\frac{w(I^*)}{w(I)} \leq (\mathrm{const}).$$

c.q.d.

LEMA II.3.2. En las mismas hipótesis del lema anterior, para $x \notin I^*$ se tiene:

$$|\tilde{a}(x)| \leq (\mathrm{const})\,\frac{1}{w(I)^{1/p}}\left(\frac{|I|}{|x - C_I|}\right)^{[q_0/p]+1}$$

donde (const) no depende de a para q fijo.

DEMOSTRACION.

$$|\tilde{a}(x)| = (\mathrm{const})\,\left|\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(y)}{x-y}\,dy\right| =$$

$$= (\mathrm{const})\left|\int_I a(y)\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-C_I} - \frac{y-C_I}{(x-C_I)^2} - \dots - \frac{(y-C_I)^{[q_0/p]-1}}{(x-C_I)^{[q_0/p]}}\right)dy\right| \leq$$

$$\leq (\mathrm{const})\left(\int_I |a(y)|^q w(y)dy\right)^{1/q}\left(\int_I\left|\frac{(y - C_I)^{[q_0/p]}}{(x-C_I-\theta_y(y-C_I))^{[q_0/p]+1}}\right|^{q'}\right.$$

$$\cdot\ w(y)^{-q'/q}\, dy)^{1/q'}$$

con $0 < \theta_y < 1$. Ahora bien

$$|x - C_I - \theta_y(y-C_I)| \geq |x-C_I| - |y-C_I|.$$

Pero $y \in I \Longrightarrow |y-C_I| \leq |I|/2$ y, como $x \notin I^*$:

$$|x - C_I| > |I|.$$

Así

$$|y - C_I| < \frac{|x-C_I|}{2}$$

y, en consecuencia:

$$|x - C_I - \theta_y(y-C_I)| \geq |x-C_I| - \frac{|x-C_I|}{2} = \frac{|x-C_I|}{2}.$$

Por tanto:

$$|\tilde{a}(x)| \leq (\text{const})w(I)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{|I|^{[q_0/p]}}{|x-C_I|^{[q_0/p]+1}} \left(\int_I w(y)^{-\frac{1}{q-1}} dy\right)^{\frac{q-1}{q}} \leq$$

$$\leq (\text{const})w(I)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{|I|^{[q_0/p]}}{|x-C_I|^{[q_0/p]+1}} |I|^{\frac{q-1}{q}} \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{q-1}} dy\right)^{\frac{q-1}{q}} \leq$$

$$\leq (\text{const})w(I)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{|I|^{[q_0/p]}}{|x-C_I|^{[q_0/p]+1}} |I|^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{(\text{const})}{\frac{1}{|I|}w(I)}\right)^{1/q} =$$

$$= (\text{const}) \frac{1}{w(I)^{1/p}} \left(\frac{|I|}{|x-C_I|}\right)^{\left[\frac{q_0}{p}\right]+1}$$

c.q.d.

A partir de (II.3.1) y (II.3.2) obtenemos:

TEOREMA II.3.3. Si a es un (p,q)-átomo con respecto a w, entonces

$$\|\tilde{a}\|^p_{L^p(w(x)dx)} \leq (\text{const}).$$

DEMOSTRACION.

$$\int_{x\notin I^*} |\tilde{a}(x)|^p\, w(x)\, dx \leq$$

$$\leq (\text{const})\, \frac{1}{w(I)}\, |I|^{p([\frac{q_0}{p}]+1)} \int_{x\notin I^*} \frac{w(x)\, dx}{|x-C_I|^{p([\frac{q_0}{p}]+1)}} \leq$$

$$\leq (\text{const})\, \frac{1}{w(I)}\, |I|^{p([\frac{q_0}{p}]+1)}\, \frac{1}{|I^*|^{p([\frac{q_0}{p}]+1)}}\, w(I)$$

La última desigualdad es consecuencia de (I.4) ya que

$$p([\frac{q_0}{p}]+1) > p\,\frac{q_0}{p} = q_0.$$

Así pues:

$$\int_{x\notin I^*} |\tilde{a}(x)|^p\, w(x)\, dx \leq (\text{const})$$

que, junto con (II.3.1) da inmediatamente (II.3.3).

c.q.d.

<u>TEOREMA II.3.4. Sea</u> a <u>un</u> (p,q)-<u>átomo con respecto a</u> w. <u>Entonces</u>

$$||P^*_\nabla(a + i\tilde{a})||^p_{L^p(w(x)dx)} \leq (\text{const})$$

<u>donde</u> (const) <u>no depende de</u> a <u>para</u> q <u>fijo</u>.

<u>DEMOSTRACION</u>. Sigue la misma línea de (II.3.3) I e I^* tienen el mismo significado que allí.

$$\left(\frac{1}{w(I^*)}\int_{I^*}(P^*_\nabla(a + i\tilde{a})(x))^p\, w(x)\, dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{w(I^*)}\int_{I^*}(P^*_\nabla(a + i\tilde{a})(x))^q\, w(x)\, dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq (\text{const}) \left(\frac{1}{w(I)}\int_{I}|a(x)|^q\, w(x)\, dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq (\text{const}) \frac{1}{w(I)^{1/p}} .$$

Así pues:

$$\int_{I^*} (P^*_\nabla(a + i\tilde{a})(x))^p\, w(x)\, dx \leq (\text{const}) \tag{II.3.5}$$

independiente de a para q fijo.

La desigualdad (II.3.5) que estima el tamaño de la función maximal en puntos cercanos al soporte del átomo, es consecuencia de la parte (i) de la definición de átomo, que nos da su norma en $L^q(w(x)\, dx)$, y de los resultados (I.9) y (I.10). Ahora, para estimar la función maximal en puntos alejados del soporte, usaremos la parte (ii) de la definición de átomo que nos da información acerca de sus cancelaciones.

Consideremos $x \notin I^*$; es decir:

$$|x - C_I| > |I|$$

Estimamos primero

$$P_\nabla^*(a)(x) = \sup_{|x-y|<t} |(P_t * a)(y)|$$

Tomemos $(y,t) \in \mathbb{R}^2_+$ de forma que sea $|x-y| < t$.

$$|(P_t * a)(y)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} P_t(y-u)\, a(u)\, du\right| =$$

$$= \Big|\int_{-\infty}^{\infty} (P_t(y-u) - P_t(y-C_I) + P_t'(y-C_I)(u-C_I) + \dots +$$

$$+ \frac{(-1)^{[q_0/p]}}{([\frac{q_0}{p}] - 1)!} (P_t^{([\frac{q_0}{p}]-1)}(y-C_I))(u-C_I)^{[\frac{q_0}{p}]-1})a(u)\, du\Big| \leq$$

$$\leq (\text{const})\Big|\int_{-\infty}^{\infty} |P_t^{([\frac{q_0}{p}])}(y-C_I-\theta_u(u-C_I))|\ |u-C_I|^{[\frac{q_0}{p}]} |a(u)|\, du$$

donde $0 < \theta_u < 1$. Así pues:

$$|(P_t * a)(y)| \leq (\text{const}) \cdot$$

$$\cdot \Big(\int_I |a(u)|^q\, w(u)\, du\Big)^{1/q}\Big(\int_I |P_t^{([\frac{q_0}{p}])}(y-C_I-\theta_u(u-C_I))|^{q'} |u-C_I|^{[\frac{q_0}{p}]q'} \cdot$$

$$\cdot\ w(u)^{-q'/q}\, du\Big)^{1/q'} =$$

$$= (\text{const}) w(I)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \Big(\int_I \big(\frac{1}{t}\, |P^{([\frac{q_0}{p}])}(\frac{y-C_I-\theta_u(u-C_I)}{t})| (\frac{1}{t})^{[\frac{q_0}{p}]}\big)^{q'}$$

$$\cdot\ |u - C_I|^{[\frac{q_0}{p}]q'}\ w(u)^{-\frac{q'}{q}}\ du\Big)^{\frac{1}{q'}}$$

Ahora utilizaremos la desigualdad

$$|P^{(N)}(s)| \leq \frac{C_N}{(1+|s|)^{N+1}}$$

En nuestra situación concreta:

$$\left|P^{([\frac{q_0}{p}])}\left(\frac{y-C_I-\theta_u(u-C_I)}{t}\right)\right| \leq \frac{(\mathrm{const})}{\left(1+\left|\frac{y-C_I-\theta_u(u-C_I)}{t}\right|\right)^{[q_0/p]+1}} =$$

$$= \frac{(\mathrm{const})\, t^{[\frac{q_0}{p}]+1}}{(t+|y-C_I-\theta_u(u-C_I)|)^{[q_0/p]+1}}.$$

Por lo tanto:

$$|(P_t * a)(y)| \leq (\mathrm{const})w(I)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_I \left(\frac{|u-C_I|^{[\frac{q_0}{p}]}}{(t+|y-C_I-\theta_u(u-C_I)|)^{[q_0/p]+1}}\right)^{q'} w(u)^{-q'/q}\, du\right)^{1/q'}$$

Pero

$$t+|y-C_I-\theta_u(u-C_I)| \geq t+|y-C_I|-|u-C_I| =$$

$$= t+|x-C_I+y-x|-|u-C_I| \geq t+|x-C_I|-|y-x|-|u-C_I| >$$

$$> |x-C_I|-|u-C_I| > |x-C_I|-\frac{|I|}{2} > |x-C_I|-\frac{|x-C_I|}{2} = \frac{|x-C_I|}{2}$$

Se sigue que:

$$|(P_t * a)(y)| \leq$$

$$\leq (\text{const}) w(I)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{|I|^{[\frac{q_0}{p}]}}{|x - C_I|^{[\frac{q_0}{p}] + 1}} \left(\int_I w(y)^{-\frac{1}{q-1}} dy \right)^{\frac{q-1}{q}} \leq$$

$$\leq (\text{const}) \frac{1}{w(I)^{1/p}} \left(\frac{|I|}{|x - C_I|} \right)^{[q_0/p] + 1}$$

Así pues:

(II.3.6): Si $x \notin I^*$, entonces

$$P_\nabla^*(a)(x) \leq (\text{const}) \frac{1}{w(I)^{1/p}} \left(\frac{|I|}{|x - C_I|} \right)^{[q_0/p] + 1}$$

Luego estimamos $P_\nabla^*(\tilde{a})(x)$ para $x \notin I^*$

$$P_\nabla^*(a)(x) = \sup_{|x-y|<t} |(P_t * \tilde{a})(y)| = \sup_{|x-y|<t} |(\tilde{P}_t * a)(y)| =$$

$$= \sup_{|x-y|<t} |((\tilde{P})_t * a)(y)|.$$

Ahora bien:

$$\tilde{P}(s) = \frac{s}{1 + s^2}$$

cumple, lo mismo que P, la condición:

$$|\tilde{P}^{(N)}(s)| \leq \frac{C_N}{(1 + |s|)^{N+1}} .$$

Por tanto, la misma demostración nos da:

(II.3.7): Si $x \notin I^*$, entonces

$$P_\nabla^*(\tilde{a})(x) \leq (\text{const}) \frac{1}{w(I)^{1/p}} \left(\frac{|I|}{|x-C_I|}\right)^{[q_0/p]+1}$$

Conjugando (II.3.6) y (II.3.7) obtenemos:

(II.3.8): Si $x \notin I^*$, entonces

$$P_\nabla^*(a + i\tilde{a}) \leq P_\nabla^*(a) + P_\nabla^*(\tilde{a}) \leq$$

$$\leq (\text{const}) \frac{1}{w(I)^{1/p}} \left(\frac{|I|}{|x - C_I|}\right)^{[q_0/p]+1}$$

A partir de aquí, lo mismo que en la demostración de (II.3.3) obtenemos

(II.3.9) $$\int_{x \notin I^*} (P_\nabla^*(a + i\tilde{a})(x))^p \, w(x) \, dx \leq (\text{const})$$

que junto con (II.3.5) da lugar a (II.3.4).

c.q.d.

Así pues, los átomos proporcionan ejemplos muy simples de **funciones en** $H^p(w(x)\,dx)$. El resultado fundamental es que toda función de $H^p(w(x)\,dx)$ puede "descomponerse en átomos".

Para llegar a esta descomposición necesitaremos primero el lema siguiente, que es un refinamiento de la descomposición clásica de Calderón y Zygmund.

<u>LEMA II.3.10.</u> <u>Sea</u> f <u>una función en</u> $L^q(w(x)\,dx)$ <u>donde</u> $q > q_0$ <u>y sea</u> $\lambda > 0$ <u>y</u> N <u>un entero</u> ≥ 0. <u>Entonces</u>

$$f(x) = g_\lambda(x) + \sum_i b_\lambda^i(x)$$

en casi todo punto y también en $L^q(w(x)\,dx)$; donde

$$|g_\lambda(x)| \leq (\text{const})\, \lambda,$$

b^i_λ tiene el soporte contenido en un intervalo I^i_λ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} b^i_\lambda(x)\, x^l dx = 0$$

para $l = 0, \ldots, N$. $\{I^i_\lambda\}_i$ es una colección de intervalos disjuntos. Son en efecto, las componentes conexas del abierto

$$\{x \in \mathbb{R} : S^*_M(f)(x) > \lambda\}$$

donde, como siempre, tomamos $M > q/p$.

DEMOSTRACION. Consideremos el abierto

$$\{x \in \mathbb{R} : S^*_M(f)(x) > \lambda\}$$

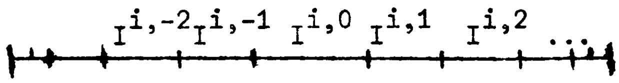
Sea $\{I^i\}$ la familia de sus componentes conexas. Estas son intervalos abiertos acotados ya que para cualquier $\lambda > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R} : S^*_M(f)(x) > \lambda\}| < \infty$$

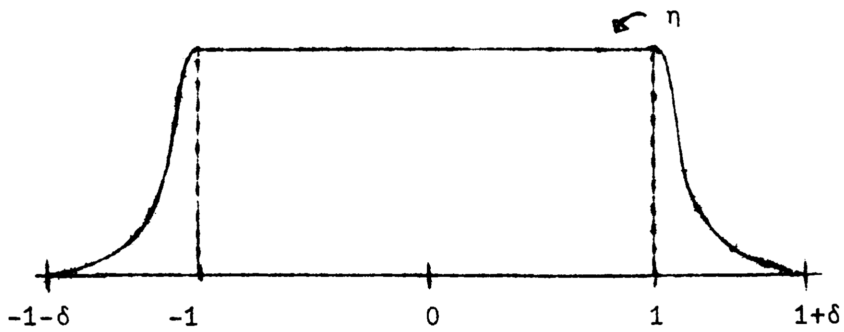
puesto que $S^*_M(f) \in L^q(w(x)\,dx)$ (claramente

$$S^*_M(f)(x) \leq (\text{const})\, f^*(x))$$

En cada I^i efectuamos una descomposición de Whitney muy simple $\{I^{i,j}\}$ dividiendo I^i primero en tres intervalos de igual longitud, partiendo por la mitad los dos intervalos de los extremos y continuando el proceso indefinidamente según muestra la figura



Con esta descomposición de I^i, asociamos también una partición de la unidad de la siguiente forma: Sea η una función $\mathcal{C}^\infty$ con soporte contenido en $[-1-\delta,1+\delta]$ que es constantemente igual a 1 en $[-1,1]$ y que decrece de forma simétrica desde 1 hasta $1+\delta$ y desde -1 hasta $-1-\delta$.

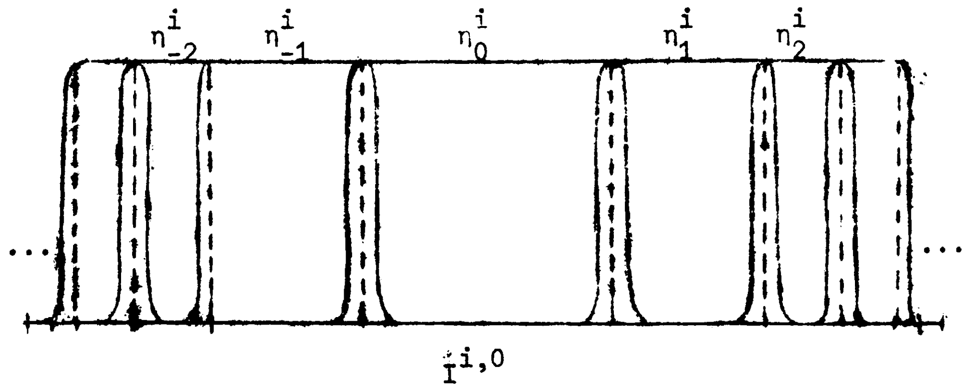


Entonces si α_j^i es el centro de $I^{i,j}$, llamaremos

$$\eta_j^i(t) = \eta(2\,\frac{t-\alpha_j^i}{|I^{i,j}|}) = \eta(\frac{t-\alpha_j^i}{2^{-|j|-1}\,|I^{i,0}|})$$

Si $\delta < 1/2$ ningún punto puede pertenecer a más de dos de los soportes de las η_j^i 's. No sólo eso, sino que además cada punto posee un entorno que corta a los más a dos de dichos soportes. Por consiguiente

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \eta_j^i(t)$$



es una función $\mathcal{C}^\infty$ que es 0 fuera de I^i y tal que para todo $t \in I^i$:

$$1 \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \eta^i_j(t) \leq 2.$$

Sea

$$\phi^i_j(t) = \frac{\eta^i_t(t)}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta^i_k(t)}$$

si $t \in I^i$ y $\phi^i_j(t) = 0$ si $t \notin I^i$.

ϕ^i_j es una función $\mathcal{C}^\infty$ que tiene el mismo soporte que η^i_j. Claramente

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi^i_j(t) = \chi_{I^i}(t)$$

Sea $P^i_j(x)$ el único polinomio de grado N tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - P^i_j(x))\, x^l \phi^i_j(x)\, dx = 0$$

para $l = 0, \ldots, N$. Entonces:

$$f(x) = f(x)\, \chi_{\mathbb{R}-\bigcup_i I^i}(x) + \sum_i f(x)\, \chi_{I^i}(x) =$$

$$= f(x)\, \chi_{\mathbb{R}-\bigcup_i I^i}(x) + \sum_i f(x)\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi^i_j(x)\Big) =$$

$$= f(x)\ \chi_{\mathbb{R}-\bigcup_i I^i}(x) + \sum_i \sum_j P_j^i(x)\phi_j^i(x) +$$

$$+ \sum_i\ \sum_j (f(x) - P_j^i(x))\ \phi_j^i(x).$$

Definimos:

$$g_\lambda(x) = f(x)\,\chi_{\mathbb{R}-\bigcup_i I^i}(x) + \sum_i\ \sum_j P_j^i(x)\ \phi_j^i(x)$$

y, para cada i,

$$b_\lambda^i(x) = \sum_j (f(x) - P_j^i(x))\ \phi_j^i(x)$$

Entonces

$$f(x) = g_\lambda(x) + \sum_i b_\lambda^i(x)$$

en casi todo punto x. El hecho importante es que

$$|P_j^i(x)\ \phi_j^i(x)| \leq (\text{const})\ .\ \lambda$$

donde (const) no depende de i, j ó λ. Si N = 0, $P_j^i(x)$ es tan solo una constante m_j^i tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - m_j^i)\ \phi_j^i(x)\ dx = 0.$$

Asî pues:

$$m_j^i = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \phi_j^i(x)\ dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \phi_j^i(x)\ dx}$$

Ahora bien, en virtud de la definición de $S_M^*(f)(x)$ si elegimos como punto x_0 el extremo de I^i más próximo a $I^{i,j}$, tendremos:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \phi_j^i(x)\, dx\right| \leq$$

$$\leq S_M^*(f)(x_0)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\phi_j^i(u)du+(\mathrm{const})\,|I^{i,j}|^{M+1}\int_{-\infty}^{\infty}|(\phi_j^i)^{(M+1)}(u)|du\right)$$

De la definición **de los** I^{i}'s resulta que

$$S_M^*(f)(x_0) \leq \lambda$$

y por otra parte, puede verse fácilmente (integrando por partes) que para el tipo de funciones ϕ_j^i que estamos considerando:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_j^i(u)du + (\mathrm{const})\,|I^{i,j}|^{M+1}\int_{-\infty}^{\infty}|(\phi_j^i)^{(M+1)}(u)|\, du \leq$$

$$\leq (\mathrm{const})\int_{-\infty}^{\infty}\phi_j^i(u)\, du.$$

En consecuencia:

$$|m_j^i| \leq (\mathrm{const})\, \lambda.$$

Para $N > 0$ la idea es esencialmente la misma. Fijemos $\phi_j^i = \phi$ con soporte I_ϕ y sea $P_j^i = P$ el correspondiente polinomio, definido por las ecuaciones:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f(x) - P(x))\, x^l\, \phi(x)\, dx = 0$$

para $l = 0, \ldots, N$. Por definición,

$$P(x)\ \chi_{I_\phi}(x)$$

es la proyección de la función

$$f(x)\ \chi_{I_\phi}(x)$$

sobre el subespacio de $L^2(\phi(x)\,dx)$ engendrado por las funciones

$$x^l\ \chi_{I_\phi}(x) \quad l = 0, \ldots, N$$

Aplicando a dichas funciones el proceso de ortonormalización de Gramm-Schmidt obtenemos una familia ortonormal

$$\{Q_0(x), \ldots, Q_N(x)\}.$$

Entonces

$$P(x)\ \chi_{I_\phi}(x) = \sum_{k=0}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ Q_k(x)\ \phi(x)\ dx\right) Q_k(x).$$

Teniendo en cuenta que

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ Q_k(x)\ \phi(x)\ dx\right| \leq S_M^*(f)(x_0)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |Q_k(x)\phi(x)|dx +\right.$$

$$\left.+\ |I_\phi|^{M+1} \int_{-\infty}^{\infty} |(Q_k.\phi)^{(M+1)}(x)|dx\right) =$$

$$= S_M^*(f)(x_0)((Q_k.\phi))_{M+1},$$

donde x_0 es el extremo de I^i más próximo a I_ϕ para el que es

$$S_M^*(f)(x_0) \leq \lambda;$$

resulta que:

$$|P(x)|\chi_{I_\phi}(x) \leq \lambda \sum_{k=0}^{N} ((Q_k\cdot\phi))_{M+1} \; |Q_k(x)|$$

Bastará ver que

$$\sum_{k=0}^{N} ((Q_k\cdot\phi))_{M+1} \; |Q_k(x)|$$

está acotada independientemente de ϕ.

Cambiar de ϕ es esencialmente aplicar una traslación y una dilatación de la variable x, es decir, pasar a

$$\psi(x) = \phi(\tfrac{x-\alpha}{\delta}).$$

Esto implica que pasamos de $Q_k(x)$ a

$$\overline{Q}_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, Q_k(\tfrac{x-\alpha}{\delta}) = \sqrt{\delta}\; (Q_k(\cdot - \tfrac{\alpha}{\delta}))_\delta(x).$$

Teniendo en cuenta que $((\;))_{M+1}$ es invariante frente a traslaciones y dilataciones (en la variable y la función) resulta, si llamamos $\overline{P}$ al polinomio correspondiente a ψ y I_ψ al soporte de ψ:

$$|\overline{P}(x)|\chi_{I_\psi}(x) \leq \lambda \sum_{k=0}^{N} ((\overline{Q}_k\cdot\psi))_{M+1}|\overline{Q}_k(x)| =$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{N} ((\sqrt{\delta}(Q_k(\cdot - \tfrac{\alpha}{\delta})\; \phi(\cdot - \tfrac{\alpha}{\delta}))_\delta))_{M+1}|\frac{1}{\sqrt{\delta}}\, Q_k(\tfrac{x-\alpha}{\delta})| =$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{N} ((Q_k\cdot\phi))_{M+1} \; |Q_k(\tfrac{x-\alpha}{\delta})| \leq \lambda \sum_{k=0}^{N} ((Q_k\cdot\phi))_{M+1}||Q_k||_\infty$$

Queda así probado que, en cualquier caso,

$$|P_j^i(x)\ \phi_j^i(x)| \leq (\text{const})$$

independiente de i, j ó λ. Como consecuencia de ésto, se tiene que

$$|b_\lambda^i(x)| \leq (\text{const})\ S_M^*(f)(x),$$

lo que implica, aplicando el teorema de Lebesgue de convergencia dominada, que la suma

$$f(x) = g_\lambda(x) + \sum_i b_\lambda^i(x)$$

es una suma en $L^q(w(x)\,dx)$. Claramente

$$|g_\lambda(x)| \leq (\text{const})\ \lambda$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_\lambda^i(x)\ x^l dx = \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - P_j^i(x))x^l \phi_j^i(x)\ dx = 0$$

Para $l = 0, \ldots, N$.

c.q.d.

Ahora, a partir de este lema, obtenemos una descomposición atómica para funciones buenas en $H^p(w(x)\,dx)$, $0 < p \leq 1$.

<u>TEOREMA II.3.11</u>. <u>Supongamos que</u> $f \in \mathrm{Re}\ L^q(w(x)\,dx)$ <u>es tal que</u> $S_M^*(f) \in L^p(w(x)dx)$ <u>donde</u> $M > q/p$. <u>Entonces existen</u>:

(i) <u>Una sucesión</u> (a_l) <u>de</u> (p,∞)-<u>átomos con rezpecto al peso</u> **w** <u>y</u>

(ii) <u>Una sucesión</u> (λ_l) <u>de números reales con</u>

$$\sum_l |\lambda_l|^p \leq (\text{const}) \int_{-\infty}^{\infty} |S_M^*(f)(x)|^p\, w(x)\, dx$$

<u>tales que</u>

$$f(x) = \sum_l \lambda_l\, a_l(x)$$

<u>en casi todo punto</u> x <u>y también en</u> $L^q(w(x)dx)$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Para cada entero k, consideramos la descomposición de Calderón y Zygmund obtenida en el lema anterior con $N \geq [q_0/p] - 1$ fijo y $\lambda = 2^k$. Sea ésta

$$f(x) = g_k(x) + \sum_i b_k^i(x)$$

que es, como sabemos, una suma puntual y también una suma en $L^q(w(x)\, dx)$. También sabemos que

$$|g_k(x)| \leq (\text{const})\ 2^k;$$

b_k^i tiene soporte contenido en I_k^i una de las componentes conexas del abierto

$$\{x \in \mathbb{R} : S_M^*(f)(x) > 2^k\}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_k^i(x)\, x^l\, dx = 0$$

para $l = 0, \ldots, N$. La idea es ahora combinar todas estas descomposiciones.

Observemos que $g_k(x) \to 0$ en casi todo punto x cuando $k \to -\infty$, ya que

$$|g_k(x)| \leq (\text{const})\ 2^k \to 0$$

cuando $k \to -\infty$. La convergencia es también en $L^q(w(x)\,dx)$ pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_k(x)|^q\ w(x)\ dx \leq$$

$$\leq \int_{\{x\ :\ S_M^*(f)(x)\leq 2^k\}} |f(x)|^q w(x)dx + (\text{const}) 2^{kq} w(\{x\ :\ S_M^*(f)(x) > 2^k\})$$

Ahora bien:

$$\int_{\{x\ :\ S_M^*(f)(x)\leq 2^k\}} |f(x)|^q w(x)\ dx \longrightarrow$$

$$\to \int_{\{x\ :\ S_M^*(f)(x)=0\}} |f(x)|^q w(x)\ dx = 0$$

cuando $k \to -\infty$. (basta aplicar el teorema de convergencia monótona). En cuanto al otro término

$$2^{kq} w(\{x\ :\ S_M^*(f)(x) > 2^k\}) \leq$$

$$\leq 2^{kq}\ \frac{1}{2^{kq}} \int_{-\infty}^{\infty} |S_M^*(f)(x)|^p\ w(x)\ dx =$$

$$= 2^{k(q-p)} \int_{-\infty}^{\infty} |S_M^*(f)(x)|^p\ w(x)\ dx \longrightarrow 0$$

cuando $k \to -\infty$. Por otra parte $g_k(x) \to f(x)$ en casi todo punto x cuando $k \to \infty$. La razón de ésto es que $f(x) - g_k(x)$ vive en el conjunto

$$\{x : S_M^*(f)(x) > 2^k\}$$

y estos conjuntos decrecen hacia

$$\{x : S_M^*(f)(x) = \infty\}$$

que tiene medida 0, cuando $k \to +\infty$.

Esta convergencia también es en $L^q(w(x)\,dx)$, ya que

$$|f(x) - g_k(x)| \leq (\text{const})\ S_M^*(f)(x)$$

que está en $L^q(w(x)\,dx)$, de forma que podemos usar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Del hecho de que $g_k(x) \to 0$ cuando $k \to -\infty$ y $g_k(x) \to f(x)$ cuando $k \to \infty$, en $L^q(w(x)\,dx)$ y en casi todo punto; se deduce que f es la suma de la siguiente serie telescópica en $L^q(w(x)\,dx)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_i b_k^i(x) - \sum_j b_{k+1}^j(x)\Big)$$

Cada intervalo I_{k+1}^i está contenido en uno y sólo uno de los intervalos I_k^i. Así pues:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\sum_i b_k^i(x) - \sum_j b_{k+1}^j(x)) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_i (b_k^i(x) - \sum_{\{j:I_{k+1}^j \subset I_k^i\}} b_{k+1}^i(x)) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_i \beta_k^i(x)$$

donde

$$\beta_k^i(x) = b_k^i(x) - \sum_{\{j \,:\, I_{k+1}^j \subset I_k^i\}} b_{k+1}^j(x)$$

$$\beta_k^i(x) = g_{k+1}(x) - g_k(x)$$

si $x \in I_k^i$ y $\beta_k^i(x) = 0$ si $x \notin I_k^i$. Por lo tanto

$$|\beta_k^i(x)| \leq (\text{const})\ 2^k$$

Definimos

$$a_k^i(x) = \frac{1}{w(I_k^i)^{1/p}(\text{const})\ 2^k}\ \beta_k^i(x)$$

Claramente a_k^i es un (p,∞)-átomo con respecto a w. Resulta pues:

$$f(x) = \sum_k \sum_i \lambda_k^i\, a_k^i(x)$$

con

$$\lambda_k^i = (\text{const})\ 2^k\, w(I_k^i)^{1/p}$$

$$\sum_k \sum_i |\lambda_k^i|^p = \sum_k \sum_i (\text{const})^p\, 2^{kp}\, w(I_k^i) =$$

$$= (\text{const}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kp}\, w(\{x : S_M^*(f)(x) > 2^k\}) =$$

$$= (\text{const}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\, 2^{k(p-1)}\, w(\{x : S_M^*(f)(x) > 2^k\}) \leq$$

$$\leq (\text{const}) \int_0^\infty \lambda^{p-1}\, w(\{x : S_M^*(f)(x) > \lambda\})\, d\lambda$$

ya que

$$\lambda^{p-1}\, w(\{x : S_M^*(f)(x) > \lambda\})$$

es una función decreciente de λ. Por tanto:

$$\sum_k \sum_i |\lambda_k^i|^p \leq (\text{const}) \int_{-\infty}^{\infty} (S_M^*(f)(x))^p\, w(x)\, dx.$$

c.q.d.

Definimos ahora para $f \in \text{Re } L^q(w(x)\,dx)$

$$N_{p,r}(f) = \inf\{(\sum_i |\lambda_i|^p)^{1/p} : f(x) = \sum_i \lambda_i a_i(x) \text{ en } L^q(w(x)\,dx)$$

con los a_i's (p,r)-átomos con respecto a $w\}$.

Si $r_1 < r_2$, todo (p,r_2)-átomo es también un (p,r_1)-átomo; por ello

$$N_{p,r_1}(f) \leq N_{p,r_2}(f)$$

(II.3.1) establece que

$$(N_{p,\infty}(f))^p \leq (\text{const}) \ ||S_M^*(f)||^p_{L^p(w(x)dx)}$$

Hemos extendido así nuestra cadena de indicadores sobre Re $L^q(w(x)\,dx)$ hasta llegar a la siguiente:

$$(N_{p,r}(f))^p < (N_{p,\infty}(f))^p < \ ||S_M^*(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} <$$

$$< \ ||\sigma_M^{**}(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} < \ ||\sigma_\nabla^*(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} <$$

$$< \ ||P_M^{**}(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} < ||P_\nabla^*(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} <$$

$$< ||P_\nabla^*(f+i\tilde{f})||^p_{L^p(w(x)\ dx)} \qquad q_0 < r < \infty .$$

Ahora vamos a cerrar la cadena demostrando que

$$||P_\nabla^*(f + i\tilde{f})||^p_{L^p(w(x)\ dx)} < (N_{p,r}(f))^p.$$

Con ello quedará probado que todos los indicadores de la cadena son equivalentes.

Supongamos que

$$f(x) = \sum_j \lambda_j \ a_j(x)$$

en $L^q(w(x)\ dx)$ con

$$\sum_j |\lambda_j|^p < \infty$$

y a_j (p,r)-átomos con respecto a w. Como la transformación de Hilbert es un operador acotado en $L^q(w(x)\,dx)$, será:

$$\tilde{f}(x) = \sum_j \lambda_j \tilde{a}_j(x)$$

en $L^q(w(x)\,dx)$. Entonces

$$f(x) + i\,\tilde{f}(x) = \sum_j \lambda_j (a_j(x) + i\tilde{a}_j(x))$$

en $L^q(w(x)\,dx)$. Como P_∇^* es también acotado en $L^q(w(x)\,dx)$, tenemos que :

$$P_\nabla^*(f + i\tilde{f})(x) \leq \sum_j |\lambda_j| P_\nabla^*(a_j + i\tilde{a}_j)$$

Así pues:

$$||P_\nabla^*(f+i\tilde{f})||^p_{L^p(w(x)dx)} = \int_{-\infty}^{\infty} (P_\nabla^*(f+i\tilde{f})(x))^p w(x)dx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} (\sum_j |\lambda_j| \; P_\nabla^*(a_j+i\tilde{a}_j)(x))^p \; w(x)\; dx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_j |\lambda_j|^p (P_\nabla^*(a_j+i\tilde{a}_j)(x))^p \; w(x)\; dx =$$

$$= \sum_j |\lambda_j|^p \int_{-\infty}^{\infty} (P_\nabla^*(a_j+i\tilde{a}_j)(x))^p \; w(x)\; dx \leq (\text{const}) \sum_j |\lambda_j|^p$$

en cirtud de (II.3.4). Como esto se cumple para cualquier descomposición

$$f(x) = \sum_j \lambda_j \; a_j(x)$$

con

$$\sum_j |\lambda_j|^p < \infty$$

y los a_j (p,r)-átomos, obtenemos finalmente:

$$||P_\nabla^*(f+i\tilde{f})||^p_{L^p(w(x)dx)} \leq (\text{const}) (N_{p,r}(f))^p$$

que cierra la cadena de indicadores, de forma que ahora podemos escribir:

(II.3.12) $$(N_{p,r}(f))^p \sim (N_{p,\infty}(f))^p \sim ||S_M^*(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} \sim$$

$$\sim ||\sigma_M^{**}(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} \sim ||\sigma_\nabla^*(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} \sim$$

$$\sim ||P_M^{**}(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} \sim ||P_\nabla^*(f)||^p_{L^p(w(x)dx)} \sim$$

$$\sim ||P_\nabla^*(f + i\tilde{f})||^p_{L^p(w(x)\,dx)}$$

Así pues, la compleccíón del espacio determinado sobre Re $L^q(w(x)\,dx)$ por cualquiera de los indicadores equivalentes que aparecen en (II.3.12) es una copia equivalente de $H^p(w(x)\,dx)$.

Observemos que el teorema (II.3.11) da algo más que una descomposición en átomos. En efecto, N puede tomarse arbitrariamente grande, con lo que los átomos que obtenemos tienen tantos momentos nulos como deseemos.

TEOREMA II.3.13. Para $F \in H(\mathbb{R}^2_+)$, espacio de las funciones holomorfas en el semiplano superior y para $0 < p \leq 1$ y $q > q_0$, definimos $N_{p,q}(F)$ como el extremo inferior de todas las sumas

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p\right)^{1/p}$$

correspondientes a todas las descomposiciones

$$F(z) = \sum_j \lambda_j A_j(z)$$

donde

$$\sum_j |\lambda_j|^p < \infty,$$

para cada j

$$A_j(x+it) = (P_t * (a_j+i\tilde{a}_j))(x)$$

donde a_j es un (p,q)-átomo con respecto a w y la convergencia es uniforme sobre subconjuntos compactos. Entonces

$$F \longrightarrow (N_{p,q}(F))^p$$

es un indicador sobre $H(\mathbb{R}^2_+)$, equivalente a

$$F \longrightarrow ||F||^p_{H^p(w(x)dx)} = \sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p w(x)\, dx,$$

de forma que el espacio determinado sobre $H(\mathbb{R}^2_+)$ por el indicador

$$F \longrightarrow (N_{p,q}(F))^p$$

es equivalente a $H^p(w(x)\,dx)$ siendo la equivalencia la identidad.

DEMOSTRACION. Claramente, si

$$F(z) = \sum_j \lambda_j A_j(z)$$

en $H(\mathbb{R}^2_+)$ con

$$\sum_j |\lambda_j|^p < \infty$$

y

$$A_j(x + it) = (P_t * (a_j+i\tilde{a}_j))(x)$$

donde los a_j son (p,q)-átomos; entonces, para cada $t > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+it)|^p w(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \sum_j |\lambda_j|^p |A_j(x+it)|^p w(x)\, dx =$$

$$= \sum_j |\lambda_j|^p \int_{-\infty}^{\infty} |(P_t * (a_j+i\tilde{a}_j))(x)|^p w(x)\, dx \leq$$

$$\leq \sum_j |\lambda_j|^p \int_{-\infty}^{\infty} ((P_\nabla^*(a_j+i\tilde{a}_j))(x))^p\, w(x)\, dx \leq$$

$$\leq (\text{const}) \sum_j |\lambda_j|^p.$$

Por lo tanto $F \in H^p(w(x)\, dx)$ y

$$||F||^p_{H^p(w(x)\, dx)} \leq (\text{const})\, (N_{p,q}(F))^p.$$

Recíprocamente, si $F \in H^p(w(x)\, dx)$, en virtud de (II.1.6), F será el límite en $H^p(w(x)\, dx)$ de una sucesión de funciones $F_k \in \mathfrak{F}^p_N$ (N es arbitrario) con

$$||F_k||_{H^p(w(x)\, dx)} \leq ||F||_{H^p(w(x)\, dx)}$$

Las funciones F_k pueden tomarse de manera que

$$||F_{k+1} - F_k||^p_{H^p(w(x)\, dx)} < 2^{-k}.$$

(II.1.3) implica que también es $F = \lim F_k$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2_+$. Para cada k es

$$F = F_k + \sum_{j=k}^{\infty} (F_{j+1} - F_j).$$

Llamemos f_j a la parte real de la función F_j en el borde. Sabemos que f_j e e Re $L^q(w(x)\ dx)$ y

$$F_j(x+it) = (P_t * (f_j+i\tilde{f}_j))(x).$$

Así pues:

$$F_{j+1}(x+it) - F_j(x+it) = (P_t * (f_{j+1}-f_j+i(\tilde{f}_{j+1}-\tilde{f}_j)))(x).$$

Pero

$$f_{j+1}(x) - f_j(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{jm}\ a_{jm}(x)$$

con

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_{jm}|^p \leqslant (\text{const})\ ||F_{j+1}-F_j||^p_{H^p(w(x)dx)} \leqslant (\text{const})\ 2^{-j}$$

y los a_{jm} son (p,q)-átomos con respecto a w.

La convergencia es en $L^q(w(x)\ dx)$. De la misma forma

$$f_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{km} b_{km}(x)$$

en $L^q(w(x)\ dx)$ con

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\mu_{km}|^p \leqslant (\text{const})||F_k||^p_{H^p(w(x)\ dx)} \leqslant (\text{const})||F||^p_{H^p(w(x)dx)}$$

$$F_k(x+it) = (P_t * (f_k+i\tilde{f}_k))(x) =$$

$$= (P_t * (\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{km} (b_{km} + i\tilde{b}_{km})))(x) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{km}(P_t * (b_{km} + i\tilde{b}_{km}))(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{km}B_{km}(x+it)$$

la convergencia es en $H^p(w(x)\,dx)$ y, por lo mismo, uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2_+$.

$$F_{j+1}(x+it)-F_j(x+it) = (P_t * (f_{j+1}-f_j+i(\tilde{f}_{j+1}-\tilde{f}_j)))(x) =$$

$$= (P_t * (\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{jm}(a_{jm}+i\tilde{a}_{jm})))(x) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{jm}(P_t * (a_{jm} + i\tilde{a}_{jm}))(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{jm}A_{jm}(x+it)$$

también uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2_+$. Así, finalmente

$$F(z) = F_k(z) + \sum_{j=k}^{\infty} (F_{j+1}(z) - F_j(z)) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{km}B_{km}(z) + \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{jm} A_{jm}(z)$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos y

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\mu_{km}|^p + \sum_{j=k}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_{jm}|^p \leq (\text{const})(||F||^p_{H^p(w(x)dx)} + \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j}) \leq$$

$$\leq (\text{const}) (||F||^p_{H^p(w(x)dx)} + 2^{-k}).$$

Esto implica que

$$(N_{p,q}(F))^p \leq (\text{const}) ||F||^p_{H^p(w(x)\,dx)}.$$

Así concluye la demostración de (II.3.13) que es una caracterización completa de $H^p(w(x)\,dx)$ mediante átomos.

c.q.d.

§4. ESPACIOS DUALES

Dado $H^p(w(x)\,dx)$, podemos considerar su espacio dual $(H^p(w(x)dx))^*$, definido como el conjunto de todos los funcionales lineales

$$\Lambda : H^p(w(x)\,dx) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que son continuos. Claramente Λ es continuo si y sólo si existe una constante C tal que

$$|\Lambda(F)| \leq C||F||_{H^p(w(x)\,dx)}$$

para cada $F \in H^p(w(x)\,dx)$. Si para $\Lambda \in (H^p(w(x)\,dx))^*$ definimos:

$$||\Lambda|| = \inf\{C : |\Lambda(F)| \leq C\,||F||_{H^p(w(x)\,dx)} \text{ para cada } F \in H^p(w(x)\,dx)\} = \sup_{F\neq 0} \frac{|\Lambda(F)|}{||F||_{H^p(w(x)\,dx)}} =$$

$$= \sup_{||F||_{H^p(w(x)dx)}=1} |\Lambda(F)|,$$

es claro que $\Lambda \longrightarrow ||\Lambda||$ es una norma sobre el espacio vectorial $(H^p(w(x)dx))^*$. Además $(H^p(w(x)\,dx))^*$ con esta norma es completo, es decir, es un espacio de Banach.

La caracterización de $H^p(w(x)\,dx)$ como complección del espacio determinado sobre Re $L^q(w(x)\,dx)$ por el indicador

$$f \longrightarrow (N_{p,r}(f))^p$$

nos va a proporcionar una caracterización del dual.

Dado un intervalo I y r tal que $q_0 < r < \infty$, consideramos Re $L^r(I,w(x)dx)$, es decir: el espacio de todas las funciones reales $L^r(w(x)\,dx)$ que viven en I. Luego, para un entero positivo N que en nuestro caso va a ser $|q_0/p| - 1$, consideramos el subespacio

$$|\mathrm{Re}\ L^r(I,w(x)\,dx)|_N$$

formado por todas las funciones f en Re $L^r(I,w(x)\,dx)$ tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,x^l\,dx = 0$$

para $l = 0, \ldots, N$. Para $f \in |\mathrm{Re}\ L^r(I,w(x)\,dx)|_N$,

$$F(x+it) = (P_t * (f+i\tilde{f}))(x)$$

está en $H^p(w(x)\,dx)$ con

$$||F||_{H^p(w(x)dx)} \leq (\mathrm{const})\ N_{p,r}(f).$$

Pero

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{w(I)}\int_I |f(x)|^r\,w(x)\,dx\right)^{1/r}} \cdot \frac{1}{w(I)^{1/p}}\,f(x)$$

es un (p,r)-átomo, de forma que

$$N_{p,r}(f) \leq \left(\frac{1}{w(I)}\int_I |f(x)|^r w(x)dx\right)^{1/r} w(I)^{1/p}$$

Así pues

$$||F||_{H^p(w(x)dx)} \leq (\mathrm{const})\left(\frac{1}{w(I)}\int_I |f(x)|^r w(x)dx\right)^{1/r} w(I)^{1/p}$$

Supongamos ahora que $\Lambda \in (H^p(w(x)\,dx))^*$. Podemos definir un funcional lineal Λ_I sobre $|\text{Re } L^r(I,w(x)\,dx)|_N$ haciendo $\Lambda_I(f) = \Lambda(F)$

$$|\Lambda_I(f)| = |\Lambda(F)| \leq ||\Lambda||\ ||F||_{H^p(w(x)\,dx)} \leq$$

$$\leq (\text{const})\ ||\Lambda||\,w(I)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int_I |f(x)|^r\, w(x)\,dx\right)^{1/r}$$

Vemos que Λ_I es un funcional lineal sobre el subespacio

$$|\text{Re } L^r(I;w(x)\,dx)|_N \subset \text{Re } L^r(I;w(x)\,dx),$$

que es continuo. El teorema de Hahn-Banach permite extender Λ_I a un funcional lineal acotado Λ_I' sobre todo el espacio $\text{Re } L^r(I;w(x)\,dx)$. En virtud del teorema de representación de Riesz, existirá una función $b_I \in \text{Re } L^{r'}(I;w(x)\,dx)$ con $r' = \frac{r}{r-1}$ tal que para toda $g \in \text{Re } L^r(I;w(x)\,dx)$:

$$\Lambda_I'(g) = \int_I g(x)\, b_I(x)\, w(x)\,dx.$$

En particular:

(II.4.1): para cualquier $f \in |\text{Re } L^r(I;w(x)\,dx)|_N$ tenemos

$$\Lambda_I(f) = \int_I f(x)\, b_I(x)\, w(x)\,dx.$$

Si $p(x)$ es un polinomio de grado N,

$$b_I(x) + \frac{p(x)}{w(x)}\bigg|_I$$

es otra función en $\text{Re } L^{r'}(I;w(x)\,dx)$ que cumple (II.4.1). En efecto, la condición A_r para w implica que

$$\frac{1}{w(x)}\bigg|_I$$

está en Re $L^{r'}(I;w(x)\,dx)$ y por lo tanto

$$\left.\frac{p(x)}{w(x)}\right|_I$$

está también en Re $L^{r'}(I;w(x)\,dx)$. Para $f \in |\text{Re } L^r(I;w(x)\,dx)|_N$ tenemos:

$$\int_I f(x)(b_I(x) + \frac{p(x)}{w(x)})\, w(x)\, dx =$$

$$= \int_I f(x)\, b_I(x)\, w(x)\, dx + \int_I f(x)\, p(x)\, dx =$$

$$= \int_I f(x)\, b_I(x)\, w(x)\, dx = \Lambda_I(f)$$

No sólo ésto, sino que, recíprocamente cualquier fucnión $h \in$ Re $L^{r'}(I;w(x)\,dx)$ que cumpla (II.4.1) es necesariamente de la forma

$$\left. b_I(x) + \frac{p(x)}{w(x)}\right|_I$$

para algún polinomio $p(x)$ de grado N. Esto es consecuencia de la reflexividad del espacio Re $L^r(I;w(x)\,dx)$ y del teorema de Hahn-Banach. En efecto si $h \in$ Re $L^{r'}(I;w(x)\,dx)$ y cumple (II.4.1), entonces para cualquier $f \in |\text{Re}L^r(I;w(x)dx)|_N$:

$$\int_I f(x)(b_I(x) - h(x))w(x)\, dx = 0$$

Consideremos en Re $L^{r'}(I;w(x)\,dx)$ el subespacio engendrado por las funciones

$$\left.\frac{x^l}{w(x)}\right|_I ;\ l = 0, \ldots, N$$

Si $b_I(x) - h(x)$ no está en este subespacio que es cerrado, ya que tiene dimensión finita, entonces el teorema de Hahn-Banach implica que existe

$$f \in \mathrm{Re}\, L^r(I;w(x)dx) = (\mathrm{Re}L^{r'}(I;w(x)dx))^*$$

tal que

$$\int_I f(x) \frac{x^l}{w(x)} w(x)\, dx = 0$$

para $l = 0, \ldots, N$, pero

$$\int_I f(x)(b_I(x)-h(x))w(x)dx \neq 0,$$

lo que constituye una contradicción.

Supongamos ahora que tenemos dos intervalos $I_1 \subset I_2$. Podemos considerar entonces,

$$L^r(I_1;w(x)\, dx) \subset L^r(I_2;w(x)\, dx)$$

Así pues, Λ_{I_2} se puede restringir a $|\mathrm{Re}\ L^r(I_1;w(x)\, dx)|_N$.

Sean b_{I_1} y b_{I_2} funciones que representan respectivamente a los funcionales Λ_{I_1} y Λ_{I_2}. Entonces para $f \in |\mathrm{Re}L^r(I_1;w(x)\, dx)|_N$,

$$\Lambda_{I_1}(f) = \Lambda_{I_2}(f) = \Lambda(F)$$

es decir:

$$\int_{I_1} f(x)\, b_{I_1}(x)\, w(x)\, dx = \int_{I_1} f(x)\, b_{I_2}(x)\, w(x)\, dx.$$

Esto implica, como anteriormente, que existe un polinomio $p(x)$ de grado N tal que para $x \in I_1$,

$$b_{I_1}(x)\, w(x) - b_{I_2}(x)\, w(x) = p(x)$$

Teniendo en cuenta que la recta real es unión de una sucesión creciente de intervalos $\{I_n\}$, podemos encontrar una sucesión de funciones $\{b_n\}$ tales que $b_n \in \mathrm{Re}\, L^{r'}(I_n; w(x)\, dx)$ y b_n representa al funcional Λ_{I_n} y podemos hacer que sea $b_{n+1}\big|_{I_n} = b_n$ para todo n seleccionando adecuadamente los polinomios en cada uno de los pasos.

Hemos probado así el siguiente resultado:

TEOREMA II.4.2. *Sea* $\Lambda \in (H^p(w(x)\, dx))^*$ *y* $q_0 < r < \infty$. *Existe una función* b *localmente en* $\mathrm{Re}\, L^{r'}(w(x)\, dx)$ *tal que para cualquier función* $f \in |\mathrm{Re}\, L^r(I; w(x)dx)|_{\left|\frac{q_0}{p}\right|-1}$ *para algún intervalo* I, *si llamamos*

$$F(x + it) = (P_t * (f + i\tilde{f}))(x)$$

tenemos:

$$\Lambda(F) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, b(x)\, w(x)\, dx.$$

Cualesquiera dos funciones que satisfagan esta condición difieren en $p(x)/w(x)$ *donde* p(x) *es un polinomio de grado* $\left|\frac{q_0}{p}\right| - 1$.

Para caracterizar $(H^p(w(x)\, dx))^*$ asignaremos a Λ la función $l(x) = b(x)\, w(x)$ en lugar de $b(x)$.

El problema es ahora determinar qué funciones $l(x)$ corresponden a funcionales $\Lambda \in (H^p(w(x)\, dx))^*$. Supongamos que $l(x)$ es una función tal que $l(x)/w(x)$ está localmente en $\mathrm{Re}\, L^{r'}(w(x)\, dx)$, $q_0 < r < \infty$ y l corresponde a un funcional $\Lambda \in (H^p(w(x)\, dx))^*$ en el sentido de que para cualquier $f \in |\mathrm{Re} L^r(I; w(x)dx)|_{\left|\frac{q_0}{p}\right|-1}$ para algún I;

$$\Lambda(F) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, l(x)\, dx,$$

donde

$$F(x+it) = (P_t * (f+i\tilde{f}))(x)$$

Sabemos entonces que para cualquier f e $|ReL^r(I;w(x)dx)|_{\left|\frac{q_0}{p}\right|}^{1}$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)l(x)\, dx\right| = |\Lambda(F)| \leqslant ||\Lambda||\ ||F||_{H^p(w(x)\, dx)} \leqslant$$

$$\leqslant (\text{const})\ w(I)^{1/p}\left(\frac{1}{w(I)}\int_I |f(x)|^r\, w(x)\, dx\right)^{1/r}||\Lambda||$$

En particular si $f(x) = a(x)$, (p,s)-átomo con soporte contenido en I y $r \leqslant s \leqslant \infty$

$$\left|\int_I a(x)\, l(x)\, dx\right| \leqslant (\text{const})\ ||\Lambda|| \tag{II.4.3}$$

Si g es una función localmente integrable e I un intervalo, llamaremos $P_I(g)$ al único polinomio de grado N tal que

$$\int_I (g(x) - P_I(g)(x))\, x^k\, dx = 0 \quad \text{para} \quad k = 0, \ldots, N$$

Si $N = 0$, $P_I(g)$ es sencillamente la media

$$\frac{1}{|I|}\int_I g(x)\, dx.$$

En general se tiene:

<u>LEMA II.4.4</u>. Para x e I,

$$|P_I(g)(x)| \leqslant \frac{(\text{const})}{|I|}\int_I |g(x)|\, dx$$

donde (const) depende tan sólo de N y no de g o de I.

DEMOSTRACION. Veamos primero que basta demostrar (II.4.4) para $I = [-1,1]$.
Ante todo, podemos suponer que nuestro intervalo está centrado en 0, puesto que si C_I es el centro de I,

$$\int_I (g(x) - P_I(g)(x))\, x^k\, dx = 0$$

para k = 0, ..., N, implica que

$$\int_{I-C_I} (g(C_I+y) - P_I(g)(C_I+y))(C_I+y)^k\, dy = 0$$

para k = 0, ..., N lo que equivale a

√

$$\int_{I-C_I} (g(C_I+y) - P_I(g)(C_I+y))y^k\, dy = 0$$

para k = 0, ..., N de donde se deduce que

$$P_{I-C_I}(g(C_I+\circ))(y) = P_I(g)(C_I+y).$$

Así pues si tuviéramos (II.4.4) para intervalos centrados en 0, tendríamos también para cualquier intervalo I y $x \in I$,

$$|P_I(g)(x)| = |P_{I-C_I}(g(C_I+\circ))(x-C_I)| \leq$$

$$\leq \frac{(\text{const})}{|I-C_I|} \int_{I-C_I} |g(C_I+y)|\, dy = \frac{(\text{const})}{|I|} \int_I |g(t)|\,dt.$$

Ahora, para un intervalo J centrado en 0

$$\int_J (g(x) - P_J(g)(x))\, x^k\, dx = 0$$

para $k = 0, \ldots, N$ implica

$$\int_{\delta J} (g(\tfrac{y}{\delta}) - P_J(g)(\tfrac{y}{\delta}))(\tfrac{y}{\delta})^k \frac{1}{\delta}\, dy = 0$$

para $k = 0, \ldots, N \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\delta J} (\frac{1}{\delta} g(\tfrac{y}{\delta}) - \frac{1}{\delta} P_J(g)(\tfrac{y}{\delta}))\, y^k\, dy = 0,\ k = 0, \ldots, N$$

Es decir, para J centrado en 0

$$P_{\delta J}(g_\delta) = (P_J(g))_\delta$$

Sea I centrado en 0 y $J = [-1,1]$ y $\delta = |I|/2$ de forma que $I = \delta J$. Entonces:

$$P_I(f) = (P_{[-1,1]}(f_{2/|I|}))_{|I|/2}$$

Por lo tanto, una vez que demostremos que

$$\text{(II.4.5)} \qquad |P_{[-1,1]}(g)(y)| \leq (\text{const}) \int_{-1}^{1} |g(t)|\,dt$$

para $y \in [-1,1]$, tendremos también, tendremos también, para $x \in I$:

$$|P_I(f)(x)| = |(P_{[-1,1]}(f_{2/|I|}))_{|I|/2}(x)| =$$

$$= \frac{2}{|I|} |P_{[-1,1]}(f_{2/|I|})(\frac{x}{|I|/2})| \leq$$

$$\leq (\text{const}) \frac{2}{|I|} \int_{-1}^{1} |f_{2/|I|}(t)|\, dt =$$

$$= (\text{const}) \frac{2}{|I|} \int_I |f(t)|dt = (\text{const}) \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)|dt.$$

Así pues, necesitamos solamente demostrar (II.4.5). Pero

$$P_{[-1,1]}(g)(y) = \sum_{i=0}^{N} \left(\int_{-1}^{1} g(x)\, P_i(x)\, dx\right) P_i(x)$$

donde $\{P_i\}$ es una base ortonormal del subespacio de $L^2([-1,1])$ engendrada por $\{1, x, \ldots, x^N\}$. Vemos que, para $y \in [-1,1]$

$$|P_{[-1,1]}(g)(y)| \leq (\text{const}) \int_{-1}^{1} |g(t)|\, dt.$$

c.q.d.

<u>COROLARIO II.4.6</u>. <u>Para</u> $x \in I$:

$$|P_I(g)(x)| \leq (\text{const})\, g^*(x)$$

<u>donde</u> (const) <u>depende sólo de</u> N <u>y no de</u> g <u>o de</u> I.

<u>COROLARIO II.4.7</u>. <u>La aplicación definida como</u>

$$g \longmapsto P_I(g)\Big|_I$$

<u>es un operador acotado en</u> Re $L^s(I;w(x)\,dx)$ <u>para</u> $s > q_0$ <u>con norma acotada independientemente de</u> I.

<u>COROLARIO II.4.8</u>. <u>Si</u> g <u>está localmente en</u> Re $L^s(w(x)\,dx)$ <u>con</u> $s > q_0$ <u>entonces para</u> $x \in I$

$$|P_I(g)(x)| \leq (\text{const}) \left(\frac{1}{w(I)} \int_I |g(x)|^s\, w(x)\, dx\right)^{1/s}$$

<u>si</u> $s < \infty$ <u>y</u>

$$|P_I(g)(x)| \leq (\text{const}) \sup_{y \in I} |g(y)|$$

si $s = \infty$; donde (const) depende solo de N y no de g o de I.

Esto es algo más fuerte que (II.4.7).

DEMOSTRACION. (II.4.8) es consecuencia inmediata de (II.4.4) y (I.5).

c.q.d.

Volvamos a nuestra función l que representa a un funcional lineal $\Lambda \in (H^p(w(x)\,dx))^*$. Como $1/w$ está localmente en $L^{r'}(w(x)\,dx)$; l es localmente integrable (En efecto $1/w$ localmente en $L^{r'}(w(x)\,dx) \Rightarrow$ l localmente en $L^{r'}(w(x)^{-1/(r-1)}\,dx)$ y, puesto que $w(x)^{-1/(r-1)}$ cumple la condición $A_{r'}$, (I.5) implica que l es localmente integrable).

Así pues, podemos considerar $P_I(l)$. (II.4.3) implica:

$$\left|\int_I a(x)\,(l(x) - P_I(l)(x))\,dx\right| \leq (\text{const})\ ||\Lambda||$$

que puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\text{(II.4.9)} \qquad \left|\int_I a(x)\,\frac{l(x) - P_I(l)(x)}{w(x)}\,\frac{w(x)dx}{w(I)}\right| \leq (\text{const})\ ||\Lambda||\ w(I)^{-1}$$

Para el átomo a:

$$\left(\int_I |a(x)|^s\,\frac{w(x)\,dx}{w(I)}\right)^{1/s} \leq \frac{1}{w(I)^{1/p}}$$

si $s < \infty$ o bien

$$|a(x)| \leq \frac{1}{w(I)^{1/p}} \qquad \text{si } s = \infty.$$

Así pues

$$\left(\int_I |w(I)^{1/p}\, a(x)|^s \frac{w(x)\,dx}{w(I)}\right)^{1/s} \leq 1,$$

si $s < \infty$, o

$$||w(I)^{1/p}\, a||_\infty \leq 1$$

si $s = \infty$. (II.4.9) implica:

$$\text{(II.4.10)} \qquad \left|\int_I w(I)^{1/p}\, a(x) \frac{1(x) - P_I(1)(x)}{w(x)} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right| \leq$$

$$\leq (\text{const})\ ||\Lambda||\ w(I)^{\frac{1}{p} - 1} .$$

Ahora, dada una función f que vive en I tal que

$$\left(\int_I |f(x)|^s \frac{w(x)\,dx}{w(I)}\right)^{1/s} \leq 1$$

si $s < \infty$, ô $||f||_\infty \leq 1$ si $s = \infty$, consideremos

$$b(x) = \frac{1}{w(I)^{1/p}} (f(x) - P_I(f)(x))$$

si $x \in I$ y $b(x) = 0$ si $x \notin I$. Claramente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(x)\, x^k\, dx = 0$$

para $k = 0, \ldots, N$ y también

$$\left(\frac{1}{w(I)} \int_I |b(x)|^s\, w(x)\, dx\right)^{1/s} \leq$$

$$\leq \frac{1}{w(I)^{1/p}} \left\{\left(\int_I |f(x)|^s \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s} + \left(\int_I |P_I(f)(x)|^s \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{(\text{const})}{w(I)^{1/p}}$$

si $s < \infty$ y

$$||b||_\infty \leq \frac{(\text{const})}{w(I)^{1/p}}$$

si $s = \infty$. Por lo tanto

$$a(x) = (\text{const})b(x) = \frac{(\text{const})}{w(I)^{1/p}} (f(x)-P_I(f)(x))\, \chi_I(x)$$

es un (p,s)-átomo con respecto a w. Entonces (II.4.10) implica:

(II.4.11) $$\left|\int_I f(x) \frac{l(x) - P_I(l)(x)}{w(x)} \frac{w(x)\,dx}{w(I)}\right| =$$

$$= \left|\int_I (f(x) - P_I(f)(x)) \frac{l(x) - P_I(l)(x)}{w(x)} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right| =$$

$$= (\text{const}) \left|\int_I w(I)^{1/p}\, a(x) \frac{l(x)-P_I(l)(x)}{w(x)} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right| \leq$$

$$\leq (\text{const})\, ||\Lambda||\, w(I)^{\frac{1}{p} - 1}.$$

Como $f(x)$ es una función arbitraria tal que

$$\left(\int_I |f(x)|^s \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s} \leq 1$$

si $s < \infty$ o bien $||f||_\infty \leq 1$ si $s = \infty$, tendremos:

(II.4.12) $$\left(\int_I \left|\frac{l(x) - P_I(l)(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} \leq$$

$$\leq (\text{const})||\Lambda||\, w(I)^{\frac{1}{p} - 1}.$$

De esta forma, a cada funcional $\Lambda \in (H^p(w(x)\,dx))^*$ le hemos asignado una función l que cumple (II.4.12). Naturalmente la función l está determinada a menos de la adición de un polinomio de grado N.

Recíprocamente cada función l para la que exista una constante C tal que para cada intervalo I sea

$$(\int_I \left|\frac{l(x) - P_I(l)(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)})^{1/s'} \leq C\, w(I)^{\frac{1}{p}-1} \qquad \text{(II.4.13)}$$

cumplirá, para cada (p,s)-átomo a:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, l(x)\, dx\right| \leq (\text{const})\, C$$

donde (const) no depende de a. Si $f \in \mathrm{Re}\, L^s(w(x)\,dx)$ es tal que

$$N_{p,s}(f) < \infty \text{ y } f(x) = \sum_i \lambda_i\, a_i(x)$$

donde los a_i 's son (p,s)-átomos y

$$\sum_i |\lambda_i|^p < \infty,$$

entonces:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, l(x)\, dx\right| = \left|\sum_i \lambda_i \int_{-\infty}^{\infty} a_i(x)\, l(x)\, dx\right| \leq$$

$$\leq \sum_i |\lambda_i| \left|\int_{-\infty}^{\infty} a_i(x)\, l(x)\, dx\right| \leq (\text{const})\, C \sum_i |\lambda_i| \leq$$

$$\leq (\text{const})\, C\, (\sum_i |\lambda_i|^p)^{1/p}$$

Así pues

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ l(x)\ dx\right| \leq (\text{const})\ C\ N_{p,s}(f)$$

A f podemos asociarle

$$F(x + it) = (P_t * (f + i\tilde{f}))(x)$$

que será una función en $H^p(w(x)\ dx)$ con

$$||F||_{H^p(w(x)\ dx)} \sim N_{p,s}(f)$$

y la correspondencia es uno a uno. El subespacio de $H^p(w(x)\ dx)$ que obtenemos de esta forma, es denso. En él definimos un funcional Λ haciendo

$$\Lambda(F) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ l(x)\ dx.$$

Tenemos entonces:

$$|\Lambda(F)| \leq (\text{const})\ C\ ||F||_{H^p(w(x)\ dx)}.$$

Así pues, Λ puede extenderse de forma única a todo el espacio $H^p(w(x)\ dx)$ y

$$||\Lambda|| \leq (\text{const}) \inf \{C : \text{para cada } I;$$

$$\left(\int_I \left|\frac{l(x)-P_I(l)(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} \leq C\ w(I)^{\frac{1}{p}-1}\}$$

De esta forma, hemos establecido una equivalencia de espacios normados entre $(H^p(w(x)\ dx))^*$ y el espacio

$$\Lambda^{s'}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)\ dx)$$

de las clases de equivalencia [1] de funciones módulo polinomios de grado N = $= |\frac{q_0}{p}| - 1$ para las cuales existe una constante C tal que para cada intervalo I:

$$\left(\int_I \left|\frac{l(x) - P_I(l)(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} \leq C\, w(I)^{\frac{1}{p} - 1}$$

con la norma dada por el extremo inferior de tales C's. s' tiene que ser tal que $1 \leq s' \leq q_0'$. Para s' = 1 obtenemos una condición muy simple:

$$\frac{1}{w(I)} \int_I |l(x) - P_I(l)(x)|\, dx \leq C\, w(I)^{\frac{1}{p} - 1}$$

Para p = 1 y w en la clase A_2 (es decir $q_0 < 2$ de forma que $N = |q_0| - 1 = 0$) obtenemos el espacio de funciones de oscilación acotada en media con peso w: O.A.M (w(x)dx). Este espacio ha sido estudiado por Muckenhoupt y Wheeden en [12] donde le llaman B.M.O. (w(x) dx) que es la correspondiente sigla en inglés.

Este espacio puede ser definido por la condición

$$\frac{1}{w(I)} \int_I |l(x) - m_I(l)|\, dx \leq C$$

o cualquiera de las condiciones equivalentes para $1 < s' < q_0'$:

$$\left(\int_I \left|\frac{l(x) - m_I(l)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} \leq C$$

La equivalencia entre todas estas caracterizaciones de O.A.M.(w(x)dx) es una generalización del famoso resultado de John y Niremberg ([9]) sobre la caracterización de O.A.M.(dx). Esta equivalencia ha sido demostrada directamente por Muckenhoupt y Wheeden en [12].

Nosotros obtenemos, en general, la equivalencia de las condiciones

$$\left(\int_I \left|\frac{l(x) - P_I(l)(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} \leq C\, w(I)^{\frac{1}{p} - 1}$$

para p fijo ≤ 1 y cualquier s', $1 \leq s' < q_0'$. Observemos que $[1]$ e $\Lambda^{s'}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)dx)$ si y sólo si existe una constante C tal que para cada intervalo I, existe un polinomio Q_I de grado $N = |\frac{q_0}{p}| - 1$ tal que:

$$(\text{II.4.14}) \qquad \left(\int_I \left|\frac{l(x) - Q_I(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} \leq C\, w(I)^{\frac{1}{p}-1}$$

y el extremo inferior de dichas C's proporciona una norma equivalente a la original.

Consideremos primero el caso $s' = 1$. Si se cumple (II.4.14), entonces

$$\frac{1}{w(I)} \int_I |l(x) - P_I(l)(x)|dx \leq \frac{1}{w(I)} \left(\int_I |l(x) - Q_I(x)|\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_I |Q_I(x) - P_I(l)(x)|\, dx\right)$$

Pero

$$\int_I |Q_I(x) - P_I(l)(x)|dx = \int_I |P_I(Q_I\chi_I)(x) - P_I(l\chi_I)(x)|\, dx =$$

$$= \int_I |P_I(Q_I\chi_I - l\chi_I)(x)|\, dx \leq \int_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I |Q_I(x) - l(x)|dx\right)dy =$$

$$= \int_I |Q_I(x) - l(x)|\, dx$$

Así pues:

$$\frac{1}{w(I)} \int_I |l(x) - P_I(l)(x)|dx \leq \frac{2}{w(I)} \int_I |l(x)-Q_I(x)|dx \leq$$

$$\leq 2\, C\, w(I)^{\frac{1}{p}-1}$$

que es (II.4.13) para este caso particular. El recíproco es trivial.

Sea ahora $s' > 1$. Entonces si se cumple (II.4.14), se tendrá:

$$\left(\int_I \left|\frac{1(x) - P_I(1)(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} \leq$$

$$\leq \left(\int_I \left|\frac{1(x) - Q_I(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} +$$

$$+ \left(\int_I \left|\frac{Q_I(x) - P_I(1)(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'}$$

Pero

$$\left(\int_I \left|\frac{Q_I(x) - P_I(1)(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} =$$

$$= \left(\int_I \left|\frac{P_I(Q_I\chi_I)(x) - P_I(1\chi_I)(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} =$$

$$= \left(\frac{1}{w(I)} \int_I |P_I(Q_I\chi_I - 1\chi_I)(x)|^{s'} w(x)^{-\frac{1}{s-1}} dx\right)^{\frac{1}{s'}} \leq$$

$$\leq (\text{const})\left(\frac{1}{w(I)} \int_I |Q_I(x) - 1(x)|^{s'} w(x)^{-\frac{1}{s-1}} dx\right)^{\frac{1}{s'}}$$

en virtud de (II.4.7) aplicado al peso $w(x)^{-\frac{1}{s-1}}$ que cumple la condición $A_{s'}$. Así

$$\left(\int_I \left|\frac{Q_I(x) - P_I(1)(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} \leq$$

$$\leq (\text{const})\left(\int_I \left|\frac{1(x) - Q_I(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'}$$

Por lo tanto

$$\left(\int_I \left|\frac{l(x) - P_I(l)(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} \leq$$

$$\leq (\text{const})\left(\int_I \left|\frac{l(x) - Q_I(x)}{w(x)}\right|^{s'} \frac{w(x)dx}{w(I)}\right)^{1/s'} \leq$$

$$\leq (\text{const})\ C\ w(I)^{\frac{1}{p} - 1}$$

donde (const) no depende ni de I ni de l. Es decir:

$$[l] \in \Lambda^{s'}_{\frac{1}{p} - 1} (w(x)\ dx)$$

con una norma dominada por el extremo inferior de las C's multiplicado por una constante. El recíproco es trivial.

CAPITULO III

OTROS ESPACIOS H^p ASOCIADOS A UN PESO

§1. EL ESPACIO $\mathfrak{H}^1(w(x)\,dx)$

Para un peso de Muckenhoupt w(x) con exponente crítico $q_0 < 2$, que es el caso más simple posible, se definió un (1,q)-átomo con respecto a w como una función a, con soporte contenido en un intervalo I que cumple las condiciones:

(i)

$$\left(\frac{1}{w(I)}\int_I |a(x)|^q\, w(x)\, dx\right)^{1/q} \leq \frac{1}{w(I)}$$

si $q < \infty$, o bien

$$|a(x)| \leq \frac{1}{w(I)} \quad \text{si } q = \infty .$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, dx = 0$$

Estos átomos eran los bloques elementales a partir de los cuales podíamos construir cualquier $F \in H^1(w(x)\,dx)$.

Podemos pensar en otro tipo de átomos en cuya definición la condición (ii) se sustituye por

(ii)'

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, w(x)\, dx = 0.$$

Los llamaremos átomos de tipo homogéneo (t.h.) con respecto a $w(x)$. Son los átomos naturales para el espacio de tipo homogéneo obtenido en la recta mediante la métrica $d(x,y) = w(I)$ donde I es el intervalo más pequeño que contiene a x y a y, y la medida $w(x)\,dx$ (véase [4]). Observemos que para la definición de los átomos en $H^1(w(x)\,dx)$ debíamos tomar $q > q_0$ mientras que para los átomos de t.h. ya no es necesaria esta restricción.

Definimos $\mathfrak{H}^1_q(w(x)\,dx)$ como el espacio de todas las funciones $f(x)$ que admiten una descomposición

$$f(x) = \sum_i \lambda_i a_i(x)$$

siendo los a_i $(1,q)$-átomos de t.h. con respecto a w y

$$\sum_i |\lambda_i| < \infty .$$

Es claro que $\mathfrak{H}^1_q(w(x)\,dx)$ es un subespacio vectorial de $L^1(w(x)\,dx)$. En $\mathfrak{H}^1_q(w(x)\,dx)$ damos la norma

$$N^1_q(f) = \inf \{\sum_i |\lambda_i|\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las descomposiciones de f en $(1,q)$-átomos de t.h. Se demuestra que todos los espacios $\mathfrak{H}^1_q(w(x)\,dx)$ coinciden y las normas N^1_q son equivalentes, ya que esto sucede en cualquier espacio de tipo homogéneo. Véase [10].

En nuestro caso no necesitamos recurrir a ese resultado general, ya que disponemos de una equivalencia directa entre cada $\mathfrak{H}^1_q(w(x)\,dx)$ y $H^1(\mathbb{R})$. De hecho, para definir $\mathfrak{H}^1_q(w(x)\,dx)$ no necesitamos que $w(x)$ sea un peso de Muckenhoupt. Basta que sea localmente integrable y > 0 en c.t. punto. Si esto ocurre, tenemos, en efecto, el siguiente resultado:

TEOREMA III.1.1. Sea $W(x)$ una primitiva de $w(x)$ y sea $B(x)$ la inversa de $W(x)$. Entonces la aplicación

$$f(x) \longrightarrow f(B(y))$$

es una equivalencia entre $\mathcal{H}^1_q(w(x)\,dx)$ y $H^1(\mathbb{R})$, el espacio de Hardy ordinario en la recta.

DEMOSTRACION. Como $(W.B)(y) = y$, tendremos

$$W'(B(y))\, B'(y) = w(B(y))\, B'(y) = 1.$$

Supongamos que a cumple (i) y (ii)'

$$\int_I |a(x)|^q w(x)\, dx = \int_{W(I)} |a(B(y))|^q w(B(y))B'(y)\, dy =$$

$$= \int_{W(I)} |a(B(y))|^q\, dy$$

y

$$w(I) = \int_I w(x)\, dx = \int_{W(I)} w(B(y))\, B'(y)\, dy =$$

$$= \int_{W(I)} dy = |W(I)|.$$

También

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, w(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} a(B(y))w(B(y))B'(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} a(B(y))dy$$

Así pues a cumple (i) y (ii)' si y sólo si $a(B(y))$ es un $(1,q)$-átomo con respecto a la medida de Lebesgue. Esto prueba la equivalencia.

c.q.d.

Como consecuencia de este teorema obtenemos que todos los espacios $\mathfrak{H}^1_q(w(x)\,dx)$ coinciden y las normas N^1_q son equivalentes. Por tanto, podemos escribir simplemente $\mathfrak{H}^1(w(x)\,dx)$ y usar cualquiera de las normas equivalentes dadas.

Si w es un peso de Muckenhoupt tenemos otra equivalencia entre $\mathfrak{H}^1(w(x)\,dx)$ y $H^1(\mathbb{R})$:

TEOREMA III.1.2. *Si* w *es un peso; entonces la aplicación*

$$f(x) \longmapsto f(x)\, w(x)$$

es una equivalencia entre $\mathfrak{H}^1(w(x)\,dx)$ *y* $H^1(\mathbb{R})$.

DEMOSTRACION. Sea a un $(1,\infty)$-átomo de t.h. con respecto a w, es decir a tiene soporte contenido en un cierto intervalo I,

$$|a(x)| \leq \frac{1}{w(I)}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, w(x)\, dx = 0.$$

Vamos a ver que existen $q > 1$ y una constante, que dependen tan solo del peso w, tales que (const) $a(x)\, w(x)$ es un $(1,q)$-átomo con respecto a la medida de Lebesgue. La razón de ello es que el peso w cumple una desigualdad de Hölder al revés; es decir: existe un $\delta > 0$ y una constante tales que para cada intervalo J:

$$\left(\frac{1}{|J|}\int_J w(x)^{1+\delta}dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq (\text{const})\ \frac{1}{|J|}\int_J w(x)\, dx.$$

Tomando $q = 1+\delta > 1$ tenemos, para nuestro átomo a:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I |a(x)\, w(x)|^q\, dx\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\frac{1}{|I|}\int_I |a(x)|^{1+\delta}(w(x))^{1+\delta}dx\right)^{1/(1+\delta)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{w(I)}\left(\frac{1}{|I|}\int_I (w(x))^{1+\delta}\, dx\right)^{1/(1+\delta)} \leq$$

$$\leq (\text{const})\,\frac{1}{w(I)}\,\frac{1}{|I|}\,w(I) = \frac{(\text{const})}{|I|}\,.$$

Esto, junto con el hecho de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, w(x)\, dx = 0$$

implica que $\frac{a(x)\, w(x)}{(\text{const})}$ es un $(1,q)$-átomo en $H^1(\mathbb{R})$. Así queda demostrado que el operador

$$f(x) \longmapsto f(x)\, w(x)$$

es acotado.

Ahora demostraremos que su inverso

$$g(x) \longmapsto \frac{g(x)}{w(x)}$$

también es acotado. Partimos de un $(1,\infty)$-átomo en $H^1(\mathbb{R})$, $b(x)$; es decir: $b(x)$ vive en un intervalo I,

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(x)\, dx = 0 \quad y \quad |b(x)| \leq \frac{1}{|I|}$$

Demostraremos que existen $q > 1$ y una constante, que dependen solamente del peso, tales que (const) $b(x)/w(x)$ es un $(1,q)$-átomo de t.h. con respecto al peso.

En efecto, tomemos $q_1 > q_0$, exponente crítico de w. Sabemos que w cumple la condición A_{q_1}; es decir:

$$\sup_J \left(\frac{1}{|J|}\int_J w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|J|}\int_J w(x)^{-\frac{1}{q_1-1}}\,dx\right)^{q_1-1} = (\text{const}) < \infty .$$

Sea ahora

$$q = q_1' = \frac{q_1}{q_1-1}.$$

Entonces

$$\left(\frac{1}{w(I)}\int_I \left|\frac{b(x)}{w(x)}\right|^q w(x)\,dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|I|}\frac{1}{(w(I))^{1/q}}\left(\int_I w(x)^{1-q}\,dx\right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{|I|}\frac{1}{\left(\int_I w(x)\,dx\right)^{(q_1-1)/q_1}}\left(\int_I w(x)^{-\frac{1}{q_1-q}}\,dx\right)^{\frac{q_1-1}{q_1}} =$$

$$= \frac{1}{|I|}\frac{1}{\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)^{(q_1-1)/q_1}}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{q_1-1}}\,dx\right)^{\frac{q_1-1}{q_1}} \leq$$

$$\leq (\text{const})\,\frac{1}{|I|}\frac{1}{\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)\,dx\right)^{\frac{q_1-1}{q_1}+\frac{1}{q_1}}} = (\text{const})\,\frac{1}{w(I)}$$

Esto, junto con el hecho de que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(x)}{w(x)}\,w(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} b(x)\,dx = 0,$$

implica que

$$\frac{1}{(\mathrm{const})} \cdot \frac{b(x)}{w(x)}$$

es un (1,q)-átomo de t.h. con respecto a w.

c.q.d.

§2. LOS ESPACIOS $\mathcal{G}^p(w(x)\,dx)$ PARA $p < 1$.

Sea $0 < \alpha < 1$. Definimos $\mathcal{L}_\alpha(w(x)\,dx)$ como el espacio de las clases de equivalencia $[l]$ módulo constantes, de funciones l para las que existe C tal que para cada intervalo I y cada par $x,y \in I$ es:

$$|l(x) - l(y)| \leq C\, w(I)^\alpha$$

El extremo inferior de todas estas C's se escribirá $\|[l]\|_{\mathcal{L}_\alpha(w(x)dx)}$.

$$[l] \longmapsto \|[l]\|_{\mathcal{L}_\alpha(w(x)\,dx)}$$

es una norma en $\mathcal{L}_\alpha(w(x)\,dx)$. Es claro que $\mathcal{L}_\alpha(w(x)\,dx)$ con esta norma, contituye un espacio de Banach.

Esta definición tiene sentido, no solamente para un peso, sino para cualquier función localmente integrable $w(x)$ para la que sea $w(x) > 0$ en casi todo x.

TEOREMA III.2.1. Sea $W(x)$ una primitiva de w y $B(x)$ la inversa de $W(x)$. Entonces la aplicación

$$[l] \longmapsto [l\circ B]$$

es una equivalencia entre $\mathcal{L}_\alpha(w(x)\,dx)$ y $\mathcal{L}_\alpha(dx)$ que es el espacio de Lipschitz ordinario.

DEMOSTRACION.

$$|l(x) - l(y)| \leq C\, w(I)^\alpha$$

para x, y $\in$ I es equivalente a

$$|l(B(s)) - l(B(t))| \leq C|W(I)|^{\alpha}$$

para s, t $\in$ W(I).

c.q.d.

Sea $\frac{1}{2} < p < 1$ y $q \geq 1$. Un (p,q)-átomo de t.h. con respecto a w será una función a con soporte en un intervalo I tal que:

(i)

$$\left(\frac{1}{w(I)} \int_I |a(x)|^q \, w(x) \, dx\right)^{1/q} \leq \frac{1}{w(I)^{1/p}}$$

si $q < \infty$, o bien

$$|a(x)| \leq \frac{1}{w(I)^{1/p}}$$

si $q = \infty$.

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x) \, w(x) \, dx = 0$$

<u>LEMA III.2.2</u>. <u>Si</u> $\alpha = \frac{1}{p} - 1$ <u>y</u> a <u>es un</u> (p,q)-<u>átomo de t.h. con respecto a</u> w; <u>la aplicación</u>

$$[l] \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} l(x) \, a(x) \, w(x) \, dx$$

<u>es un funcional lineal acotado sobre</u> $\mathcal{L}_{\alpha}(w(x)\,dx)$ <u>con norma dominada por una constante que no depende de</u> a.

<u>DEMOSTRACION</u>. Ante todo, como a tiene soporte **contenido** en I y $[l] \in \mathcal{L}_\alpha(w(x)dx$ implica que l está acotada en I; la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(x)\ a(x)\ w(x)\ dx$$

tiene sentido. También, puesto que para cualquier constante C_0,

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(x)\ a(x)\ w(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} (l(x)+C_0)\ a(x)\ w(x)\ dx,$$

la aplicación

$$[l] \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} l(x)\ a(x)\ w(x)\ dx$$

está bien definida. Ahora bien

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} l(x)\ a(x)\ w(x)\ dx\right| = \left|\int_I (l(x) - l(C_I))\ a(x)\ w(x)\ dx\right| =$$

$$= w(I)\ \left|\int_I (l(x) - l(C_I))\ a(x)\ \frac{w(x)dx}{w(I)}\right| \leq$$

$$\leq w(I)\ \|[l]\|_{\mathcal{L}_\alpha(w(x)dx)}\ w(I)^\alpha \int_I |a(x)| \frac{w(x)dx}{w(I)} \leq$$

$$\leq \|[l]\|_{\mathcal{L}_\alpha(w(x)\ dx)}$$

Así pues, si llamamos L_a al funcional

$$[l] \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} l(x)\ a(x)\ w(x)\ dx,$$

obtenemos que $L_a \in (\mathcal{L}_\alpha(w(x)\ dx))^*$ y

$$||L_a||_* = ||L_a||_{\mathcal{L}_\alpha(w(x)dx))^*} \leq 1.$$

c.q.d.

LEMA III.2.3. a es un (p,q)-átomo de t.h. con respecto a w si y sólo si a(B(y)) es un (p,q)-átomo con respecto a la medida de Lebesgue.

DEMOSTRACION.

$$\int_I |a(x)|^q\, w(x)\, dx = \int_{W(I)} |a(B(y))|^q\, dy$$

y $w(I) = |W(I)|$.

c.q.d.

La caracterización de $H^p(\mathbb{R})$ para $\frac{1}{2} < p < 1$ como el espacio de los funcionales

$$M \in (\mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(dx))^* = H^p(\mathbb{R})^{**}$$

que pueden descomponerse en la topología de $(\mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(dx))^*$ como

$$M = \sum_i \lambda_i M_{a_i} \quad \text{con} \quad \sum_i |\lambda_i|^p < \infty$$

y a_i (p,q)-átomos con respecto a dx, para los que se define

$$M_{a_i}([m]) = \int_{-\infty}^{\infty} m(x) a_i(x) dx;$$

con la quasi-norma dada por el extremo inferior de las sumas $\sum_i |\lambda_i|^p$ correspondientes a todas las descomposiciones posibles (véase [2]); sugiere las siguientes definiciones:

Llamaremos $\mathcal{H}^p_q(w(x)\,dx)$ al subespacio de $\mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)\,dx))^*$ formado por aquellos funcionales

$$L : \mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)\,dx) \longmapsto \mathbb{R}$$

que admiten una descomposición

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, L_{a_i}$$

convergente en la topología de $(\mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)\,dx))^*$ tal que

$$\sum_i |\lambda_i|^p < \infty$$

y las a_i son (p,q)-átomos de t.h. con respecto a w. También, para L e $\mathcal{H}^p_q(w(x)dx)$ llamamos

$$N^p_q(L) = \inf \{\sum_i |\lambda_i|^p\}^{1/p}$$

donde el inf se toma sobre todas las descomposiciones de la forma indicada. Claramente

$$L \longmapsto (N^p_q(L))^p$$

es una quasi-norma sobre $\mathcal{H}^p_q(w(x)\,dx)$. Si

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, L_{a_i}$$

en la topología de $(\mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)\,dx))^*$ con

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$$

y los a_i (p,q)-átomos de t.h. con respecto a w; entonces

$$||L||_* \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \; ||L_{a_i}||_* \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p)^{1/p}.$$

Por lo tanto: para $L \in \mathcal{G}_q^p(w(x)\,dx)$, $||L||_* \leq N_q^p(L)$. En otras palabras, la inclusión

$$\mathcal{G}_q^p(w(x)\,dx) \hookrightarrow (\mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)\,dx))^*$$

es continua.

Ya sabemos que la aplicación

$$\Phi : \mathcal{L}_\alpha(dx) \longrightarrow \mathcal{L}_\alpha(w(x)\,dx)$$

dada por $\Phi([m]) = [m\circ W]$ es una equivalencia de espacios de Banach. Pasando a los duales obtenemos la equivalencia:

$$\Phi^* : (\mathcal{L}_\alpha(w(x)\,dx))^* \longrightarrow (\mathcal{L}_\alpha(dx))^*$$

dada por $\Phi^*(L) = L \circ \Phi$.

<u>TEOREMA III.2.4</u>. <u>Sea</u> $\alpha = \frac{1}{p} - 1$. <u>Entonces</u>

$$\Phi^*(\mathcal{G}_q^p(w(x)\,dx)) = H^p(\mathbb{R})$$

<u>y la restricción de</u> Φ^* <u>a</u> $\mathcal{G}_q^p(w(x)\,dx)$ <u>es una equivalencia de espacios quasi-normados</u>. Como consecuencia, obtenemos el hecho de que todos los espacios $\mathcal{G}_q^p(w(x)dx)$ <u>coinciden como conjuntos y las quasi-normas</u> N_q^p <u>son equivalentes, de forma que podemos hablar de un único espacio</u> $\mathcal{G}^p(w(x)\,dx)$. <u>Este espacio es equivalente a</u> $H^p(\mathbb{R})$ <u>y por lo mismo, completo.</u>

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea L e $\mathcal{H}^p_q(w(x)\,dx)$ y sea

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i La_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$$

y a_i (p,q)-átomos de t.h. con respecto a w. Entonces

$$\Phi^*(L) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \Phi^*(L_{a_i})$$

en $(\mathcal{L}_\alpha(dx))^* = H^p(\mathbb{R})^{**}$. Pero

$$(\Phi^*(L_{a_i}))([m]) = (L_{a_i} o\Phi)([m]) = L_{a_i}(\Phi([m])) =$$

$$= L_{a_i}([moW]) = \int_{-\infty}^{\infty} m(W(x))\, a_i(x)\, w(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} m(y)\, a_i(B(y))\, w(B(y))\, B'(y)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} m(y)\, a_i(B(y))\, dy = M_{a_i oB}([m]).$$

Así pues:

$$\Phi^*(L) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i M_{a_i oB}$$

Como los a_i o B son (p,q)-átomos con respecto a la medida de Lebesgue, obtenemos que

$$\Phi^*(L) \in H^p(\mathbb{R}) \quad y \quad ||\Phi^*(L)||_{H^p(\mathbb{R})} \leq (\text{const})\, N^p_q(L).$$

El cambio de variables inverso nos daría la otra mitad del teorema.

c.q.d.

El teorema III.1.2 dice que multiplicando por el peso obtenemos una equivalencia entre el espacio $\mathfrak{H}^1(w(x)\,dx)$ engendrado por átomos de tipo homogéneo, y el espacio $H^1(\mathbb{R})$ de funciones de tipo analítico.

Ahora vamos a extender este resultado para algunos $p < 1$. Esta vez obtendremos equivalencia entre $\mathfrak{H}^p(w(x)\,dx)$ y el espacio de funciones de tipo analítico $H^p(w(x)^{1-p}\,dx)$.

LEMA III.2.5. *Sea* w *un peso con exponente crítico* q_0. *Sea* $\delta > 0$ *tal que* w *satisface una desigualdad de Hölder al revés con exponente* $1+\delta$. *Sea* $1 - \frac{\delta}{p_0} < p < 1$ *y también* $p > \frac{q_0}{1+q_0} \geq \frac{1}{2}$. *Entonces si* $a(x)$ *es un* (p,∞)*-átomo de t.h. con respecto a* w, *existen* $q > q_0(1-p) + p$ *y una constante (independiente de* a*) tales que* (const) $a(x)\,w(x)$ *es un* (p,q)*-átomo con respecto a* $w(x)^{1-p}$.

DEMOSTRACION. Se deduce del lema I.18 a será una función con soporte contenido en I, tal que:

(i) $|a(x)| \leq \dfrac{1}{w(I)^{1/p}}$.

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\,w(x)\,dx = 0.$

Sea $b(x) = a(x)\,w(x)$. Puesto que el exponente crítico de $w(x)^{1-p}$ es $\leq q_0(1-p) + p$, bastará que $b(x)$ tenga momentos iguales a 0 hasta el orden

$$\left[\frac{q_0(1-p) + p}{p} - 1\right].$$

Pero $p > \dfrac{q_0}{1+q_0}$ implica que

$$\frac{q_0(1-p) + p}{p} - 1 = q_0\left(\frac{1}{p} - 1\right) < q_0\left(\frac{1+q_0}{q_0} - 1\right) = 1.$$

Así pues, solo necesitamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, w(x)\, dx = 0$$

que no es otra cosa que (ii).

Sabemos, por el lema I.18, que existen $q > q_0(1-p) + p$ y una constante, tales que se cumple (I.19), es decir:

$$\left(\frac{1}{\int_I w(x)^{1-p}\, dx} \int_I w(x)^q\, w(x)^{1-q}\, dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq (\text{const})\left(\frac{1}{\int_I w(x)^{1-p}\, dx} \int_I w(x)\, dx\right)^{1/p}.$$

Entonces

$$\left(\frac{1}{\int_I w(x)^{1-p}\, dx} \int_I |b(x)|^q\, w(x)^{1-p}\, dx\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\frac{1}{\int_I w(x)^{1-p} dx} \int_I |a(x)w(x)|^q\, w(x)^{1-p}\, dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{w(I)^{1/p}} \left(\frac{1}{\int_I w(x)^{1-p} dx} \int_I w(x)^q\, w(x)^{1-p}\, dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq (\text{const})\, \frac{1}{w(I)^{1/p}} \left(\frac{w(I)}{\int_I w(x)^{1-p}\, dx}\right)^{1/p} = (\text{const})\, \frac{1}{\left(\int_I w(x)^{1-p} dx\right)^{1/p}}$$

c.q.d.

Para el recíproco no tenemos necesidad de limitar el rango de p.

LEMA III.2.6. Sea $p > 1/2$. Si $b(x)$ es un (p,∞)-átomo con respecto al peso $w(x)^{1-p}$, existen $q > 1$ y una constante (independiente de b) tales que

$$(\text{const})\ \frac{b(x)}{w(x)}$$

es un (p,q)-átomo de t.h. con respecto a w.

DEMOSTRACION. La clave está en el lema I.21. b será una función con soporte contenido en un intervalo I tal que

$$\int_I b(x)\,dx = 0$$

y

$$|b(x)| \leq \frac{1}{\left[\int_I w(x)^{1-p}\,dx\right]^{1/p}}$$

Sea

$$a(x) = \frac{b(x)}{w(x)}.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\,w(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} b(x)\,dx = 0$$

El lema I.21 implica que existen: $q > 1$ y una constante, tales que:

$$\left(\frac{1}{\int_I w(x)dx}\int_I w(x)^{-q}w(x)\,dx\right)^{1/q} \leq (\text{const})\left(\frac{\int_I w(x)^{1-p}dx}{\int_I w(x)\,dx}\right)^{1/p}$$

Para este q:

$$\left(\frac{1}{\int_I w(x)dx}\int_I |a(x)|^q\, w(x)dx\right)^{1/q} = \left(\frac{1}{\int_I w(x)dx}\int_I \left|\frac{b(x)}{w(x)}\right|^q w(x)dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\left(\int_I w(x)^{1-p}\, dx\right)^{1/p}} \left(\frac{1}{\int_I w(x)dx}\int_I (w(x))^{-q} w(x)dx\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq (\mathrm{const})\, \frac{1}{\left(\int_I w(x)^{1-p}\, dx\right)^{1/p}} \left(\frac{\int_I w(x)^{1-p}\, dx}{\int_I w(x)\, dx}\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{(\mathrm{const})}{(w(I))^{1/p}}.$$

c.q.d.

En el lema III.2.5 la restricción $1 - \frac{\delta}{q_0} < p$ es bastante desafortunada ya que no existe relación entre δ y q_0 y para un peso dado w, δ puede ser difícil de calcular. Sin embargo, dispondremos de los siguientes resultados.

LEMA III.2.7. Sea w un peso con exponente crítico q_0. Sea $p > \frac{q_0}{1+q_0}$. Supongamos que a(x) es un (p,∞)-átomo de t.h. con respecto a w. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(a.w)^{\sim}(x)|^p\, w(x)^{1-p}\, dx \leq (\mathrm{const})$$

donde (const) no depende de a.

DEMOSTRACION. a será una función con soporte contenido en un intervalo I y tal que:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} a(x)\, w(x)\, dx = 0$

(ii) $|a(x)| \leq \frac{1}{\left(\int_I w(x)\, dx\right)^{1/p}}$.

$(aw)^{\sim}$ siempre tiene sentido ya que a es acotada y si $q_1 > q_0$ $w(x)\chi_I(x)$ está en

$$L^{q_1'}(w(x)^{-\frac{1}{q_1-1}}dx)$$

(esto es sencillamente decir que w(x) es integrable sobre I) y $w(x)^{-\frac{1}{q_1-1}}$ cumple la condición $A_{q_1'}$.

Sea

$$I^* = \delta_2(I) = C_I + 2(I-C_I)$$

$$\int_{I^*}|(a.w)^{\sim}(x)|^p w(x)^{1-p}dx = \int_{I^*}\left|\frac{1}{w(x)}(a.w)^{\sim}(x)\right|^p w(x)\,dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{I^*}\left|\frac{1}{w(x)}(a.w)^{\sim}(x)\right|^q w(x)\,dx\right)^{p/q} w(I^*)^{1-\frac{p}{q}} =$$

$$= \left(\int_{I^*}|(a.w)^{\sim}(x)|^q\, w(x)^{1-q}\,dx\right)^{p/q} w(I^*)^{\frac{q-p}{q}}.$$

Tomemos q tal que $1 - q = -\frac{1}{q_1-1}$ para algún $q_1 > q_0$ es decir:

$$q = 1 + \frac{1}{q_1-1} = \frac{q_1}{q_1-1} = q_1' > 1.$$

Entonces

$$\int_{I^*}|(a.w)^{\sim}(x)|^p\, w(x)^{1-p}\,dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{I^*}|(a.w)^{\sim}(x)|^{q_1'}\, w(x)^{-\frac{1}{q_1-1}}\,dx\right)^{p\frac{q_1-1}{q_1}} w(I^*)^{1-p\frac{q_1-1}{q_1}}$$

Teniendo en cuenta que $w(x)^{-\frac{1}{q_1-1}}$ cumple la condición $A_{q_1'}$:

$$\int_{I^*} |(a.w)^{\sim}(x)|^p \, w(x)^{1-p} \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |(a.w)^{\sim}(x)|^{q_1'} \, w(x)^{-\frac{1}{q_1-1}} \, dx\right)^{(1/q_1')p} w(I^*)^{1-p\,\frac{q_1-1}{q_1}} \leqslant$$

$$\leqslant (\mathrm{const})\left(\int_I |a(x)w(x)|^{q_1'} \, w(x)^{-\frac{1}{q_1-1}} \, dx\right)^{(1/q_1')p} w(I^*)^{1-p\,\frac{q_1-1}{q_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\mathrm{const})}{w(I)} \, (w(I))^{\frac{q_1-1}{q_1}\,p} \, (w(I))^{1-p\,\frac{q_1-1}{q_1}} = (\mathrm{const})$$

Así pues:

$$\text{(III.2.8)} \qquad \int_{I^*} |(a.w)^{\sim}(x)|^p \, w(w)^{1-p} \, dx \leqslant (\mathrm{const})$$

Estudiemos ahora

$$\int_{x \notin I^*} |(a.w)^{\sim}(x)|^p \, w(x)^{1-p} \, dx.$$

Si $x \notin I^*$, es decir: si $|x - C_I| > |I|$, tenemos:

$$|(a.w)^{\sim}(x)| = \left|\mathrm{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(y)\, w(y)}{x - y} \, dy\right| =$$

$$= \left|\int_I \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-C_I}\right) a(y) \, w(y) \, dy\right| = \left|\int_I \frac{y-C_I}{(x-y)(x-C_I)} \, a(y) w(y) dy\right|$$

Pero

$$|x-y| = |x - C_I - (y-C_I)| \geqslant |x - C_I| - |y - C_I| \geqslant$$

$$\geqslant |x - C_I| - \frac{|x - C_I|}{2} = \frac{|x - C_I|}{2}$$

Entonces, para $x \notin I$:

$$|(a.w)^{\sim}(x)| \leq \int_I \frac{|y - C_I|}{|x-y|\ |x-C_I|} |a(y)|w(y)\ dy \leq$$

$$\leq \frac{(\text{const})}{|x-C_I|^2} \frac{1}{(w(I))^{1/p}} |I|w(I)$$

Para $w(x)^{1-p}$ el exponente crítico es

$$\leq q_0(1-p)+p = q_0 - p(q_0-1) < p(1+q_0) - p(q_0-1) = 2p$$

Así pues $w(x)^{1-p}$ cumple la condición A_{2p}.

Aplicando el lema I.4 obtenemos:

$$\int_{x\notin I^*} \frac{w(x)^{1-p}dx}{|x-C_I|^{2p}} \leq \frac{(\text{const})}{|I^*|^{2p}} \int_{I^*} w(x)^{1-p}\ dx \leq$$

$$\leq (\text{const}) \frac{(w(I^*))^{1-p}|I^*|^p}{|I^*|^{2p}} \leq (\text{const}) \frac{(w(I))^{1-p}}{|I|^p}$$

En consecuencia:

$$\int_{x\notin I^*} |(a.w)^{\sim}(x)|^p\ w(x)^{1-p}\ dx \leq$$

$$\leq (\text{const})\ |I|^p\ (w(I))^{p-1} \int_{x\notin I^*} \frac{w(x)^{1-p}\ dx}{|x-C_I|^{2p}} \leq$$

$$\leq (\text{const})|I|^p\ (w(I))^{p-1} \frac{(w(I))^{1-p}}{|I|^p} = (\text{const}).$$

Es decir:

(III.2.9) $$\int_{x\notin I^*} |(a.w)^{\sim}(x)|^p\ w(x)^{1-p}\ dx \leq (\text{const})$$

(III.2.8) y (III.2.9) dan (III.2.7).

c.q.d.

LEMA III.2.10. En las mismas hipótesis de (III.2.7):

$$||P_\nabla^*((a.w) + i(a.w)^\sim)||^p_{L^p(w(x)^{1-p}dx)} \leq (\text{const})$$

independientemente de a.

DEMOSTRACION.

$$\int_{I^*} |P_\nabla^*((a.w) + i(a.w)^\sim)(x)|^p \; w(x)^{1-p} \; dx \;\leq$$

$$\leq (\text{const}) \int_{I^*} |(a.w)^*(x) + (a.w)^{\sim *}(x)|^p \; w(x)^{1-p} \; dx \;\leq$$

$$\leq (\text{const}) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |(a.w)^*(x) + (a.w)^{\sim *}(x)|^{q_1'} \; w(x)^{-\frac{1}{q_1-1}} \; dx \right)^{p/q_1'} \cdot$$

$$\cdot \; w(I^*)^{1-p \frac{q_1-1}{q_1}}$$

donde, como antes, tomamos $q_1 > q_0$. Así pues:

$$\int_{I^*} |P_\nabla^*((a.w) + i(a.w)^\sim)(x)|^p \; w(x)^{1-p} \; dx \leq$$

$$\leq (\text{const}) \left(\int_I |a(x) \; w(x)|^{q_1'} \; w(x)^{-\frac{1}{q_1-1}} \; dx \right)^{p/q_1'} w(I^*)^{1-p \frac{q_1-1}{q_1}} \leq$$

$$\leq (\text{const}) \; \frac{1}{w(I)} \; (w(I))^{\frac{q_1-1}{q_1} p} \; w(I)^{1-p \frac{q_1-1}{q_1}} = (\text{const}).$$

es decir:

$$\text{(III.2.11)} \qquad \int_{I^*} |P_\nabla^*((a.w) + i(a.w)^\sim)(x)|^p \, w(x)^{1-p} \, dx \leq \text{(const)}.$$

Sea ahora $x \notin I^*$. Estimamos $P_\nabla^*(a.w)(x)$ y $P_\nabla^*((a.w)^\sim)(x)$.

$$P_\nabla^*(a.w)(x) = \sup_{|x-y|<t} |(P_t * (a.w))(y)|$$

Tomemos $(y,t) \in \mathbb{R}_+^2$ tal que $|x - y| < t$

$$|(P_t * (a.w))(y)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} P_t(y-u) \, a(u) \, w(u) \, du\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} (P_t(y-u) - P_t(y-C_I)) \, a(u) \, w(u) \, du\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |P_t'(y-C_I-\theta_u(u-C_I))| \; |u-C_I| \; |a(u)| \; w(u) \, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} \left|P'\left(\frac{y-C_I-\theta_u(u-C_I)}{t}\right)\right| \frac{1}{t} \, |u-C_I| \; |a(u)| \; w(u) \, du$$

Pero

$$|P'(s)| \leq \frac{\text{(const)}}{(1+|s|)^2}$$

de forma que:

$$|(P_t * (a.w))(y)| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2} \frac{\text{(const)}}{\left(1+\frac{|y-C_I-\theta_u(u-C_I)|}{t}\right)^2} |u-C_I| \; |a(u)| \; w(u) \, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{(const)}}{(t + |y-C_I-\theta_u(u-C_I)|)^2} \, |u-C_I| \; |a(u)| \; w(u) \, du$$

Pero

$$t + |y - C_I - \theta_u(u-C_I)| \geq \frac{|x-C_I|}{2}$$

Por lo tanto:

$$|(P_T * (a.w))(y)| \leq \frac{(\mathrm{const})}{|x-C_I|^2} |I| \; w(I)^{1-\frac{1}{p}}$$

que es lo mismo que obtuvimos en (III.2.7) para $|(a.w)^{\sim}(x)|$ en puntos $x \notin I^*$.

De la misma forma que en (III.2.7) obtenemos

$$\text{(III.2.12)} \qquad \int_{x \notin I^*} |P_\nabla^*(a.w)(x)|^p \; w(x)^{1-p} \, dx \leq (\mathrm{const})$$

Ahora estimamos $P_\nabla^*((a.w)^{\sim})(x)$ para $x \notin I^*$

$$P_\nabla^*((a.w)^{\sim})(x) = \sup_{|x-y|<t} |(P_t * (a.w)^{\sim})(y)| =$$

$$= \sup_{|x-y|<t} |(\tilde{P}_t * (a.w))(y)| = \sup_{|x-y|<t} |((\tilde{P})_t * (a.w))(y)|$$

Como para

$$\tilde{P}(s) = \frac{s}{1+s^2}$$

También tenemos la desigualdad

$$|\tilde{P}'(s)| \leq \frac{(\mathrm{const})}{(1+|s|)^2}$$

la misma demostración de (III.2.12) con $\tilde{P}$ en lugar de P conduce a:

$$\text{(III.2.13)} \qquad \int_{x \notin I^*} |(P_\nabla^*((a.w)^{\sim}))(x)|^p \; w(x)^{1-p} \, dx \leq (\mathrm{const})$$

Así pues:

$$\int_{x\notin I^*} |P_\nabla^*((a.w) + i(a.w)^\sim)(x)|^p\, w(x)^{1-p}\, dx \leq (\text{const})$$

que, junto con (III.2.11) da (III.2.10).

c.q.d.

<u>TEOREMA III.2.14. Si</u> w <u>es un peso con exponente crítico</u> q_0 <u>y</u> $p > \frac{q_0}{1+q_0}$, <u>existe una equivalencia entre</u> $\mathcal{H}^p(w(x)\,dx)$ <u>y</u> $H^p(w(x)^{1-p}\,dx)$ <u>que, para</u> (p,∞)-<u>átomos de t.h. está dada por</u>

$$a(x) \longmapsto a(x)\, w(x)$$

<u>DEMOSTRACION</u>. En $\mathcal{H}^p(w(x)\,dx)$, consideremos el subespacio $\mathfrak{Q}$ formado por aquellos funcionales L que se pueden escribir como sumas finitas de (p,∞)-átomos de t.h.; es decir:

$$L = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, L_{a_j}.$$

En $\mathfrak{Q}$, la quasi-norma

$$L \longmapsto \inf \{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p \}^{1/p}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las descomposiciones finitas

$$L = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, L_{a_j}\, ;$$

es equivalente a N_∞^p. A

$$L = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, L_{a_j} \in \mathfrak{Q},$$

le asociamos la función analítica definida en el semiplano superior

$$F(x+it) = (P_t * (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j w + i(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j w)^{\sim}))(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (P_t * (a_j w + i(a_j w)^{\sim}))(x)$$

Antes que nada, hemos de asegurarnos de que la aplicación $L \mapsto F$ está bien definida. Es decir, que si tenemos dos descomposiciones atómicas **diferentes del mismo** funcional L:

$$L = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_{a_j}$$

y

$$L = \sum_{k=1}^{m} \mu_k L_{b_k}$$

entonces

$$P_t * (\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j w + i(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j w)^{\sim})(x) =$$

$$= P_t * (\sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k w + i(\sum_{k=1}^{m} \mu_k b_k w)^{\sim})(x)$$

o lo que es lo mismo: si

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_{a_j}$$

en $\mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)\,dx))^*$ entonces

$$(P_t * (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j w + i(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_j w)^{\sim}))(x) = 0$$

Esto es fácil de ver, ya que

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_{a_j}$$

en $(\mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)\,dx))^*$ significa que para cada $[l] \in \mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)\,dx)$:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int_{-\infty}^{\infty} l(x)a_j(x)w(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} l(x)(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j(x)w(x))dx = 0$$

esto implica claramente que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j(x) = 0$$

para casi todo x (en efecto

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j(x)$$

está acotada y tiene soporte compacto y es tal que para cada $[l] \in \mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)dx)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(x)\ \phi(x)\ w(x)\ dx = 0$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(B(s))\phi(B(s))ds = 0,$$

es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} m(s)\ \phi(B(s))\ ds = 0$$

para cada $[m] \in \mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(ds)$. Se sigue que $\phi(B(s)) = 0$ en casi todo punto porque

$\mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}$ contiene suficientes funciones, por ejemplo, todas las funciones de clase $\mathcal{C}^{\infty}$ con soporte compacto). Así pues, la aplicación $L \longmapsto F$ está bien definida en $\mathcal{A}$ y se sigue de (III.2.10) que es un operador lineal continuo de $\mathcal{A}$ en $H^p(w(x)^{1-p}dx)$. Ahora bien, como $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{L}^p(w(x)\,dx)$, este operador se extiende de forma única a un operador lineal continuo $L \longmapsto L.w$ de $\mathcal{L}^p(w(x)\,dx)$ en $H^p(w(x)^{1-p}\,dx)$.

Veamos que esta aplicación es, de hecho, una equivalencia. Consideremos en $H^p(w(x)^{1-p}\,dx)$ el subespacio $\mathcal{B}$ formado por aquellas funciones F que se pueden escribir como suma finita de (p,∞)-átomo con respecto a $w(x)^{1-p}$. Es decir:

$$F(x+it) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (P_t * (b_j + i\tilde{b}_j))(x)$$

donde los b_j son (p,∞)-átomos con respecto a $w(x)^{1-p}$. Sobre este subespacio

$$F \longmapsto \inf \{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p \}^{1/p}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las descomposiciones finitas, es una quasi-norma equivalente a $N_{p,\infty}$. $\mathcal{B}$ es denso en $H^p(w(x)^{1-p}\,dx)$. A la función

$$F(x+it) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (P_t * (b_j + i\tilde{b}_j))(x)$$

le asociamos el funcional L sobre $\mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)\,dx)$ dado por

$$L = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, L_{(b_j/w)}$$

(III.2.6) y (III.2.2) implican que la definición tiene sentido. También es inmediato que la aplicación $F \longmapsto L$ está bien definida ya que si

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (P_t * (b_j + i\tilde{b}_j))(x) = P_t * \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j + i\big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j \big)^{\sim} \Big)(x) \equiv 0,$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, b_j(x) = 0$$

en casi todo punto . En consecuencia, para cada $[l] \in \mathcal{L}_{\frac{1}{p}-1}(w(x)\,dx)$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, L_{(b_j/w)}([l]) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \int_{-\infty}^{\infty} l(x) \, \frac{b_j(x)}{w(x)} \, w(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} l(x) \, \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j(x) \Big) \, dx = 0.$$

(III.2.6) implica que la aplicación $F \longmapsto L$ que acabamos de definir en un operador lineal continuo de $\mathcal{B}$ en $\mathfrak{H}^p(w(x)\,dx)$. Como $\mathcal{B}$ es denso en $H^p(w(x)^{1-p}\,dx)$, $F \mapsto L$ se extiende a un operador lineal continuo $F \longmapsto F/w$ de $H^p(w(x)^{1-p}\,dx)$ en $\mathfrak{H}^p(w(x)\,dx)$.

Es claro que los operadores $L \mapsto L.w$ y $F \mapsto F/w$ son inversos el uno del otro de forma que tenemos una equivalencia.

c.q.d.

CAPITULO IV

APLICACIONES

§1. UNA GENERALIZACION DE LA TRANSFORMACION DE HILBERT.

Sea w un peso, W una primitiva de w y B la inversa de W. En (III.1) hemos establecido las siguientes equivalencias: $f(x)$ está en $\mathfrak{H}^1(w(x)\,dx) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow f(B(y))$ está en $H^1(dy) \Longleftrightarrow f(x)\,w(x)$ está en $H^1(dx)$.

Ahora bien, para una función $f \in L^1(w(x)\,dx)$

$$(f\circ B)^{\sim}(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(B(y))}{x-y}\,dy =$$

$$= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(B(y))\,w(B(y))\,B'(y)\,dy}{x-y} =$$

$$= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(B(y))\,w(B(y)\,B'(y)\,dy}{W(B(x)) - W(B(y))} =$$

$$= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)\,w(s)}{W(B(x)) - W(s)}\,ds$$

Así pues

$$(f\circ B)^{\sim}(W(r)) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)\,w(s)}{W(r) - W(s)}\,ds$$

$f \in \mathfrak{H}^1(w(x)\,dx) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (f\circ B)^{\sim} \in L^1(dx) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (f\circ B)^{\sim}(x)\,dx < \infty \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (f\circ B)^{\sim}(W(r))\,W'(r)\,dr =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (f\circ B)^{\sim}(W(r))\,w(r)\,dr < \infty$$

Por lo tanto: f e $\mathcal{H}^1(w(x)\,dx)$ si y sólo si

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)\,w(s)\,w(r)}{W(r) - W(s)}\,ds$$

está en $L^1(dr)$. Por otra parte:

$$(fw)^{\sim}(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)\,w(y)}{x - y}\,dy$$

f e $\mathcal{H}^1(w(x)\,dx)$ si y sólo si

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)\,w(s)}{r - s}\,ds$$

está en $L^1(dr)$. Así para una función g e L^1:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,\frac{w(r)}{W(r) - W(s)}\,ds$$

está en $L^1(dr)$ si y sólo si

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,\frac{1}{r-s}\,ds$$

está en $L^1(dr)$. Es decir, para un peso w, el núcleo $\frac{w(r)}{W(r)-W(s)}$ puede ser utilizado en lugar de $1/(r-s)$ que es el núcleo de la transformación de Hilbert, para caracterizar H^1. $1/(r-s)$ es el núcleo que se obtiene como caso particular tomando $w(s) \equiv 1$.

§2. EQUIVALENCIA ENTRE EL ESPACIO DE FUNCIONES RADIALES EN $H^1(\mathbb{R}^n)$ Y EL ESPACIO DE FUNCIONES PARES EN $\mathcal{L}^1(|r|^{n-1}\,dr)$.

LEMA IV.2.1. Sea $w(r)$ un peso par. Entonces para una función $f(r)$ que viva en la semirrecta positiva $[0,\infty[$, las siguientes propiedades son equivalentes:

(i) $f \in \mathcal{L}^1(w(r)\,dr)$.

(ii) si g es la extensión par de f, es decir $g(r) = f(r)$ si $r \geq 0$ y $g(r) = f(-r)$ si $r \leq 0$; entonces $g \in \mathcal{L}^1(w(r)\,dr)$.

(iii)

$$f(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, a_i(r) \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$$

y los a_i son $(1,\infty)$-átomos de t.h. con respecto a w que viven todos en $[0,\infty[$.

También

$$\|f\|_{\mathcal{L}^1(w(r)dr)}\,;\ \|g\|_{\mathcal{L}^1(w(r)\,dr)}$$

y

$$\inf \{\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|\}$$

donde inf se toma sobre todas las descomposiciones permitidas en (iii); son normas equivalentes.

DEMOSTRACION. (i) $\Rightarrow$ (ii): Si $f \in \mathcal{L}^1(w(r)\,dr)$ entonces

$$f(r)\,\chi_{[0,\infty[}(r) = f(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, a_i(r)$$

en casi todo $r \in \mathbb{R}$, con

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leq (\text{const}) \, ||f||_{\mathcal{L}^1(w(r)dr)}$$

y los a_i's son $(1,\infty)$-átomos de t.h. con respecto a w. Entonces

$$f(-r)\chi_{]-\infty,0]}(r) = f(-r)\chi_{[0,\infty[}(-r) = f(-r) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i(-r)$$

para casi todo $r \in \mathbb{R}$.

Para $j = 1, 2, \ldots$ llamemos $b_j = a_j$. Para $j = -1, -2, \ldots$ llamemos $b_j(r) = a_j(-r)$. Del hecho de que $w(r)$ es par, se deduce inmediatamente que para $j = -1, -2, \ldots, b_j$ es un $(1,\infty)$-átomo de tipo homogéneo. Sea $\lambda_0 = 0$ y $b_0 = 0$. Entonces, en casi todo punto:

$$g(r) = f(r)\, \chi_{[0,\infty[}(r) + f(-r)\chi_{]-\infty,0]}(r) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i(r) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i(-r) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{|j|} b_j(r)$$

Así pues: $g(r)$ está en $\mathcal{L}^1(w(r)\, dr)$ y

$$||g||_{\mathcal{L}^1(w(r)dr)} \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |\lambda_{|j|}| = 2 \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leq (\text{const}) ||f||_{\mathcal{L}^1(w(x)dx)}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Como $g(r)$ está en $\mathcal{L}^1(w(r)\, dr)$, se tendrá:

$$g(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i(r) \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leq (\text{const}) ||g||_{\mathcal{L}^1(w(r)dr)}$$

y los a_i $(1,\infty)$-átomos de t.h. con respecto a w. g es par, por lo tanto $g(r) = g(-r)$ y

$$g(r) = \frac{1}{2}\,(g(r) + g(-r)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (a_i(r) + a_i(-r)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \,\frac{a_i(r) + a_i(-r)}{2}$$

Entonces

$$f(r) = g(r)\, \chi_{[0,\infty[}(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \,\frac{a_i(r)+a_i(-r)}{2}\, \chi_{[0,\infty[}(r)$$

Llamemos

$$b_i(r) = \frac{a_i(r) + a_i(-r)}{2}\quad \chi_{[0,\infty[}(r)$$

Si a_i vive en $[0,\infty[$, $b_i(r) = a_i(r)/2$. Si a_i vive en $]-\infty,0]$, $b_i(r) = a_i(-r)/2$. Si el soporte de a_i corta a la vez a $[0,\infty[$ y $]-\infty,0]$ tendremos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_i(r)\, w(r)\, dr = \int_0^{\infty} \frac{a_i(r) + a_i(-r)}{2}\, w(r)\, dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_i(r) + a_i(-r)}{2}\quad w(r)\, dr = 0$$

y, si I_i es el intervalo cerrado más pequeño que contiene al soporte de a_i, claramente

$$|b_i(r)| \leq \frac{1}{w(I_i)} \leq \frac{1}{w(I_i \cap [0,\infty[)}\ .$$

Así pues, en cualquier caso b_i es un $(1,\infty)$-átomo de t.h. con respecto a w. Entonces

$$f(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i b_i(r)$$

implica (iii) y además

$$\inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \} \leq ||g||_{\mathcal{H}^1(w(x)\,dx)}$$

donde el inf se toma sobre todas las descomposiciones en átomos que viven en la semirrecta positiva. Que (iii) $\Rightarrow$ (i) es trivial y también

$$||f||_{\mathcal{H}^1(w(x)\,dx)} \leq \inf \{ \sum_i |\lambda_i| \}$$

donde el inf se toma sobre todas las descomposiciones permitidas en (iii). (IV.2.1) es verdad en particular para $w(r) \equiv 1$ en cuyo caso

$$\mathcal{H}^1(w(r)\,dr) = \mathcal{H}^1(dr) = H^1(\mathbb{R}).$$

c.q.d.

<u>TEOREMA IV.2.2. Una función radial</u> $F(x) = f(|x|)$ <u>definida en</u> $\mathbb{R}^n$ <u>está en</u> $H^1(\mathbb{R}^n)$ <u>si y sólo si</u>

$$f(r)\, \chi_{[0,\infty[}(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i(r)$$

<u>para casi todo</u> r, <u>con</u>

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$$

<u>y siendo cada</u> a_i <u>un</u> $(1,\infty)$<u>-átomo de t.h. con respecto al peso</u> $|r|^{n-1}$ <u>y que además vive en la semirrecta</u> $[0,\infty[$. <u>También</u>

$$\inf \{ \sum_i |\lambda_i| \}$$

<u>donde el inf se toma sobre todas las descomposiciones mencionadas, es una norma equivalente a</u> $||F||_{H^1(\mathbb{R}^n)}$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea $F(x) = f(|x|)$ una función radial en $H^1(\mathbb{R}^n)$. F admitirá una descomposición atómica

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \, A_i(x)$$

con

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \leq (\text{const}) \, ||F||_{H^1(\mathbb{R}^n)},$$

cada A_i con soporte contenido en una bola B_i, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A_i(x) \, dx = 0 \quad y \quad |A_i(x)| \leq \frac{1}{|B_i|}$$

(la descomposición atómica para funciones de $H^1(\mathbb{R}^n)$ es equivalente a la dualidad establecida por Fefferman y Stein en ([7]). Ahora bien, como F es radial, tendremos para casi todo $r > 0$:

$$f(r) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} F(rx') \, dx' = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i A_i(rx') dx' =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} A_i(rx') \, dx' = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i(r)$$

donde llamamos

$$a_i(r) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} |A_i(rx')| dx'$$

para $r \geq 0$. Σ_{n-1} es la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$, es decir

$$\Sigma_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \; / \; |x| = 1\}$$

y dx' es la medida de Lebesgue sobre dicha esfera.

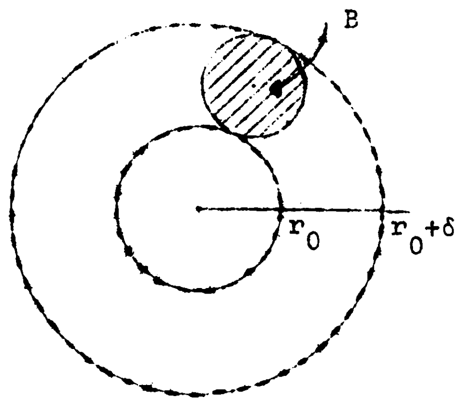
Veremos que (const) a_i es un $(1,\infty)$-átomo de t.h. con respecto al peso $|r|^{n-1}$ para todo i, donde (const) no depende de i. En general demostraremos que si A es un átomo en $H^1(\mathbb{R}^n)$, es decir: una función con soporte contenido en una bola B, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)\, dx = 0 \quad y \quad |A(x)| \leq \frac{1}{|B|};$$

entonces si para $r \geq 0$ hacemos

$$a(r) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} A(rx')\, dx',$$

existe una constante (independiente de A) tal que (const) a es un $(1,\infty)$-átomo de t.h. con respecto al peso $|r|^{n-1}$.



Sea r_0 = dist (0,B) y sea δ = diam (B). Entonces a tiene soporte contenido en el intervalo $[r_0, r_0+\delta[$

$$\int_0^\infty a(r)\, r^{n-1}\, dr = \int_0^\infty \left(\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} A(rx')\, dx'\right) r^{n-1} dr =$$

$$= (\text{const}) \int_{\mathbb{R}^n} A(x)\, dx = 0$$

En cuanto al tamaño de a(r) siempre tenemos la desigualdad:

$$|a(r)| = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \left|\int_{\Sigma_{n-1}} A(rx')\, dx'\right| \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} |A(rx')|\, dx' \leq$$

$$\leq \frac{(\text{const})}{\delta^n}$$

Si $r_0 < \delta$, esta desigualdad es suficiente para asegurarse que

$$|a(r)| \leq \frac{(\text{const})}{\int_{r_0}^{r_0+\delta} r^{n-1}\, dr}$$

En efectp

$$\int_{r_0}^{r_0+\delta} r^{n-1}\, dr \leq (r_0+\delta)^{n-1}\, \delta \leq (\text{const})\, \delta^n$$

Así pues

$$\frac{(\text{const})}{\delta^n} \leq \frac{(\text{const})}{\int_{r_0}^{r_0+\delta} r^{n-1} dr}$$

Si $r_0 > \delta$, vamos a obtener una estimación más precisa del tamaño de $|a(r)|$. Consideremos N rotaciones $\{\rho_1, \ldots, \rho_N\}$ tales que las bolas

$$\{\rho_1^{-1}(B), \ldots, \rho_N^{-1}(B)\}$$

sean disjuntas. En número N será $[r_0^{n-1}/\delta^{n-1}]$ es decir: la parte entera de $(r_0/\delta)^{n-1}$. Para cualquiera de estas rotaciones ρ_j, se tiene:

$$\int_{\Sigma_{n-1}} A(\rho_j(rx'))\, dx' = \int_{\Sigma_{n-1}} A(rx')\, dx'.$$

Así pues:

$$a(r) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} A(r\rho_j x')\, dx'$$

para cada j y por lo tanto:

$$a(r) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} A(\rho_j r x')\, dx' =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} \sum_{j=1}^{N} A(\rho_j r x')\, dx'.$$

Para r fijo, cada rx' pertenece a lo más a una de las bolas $\rho_j^{-1}(B)$; de forma que, de hecho, la suma

$$\sum_{j=1}^{N} A(\rho_j\, r x')$$

tiene a lo más un único sumando para cada x'. Por ello

$$\left| \sum_{j=1}^{N} A(\rho_j r x') \right| \leqslant \frac{(\text{const})}{\delta^n}.$$

Entonces

$$|a(r)| \leqslant \frac{1}{[r_0^{n-1}/\delta^{n-1}]} \frac{(\text{const})}{\delta^n} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{r_0^{n-1}}{\delta^{n-1}}} \frac{(\text{const})}{\delta^n} =$$

$$= \frac{(\text{const})}{r_0^{n-1} . \delta} \leqslant \frac{(\text{const})}{(r_0+\delta)^{n-1} \delta} \leqslant \frac{(\text{const})}{\int_{r_0}^{r_0+\delta} r^{n-1}\, dr}$$

Así hemos visto que a(r)/(const) es siempre un $(1,\infty)$-átomo de t.h. con respecto al peso $|r|^{n-1}$. De esta forma obtenemos la descomposición buscada

$$f(r)\,\chi_{[0,\infty[}(r) = \sum_i \lambda_i(\text{const}) \frac{a_i(r)}{(\text{const})}$$

y vemos que:

$$\sum_i |\lambda_i|(\text{const}) \leq (\text{const})\, ||F||_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

Supongamos, recíprocamente, que

$$f(r)\,\chi_{[0,\infty[}(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i(r)$$

para casi todo r $\sum|\lambda_i| < \infty$ y cada a_i es un $(1,\infty)$-átomo de t.h. con respecto al peso $|r|^{n-1}$ que además vive en $[0,\infty[$.

En general, sea a(r) un $(1,\infty)$-átomo de t.h. con respecto al peso $|r|^{n-1}$ y que además viva en $[0,\infty[$. Sea $[r_0, r_0+\delta]$ el mínimo intervalo cerrado que contiene al soporte de a. Que a es un átomo significa:

$$\int_0^{\infty} a(r)\, r^{n-1}\, dr = 0 \quad \text{y} \quad |a(r)| \leq \frac{1}{\int_{r_0}^{r_0+\delta} r^{n-1}\, dr}$$

Asociemos a a la función radial $A(x) = a(|x|)$ definida para $x \in \mathbb{R}^n$. Mediante este procedimiento asociaremos a cada átomo a_i de la descomposición

$$f(r)\,\chi_{[0,\infty[}(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, a_i(r),$$

una función radial $A_i(x) = a_i(|x|)$. Entonces la función radial

$$F(x) = f(|x|) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i(|x|) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i A_i(x).$$

Volviendo a nuestro átomo general $a(r)$ con soporte contenido en $[r_0, r_0+\delta]$ estudiaremos la función radial $A(x) = a(|x|)$ a que da lugar. Necesitaremos distinguir dos casos. Primero si $r_0 < \delta$ existe una constante (independiente de a) tal que (const)$A(x)$ es un $(1,\infty)$-átomo en $H^1(\mathbb{R}^n)$. En efecto $A(x)$ vive en la bola de centro 0 y de radio $r_0+\delta$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} a(|x|)\, dx = |\Sigma_{n-1}| \int_0^\infty a(r)\, r^{n-1}\, dr = 0$$

y

$$|A(x)| = |a(|x|)| \leq \frac{1}{\int_{r_0}^{r_0+\delta} r^{n-1} dr} \leq \frac{(\text{const})}{(r_0+\delta)^{n-1}\delta} \leq$$

$$\leq \frac{(\text{const})}{(r_0+\delta)^n} = \frac{(\text{const})}{|B(0, r_0+\delta)|}$$

Si $\delta < r_0$ todavía podemos descomponer A como combinación lineal finita de átomos en $H^1(\mathbb{R}^n)$ con la sum a de los valores absolutos de los coeficientes acotada por una constante (independiente de A). En efecto, hacemos una partición de la región

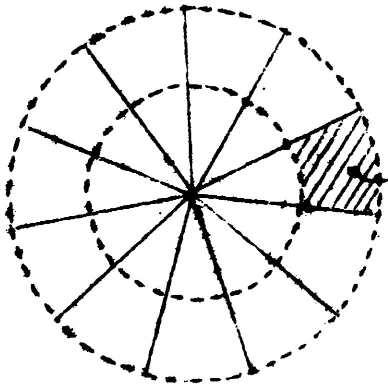
$$r_0 < |x| < r_0+\delta \quad \text{en} \quad N = \left[\frac{r_0^{n-1}}{\delta^{n-1}}\right] + 1$$

"cubos esféricos" Q_j de medida $\leq$ (const) δ^n, y ponemos

$$A^{(j)}(x) = A(x)\, \chi_{Q_j}(x)$$

Claramente

$$A(x) = \sum_{j=1}^{N} A^{(j)}(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}\, N\, A^{(j)}(x).$$



Pero $NA^{(j)}(x)$ es un átomo en $H^1(\mathbb{R}^n)$ para cada j. Ante todo $A^{(j)}(x)$ tiene soporte contenido en B_j, la bola más pequeña que contiene a Q_j. Tendremos:

$$|B_j| \leq (\text{const})\ \delta^n$$

donde (const) no depende de A ni de j. También

$$\int_{\mathbb{R}^n} A^{(j)}(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} A(x)\ \chi_{Q_j}(x)\ dx = (\int_{r_0}^{r_0+\delta} a(r)\ r^{n-1} dr).$$

$$\cdot\ (\int_{\Sigma_{n-1}} \chi_{Q_j}(r_0 x')\ dx') = 0.$$

Por último

$$|NA^{(j)}(x)| \leq ([\frac{r_0^{n-1}}{\delta^{n-1}}] + 1)\ \frac{(\text{const})}{(r_0+\delta)^{n-1}\delta} \leq$$

$$\leq (\text{const})\ \frac{r_0^{n-1}}{\delta^{n-1}}\ \frac{1}{(r_0+\delta)^{n-1}\delta} \leq \frac{(\text{const})}{\delta^n} \leq \frac{(\text{const})}{|B_j|}$$

Así pues, sea $r_0 < \delta$ o $\delta < r_0$, siempre tenemos

$$A(x) = \sum_j \alpha_j\ B^{(j)}(x)$$

donde $B^{(j)}$ son átomos de $H^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$\sum_j |\alpha_j| \leq (\text{const})$$

independientemente de A. Volviendo a nuestro problema concreto donde teníamos

$$F(x) = f(|x|) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\ a_i(|x|) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i A_i(x),$$

podemos descomponer cada $A_i(x)$ como

$$A_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ B_i^{(j)}(x)$$

con $B_i^{(j)}$ átomos en $H^1(\mathbb{R})$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| \leq (\text{const})$$

independiente de i. Por lo tanto

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}\ B_i^{(j)}(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_{ij} B_i^{(j)}(x)$$

que es una descomposición atómica con

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_i|\ |\alpha_{ij}| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|\ (\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|) \leq (\text{const}) \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|,$$

que nos dice que $F \in H^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$||F||_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq (\text{const}) \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|$$

c.q.d.

Llamemos $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ al subespacio cerrado de $H^1(\mathbb{R}^n)$ formado por aquellas funciones que son radiales. Llamemos $\mathcal{H}^1_{par}(|r|^{n-1}\ dr)$ al subespacio cerrado de

$\mathfrak{H}^1(|r|^{n-1}\,dr)$ formado por las funciones pares. En virtud de (IV.2.1), el teorema IV.2.2 puede enunciarse de la siguiente forma:

TEOREMA IV.2.3. La aplicación

$$f(r) \longmapsto F(x) = f(|x|)$$

es una equivalencia entre los espacios normados $\mathfrak{H}^1_{par}(|r|^{n-1}\,dr)$ y $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

El teorema III.1.2 nos proporciona otra equivalencia:

$$f(r) \longmapsto f(r)\,|r|^{n-1}$$

entre $\mathfrak{H}^1_{par}(|r|^{n-1}\,dr)$ y $H^1_{par}(\mathbb{R})$.

Introduciendo esta equivalencia en (IV.2.3) obtenemos:

COROLARIO IV.2.4. La aplicación

$$F(x) = f(|x|) \longmapsto f(|r|)|r|^{n-1},$$

es una equivalencia entre $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ y $H^1_{par}(\mathbb{R})$.

Utilizando de nuevo el lema IV.2.1 y llamando $H^1_+(\mathbb{R})$ al subespacio de $H(\mathbb{R})$ formado por las funciones que viven en $[0,\infty[$, obtenemos:

COROLARIO IV.2.5. La aplicación

$$F(x) = f(|x|) \longmapsto f(r)\, r^{n-1}\, \chi_{[0,\infty[}(r)$$

es una equivalencia entre $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ y $H^1_+(\mathbb{R})$.

§3. TRANSFORMADAS DE RIESZ DE FUNCIONES RADIALES

Vimos en (IV.2.5) que una función radial en $\mathbb{R}^n$, $F(x) = f(|x|)$, está en $H^1(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si la función de una variable

$$f(r)\, r^{n-1}\, \chi_{[0,\infty]}(r)$$

está en $H^1(\mathbb{R})$. Por otra parte, $H^1(\mathbb{R}^n)$ está formado por las funciones F en $L^1(\mathbb{R}^n)$ tales que para cada $j = 1, \ldots, n$ la j-ésima transformada de Riesz

$$(R_jF)\,(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} F(y)\, \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}\, dy$$

está también en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Por tanto, parece natural investigar la relación entre las transformadas de Riesz de una función radial en $\mathbb{R}^n$, $F(x) = f(|x|)$, y la transformada de Hilbert de

$$f(r)\, r^{n-1}\, \chi_{[0,\infty]}(r).$$

El estudio de esta relación conducirá a una demostración de (IV.2.5) sin utilizar la descomposición atómica de $H^1(\mathbb{R}^n)$.

La primera observación que hemos de hacer es que para una función radial $F(x)$, las n transformadas de Riesz no son esencialmente diferentes. Existe una función radial $(RF)(x)$ tal que para $j = 1, \ldots, n$

$$\text{(IV.3.1)} \qquad (R_jF)(x) = -\frac{1}{n-1}\, \frac{x_j}{|x|}\, (RF)(x).$$

En efecto: R_jF se obtiene convolviendo F con la distribución v.p. $\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ (la convolución tiene sentido como valor principal). Pero

$$\text{v.p.}\ \frac{x_j}{|x|^{n+1}} = -\frac{1}{n-1}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right)$$

Así pues, para $F(x) = f(|x|)$ suficientemente buena

$$(R_jF)(x) = \text{v.p.}\int_{\mathbb{R}^n} F(y)\,\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}\,dy =$$

$$= -\frac{1}{n-1}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\int_{\mathbb{R}^n} F(y)\,\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\,dy$$

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y)\,\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\,dy$$

es una función radial. Sea $G(x) = g(|x|)$. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_j} G(x) = g'(|x|)\,\frac{x_j}{|x|}$$

y por lo tanto, si $|x| = r$ y $\mathbf{1}$ es cualquier punto en la esfera unidad Σ_{n-1}, tendremos:

$$(R_jF)(x) = -\frac{1}{n-1}\ \frac{x_j}{|x|}\ \frac{d}{dr}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(y)\,\frac{1}{|r\mathbf{1}-y|^{n-1}}\,dy\right)$$

que es (IV.3.1) con

$$(RF)(x) = \frac{d}{dr}\ \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(y)\,\frac{1}{|r\mathbf{1} - y|^{n-1}}\,dy\right)$$

$$(R_jF)(x) = -\frac{1}{n-1}\ \frac{x_j}{|x|}\,(RF)(x) \implies$$

$$\implies |(R_jF)(x)|^2 = \frac{1}{(n-1)^2}\ \frac{x_j^2}{|x|^2}\,|(RF)(x)|^2 \implies$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |(R_jF)(x)|^2 = \frac{1}{(n-1)^2} |(RF)(x)|^2$$

Así pues

$$\text{(IV.3.2)} \qquad |(RF)(x)| = (n-1) \{ \sum_{j=1}^{n} |(R_jF)(x)|^2 \}^{1/2}$$

Por lo tanto

$$|(R_jF)(x)| \leq \frac{1}{n-1} |(RF)(x)|$$

para j = 1, ..., n y también

$$|(RF)(x)| \leq (n-1) \sum_{j=1}^{n} |(R_jF)(x)|$$

de donde se sigue que para una función radial $F(x)$ en $\mathbb{R}^n$, el hecho de que todas las transformadas de Riesz $(R_jF)(x)$ estén en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es equivalente al hecho de que $(RF)(x)$ esté en $L^1(\mathbb{R}^n)$. En otras palabras: el operador radial R caracteriza $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora vamos a ver el operador R como un operador en la recta aplicado a

$$f(s)\, s^{n-1}\, \chi_{[0,\infty]}(s).$$

Si $|x| = r$, tenemos:

$$(RF)(x) = \frac{d}{dr} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(y) \frac{1}{|r\mathbf{1} - y|^{n-1}} dy \right) =$$

$$= \frac{d}{dr} \left(\int_0^\infty f(s)\, s^{n-1} \left(\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{1}{|r\mathbf{1} - sy'|^{n-1}} dy' \right) ds \right) =$$

$$= \text{v.p.} \int_0^\infty f(s)\, s^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{dy'}{|r\mathbf{1} - sy'|^{n-1}} \right) ds.$$

Llamemos

$$\mathcal{R}(r,s) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{dy'}{|r\mathbf{1} - sy'|^{n-1}} \right)$$

Entonces, para una función radial $F(x) = f(|x|)$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ o, lo que es lo mismo, $f(r)$ en $L^1([0,\infty[;r^{n-1}dr)$; tenemos:

$F(x)$ está en $H^1(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (RF)(x)$ está en $L^1(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ v.p. $\int_0^\infty f(s)\, s^{n-1} \mathcal{R}(r,s)\, ds$ está en $L^1([0,\infty[;r^{n-1}\, dr)$

Calculemos explícitamente el núcleo.

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{dy'}{|r\mathbf{1} - sy'|^{n-1}} = \int_{\Sigma_{n-1}} \frac{dy'}{(r^2+s^2-2rs\ \langle \mathbf{1},y'\rangle)^{(n-1)/2}} =$$

$$= c_n \int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{n-2}\, d\theta}{(r^2+s^2-2rs\cos\theta)^{(n-1)/2}} ;$$

c_n depende tan solo de n.

Muckenhoupt y Stein han estudiado con "métodos complejos" el espacio de funciones $f(r)$ en $L^1([0,\infty[;\ r^{2\lambda}dr)$ tales que

v.p. $\int_0^\infty f(s)\, s^{2\lambda} \mathcal{R}_\lambda(r,s)\, ds$

está también en $L^1([0,\infty[,\ r^{2\lambda}\, dr)$, con

$$\mathcal{R}_\lambda(r,s) = c_\lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{2\lambda-1}}{(r^2+s^2-2rs\cos\theta)^\lambda}\,d\theta\right).$$

Véase |11|. Para $\lambda = \frac{n-1}{2}$ obtenemos el espacio de funciones radiales en $H^1(\mathbb{R}^n)$. En general estudiaremos el núcleo

$$\mathcal{R}(r,s) \quad \text{para} \quad \lambda \geq \frac{1}{2}.$$

Como primer paso analizamos la situación para $\lambda = 1$, es decir, $n = 3$. En este caso el núcleo se puede calcular muy fácilmente. En efecto:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r^2+s^2-2rs\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{2rs}\int_0^\pi \frac{2rs\sin\theta}{r^2+s^2-2rs\cos\theta}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2rs}\left|\log(r^2+s^2-2rs\cos\theta)\right|_0^\pi = \frac{1}{2rs}\log\left\{\left(\frac{r+s}{r-s}\right)^2\right\}$$

Entonces

$$\mathcal{R}(r,s) = (\text{const})\,\frac{1}{2s}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\log\left\{\left(\frac{r+s}{r-s}\right)^2\right\}\right) =$$

$$= -(\text{const})\left(\frac{2}{r}\frac{1}{r^2-s^2} + \frac{1}{r^2 s}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right|\right).$$

Sabemos que:

(IV.3.3) $\qquad F(x)$ está en $H^1(\mathbb{R}^n) \iff$

$$\iff \text{v.p.}\int_0^\infty f(s)s^2\mathcal{R}(r,s)\,ds \text{ está en } L^1([0,\infty[;r^2\,dr) \iff$$

$$\iff \text{v.p.}\int_0^\infty f(s)\,s^2(r^2\mathcal{R}(r,s))\,ds \text{ está en } L^1([0,\infty[).$$

Estamos, por tanto, interesados en el núcleo:

$$r^2\mathcal{R}(r,s) = -(\mathrm{const})\left(\frac{2r}{r^2-s^2} + \frac{1}{s}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right|\right) =$$

$$= -(\mathrm{const})\left(\frac{1}{r-s} + \frac{1}{r+s} + \frac{1}{s}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right|\right)$$

Por lo tanto:

$$\text{(IV.3.4)} \qquad \text{v.p.} \int_0^\infty f(s)\, s^2(r^2\mathcal{R}(r,s))\, ds =$$

$$= -(\mathrm{const})\Big((f(s)s^2\chi_{[0,\infty[}(s))^\sim(r) - (f(s)s^2\chi_{[0,\infty[}(s))^\sim(-r) +$$

$$+ \int_0^\infty f(s)\, s^2\, \frac{1}{s}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right|\, ds.$$

<u>LEMA IV.3.5.</u> <u>Si</u> $g(r)$ <u>vive en</u> $[0,\infty[$ <u>y está en</u> $H^1(\mathbb{R})$ (<u>es decir</u>: $g(r)$ <u>está en</u> $H^1_+(\mathbb{R})$), <u>entonces</u>:

$$\int_0^\infty g(s)\, \frac{1}{s}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right|\, ds \quad \underline{\text{está en}} \quad L^1([0,\infty[).$$

<u>DEMOSTRACION.</u>

$$\frac{1}{s}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right|$$

es un núcleo positivo. Lo descomponemos utilizando el desarrollo en serie de Taylor de la función analítica

$$\log\left|\frac{1+a}{1-a}\right| = 2\left(a + \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \ldots + \frac{a^{2k+1}}{2k+1} + \ldots\right)$$

para $|a| < 1$.

Para $s < r$:

$$\frac{1}{s}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right| = \frac{1}{s}\log\left|\frac{1+\frac{s}{r}}{1-\frac{s}{r}}\right| =$$

$$= 2\,\frac{1}{s}\,\left(\frac{s}{r} + \frac{1}{3}\left(\frac{s}{r}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{s}{r}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2k+1}\left(\frac{s}{r}\right)^{2k+1} + \ldots\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{3}\,\frac{s^2}{r^3} + \frac{1}{5}\,\frac{s^4}{r^5} + \ldots + \frac{1}{2k+1}\,\frac{s^{2k}}{r^{2k+1}} + \ldots\right).$$

Para $r < s$:

$$\frac{1}{s}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right| = \frac{1}{s}\log\left|\frac{1+\frac{r}{s}}{1-\frac{r}{s}}\right| =$$

$$= 2\,\frac{1}{s}\,\left(\frac{r}{s} + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{s}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{r}{s}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2k+1}\left(\frac{r}{s}\right)^{2k+1} + \ldots\right) =$$

$$= 2\left(\frac{r}{s^2} + \frac{1}{3}\,\frac{r^3}{s^4} + \frac{1}{5}\,\frac{r^5}{s^6} + \ldots + \frac{1}{2k+1}\,\frac{r^{2k+1}}{s^{2k+2}} + \ldots\right)$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty g(s)\,\frac{1}{s}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right|\,ds =$$

$$= \int_0^r g(s)\,\frac{1}{s}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right|\,ds + \int_r^\infty g(s)\,\frac{1}{s}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right|\,ds =$$

$$= 2\{\left(\frac{1}{r}\int_0^r g(s)\,ds + \frac{1}{3}\,\frac{1}{r^3}\int_0^r g(s)\,s^2\,ds + \frac{1}{5}\,\frac{1}{r^5}\int_0^r g(s)s^4 ds +\right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{1}{2k+1}\,\frac{1}{r^{2k+1}}\int_0^r g(s)\,s^{2k}\,ds + \ldots\right) +$$

$$+ \left(r\int_r^\infty \frac{g(s)}{s^2}\,ds + \frac{1}{3}\,r^3\int_r^\infty \frac{g(s)}{s^4}\,ds + \frac{1}{5}\,r^5\int_r^\infty \frac{g(s)}{s^6}\,ds + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{2k+1}\,r^{2k+1}\int_r^\infty \frac{g(s)}{s^{2k+2}}\,ds + \ldots\right)\}.$$

Vamos a ver ahora que para cada $k \geq 0$, lo operadores:

$$g(r) \longmapsto (A_k g)(r) = \frac{1}{2k+1} \frac{1}{r^{2k+1}} \int_0^r g(s)\, s^{2k}\, ds$$

y

$$g(r) \longmapsto (B_k g)(r) = \frac{1}{2k+1} r^{2k+1} \int_r^\infty \frac{g(s)}{s^{2k+1}}\, ds$$

son acotados de $H^1_+(\mathbb{R})$ en $L^1([0,\infty[)$ y además sus normas como operadores de $H^1_+(\mathbb{R})$ en $L^1([0,\infty[)$ forman una serie convergente. De hecho, para cualquier $k \geq 0$, B_k es un operador acotado en $L^1([0,\infty[)$. Basta aplicar el teorema de Fubini

$$\int_0^\infty |(B_k g)(r)|\, dr = \int_0^\infty \left|\frac{1}{2k+1} r^{2k+1} \int_r^\infty \frac{g(s)}{s^{2k+1}}\, ds\right| dr \leq$$

$$\leq \frac{1}{2k+1} \int_0^\infty r^{2k+1} \int_r^\infty \frac{|g(s)|}{s^{2k+1}}\, ds\, dr =$$

$$= \frac{1}{2k+1} \int_0^\infty \left(\int_0^s r^{2k+1}\, dr\right) \frac{|g(s)|}{s^{2k+1}}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2k+1} \frac{1}{2k+2} \int_0^\infty |g(s)|\, ds < \infty.$$

También vemos que

$$||B_k|| \leq \frac{1}{2k+1} \frac{1}{2k+2}$$

de forma que

$$\sum_0^\infty ||B_k|| < \infty.$$

Si $k > 0$, también A_k es un operador acotado en $L^1([0,\infty[)$. La demostración es la misma:

$$\int_0^\infty |(A_k g)(x)|dr = \int_0^\infty \left|\frac{1}{2k+1}\ \frac{1}{r^{2k+1}} \int_0^r g(s)\ s^{2k}\ ds\right|\ dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2k+1} \int_0^\infty \frac{1}{r^{2k+1}} \int_0^r |g(s)|\ s^{2k}\ ds\ dr =$$

$$= \frac{1}{2k+1} \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \frac{dr}{r^{2k+1}}\right) |g(s)|\ s^{2k}\ ds =$$

$$= \frac{1}{2k+1}\ \frac{1}{2k} \int_0^\infty |g(s)|ds < \infty .$$

También vemos que para $k > 0$

$$||A_k|| \leqslant \frac{1}{2k+1}\ \frac{1}{2k};$$

de forma que

$$\sum_1 ||A_k|| < \infty .$$

Para $k = 0$ el argumento falla ya que

$$\int_s^\infty dr/r = \infty .$$

Está claro que A_0 no aplica $L^1([0,\infty[)$ en sí mismo. Por ejemplo si $g = \chi_{[0,1]}$, entonces

$$A_0(g)(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < r \leqslant 1 \\ 1/r & \text{si} \quad 1 < r \end{cases}$$

que no está en $L^1([0,\infty[)$.

Sin embargo A_0 es un operador acotado de $H^1_+(\mathbb{R})$ en $L^1([0,\infty[)$. En efecto: si a es un átomo y el intervalo más pequeño que contiene al soporte de a es $I = [r_0,r_0+\delta]$, $r_0,\delta > 0$; entonces $A_0(a)$ tiene también el soporte contenido en I, ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(s)\, ds = 0.$$

También

$$|A_0(a)(r)| = \left|\frac{1}{r}\int_0^r a(s)\, ds\right| \leq \frac{1}{r}\int_0^r |a(s)|ds \leq \frac{1}{|I|}$$

Así pues:

$$\int_0^{\infty} |A_0(a)(r)|\, dr \leq \int_I \frac{1}{|I|}\, dr = 1.$$

Esto termina la demostración de (IV.3.5).

c.q.d.

(IV.3.5) junto con (IV.3.3) y (IV.3.4) inplica:

TEOREMA IV.3.6. Si $f(s)\, s^2$ está en $H^1_+(\mathbb{R})$, entonces la función radial definida en $\mathbb{R}^3$ como $F(x) = f(|x|)$ está en $H^1(\mathbb{R}^3)$ y

$$||F||_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leq (\text{const})\, ||f(s)\, s^2||_{H^1(\mathbb{R})}$$

Este resultado está contenido en el corolario IV.2.5. pero ahora la demostración no se basa en la geometría de $\mathbb{R}^3$ y puede ser extendida a los casos no euclídeos estudiados por Stein y Muckenhoupt en [11].

Para $\lambda \geq 1/2$, consideraremos el núcleo $r^{2\lambda}\mathcal{R}_\lambda(r,s)$ donde

$$\mathcal{R}_\lambda(r,s) = c_\lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{2\lambda-1}}{(r^2+s^2-2rs\cos\theta)^\lambda} d\theta \right)$$

En particular para $\lambda = (n-1)/2$ con n entero positivo, obtenemos el núcleo correspondiente a las transformadas de Riesz de una función radial en $\mathbb{R}^n$.

$$K_\lambda(r,s) = \int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{2\lambda-1}}{(r^2+s^2-2rs\cos\theta)^\lambda} d\theta = K_\lambda(s,r)$$

Por tanto, podemos suponer $s < r$. Entonces:

$$K_\lambda(r,s) = \int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{2\lambda-1}}{(r^2+s^2-2rs\cos\theta)^\lambda} d\theta =$$

$$= \frac{1}{r^{2\lambda}} \int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{2\lambda-1}}{(1+(\frac{s}{r})^2 - 2(\frac{s}{r})\cos\theta)^\lambda} d\theta$$

Pero para $0 < a < 1$:

$$\int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{2\lambda-1}}{(1+a^2-2a\cos\theta)} d\theta =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^{(2\lambda-1)/2}\,(1-t^2)^{-1/2}}{(1+a^2-2at)^\lambda} = \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^{\lambda-1} dt}{(1+a^2-2at)^\lambda}$$

Para calcular esta integral utilizamos el desarrollo en polinomio de Gegenbauer:

(IV.3.7) $$\frac{1}{(1+a^2-2at)^\lambda} = \sum_{k=0}^\infty C_k^\lambda(t)\, a^k$$

(véase [5] volúmen II, página 177, fórmula (29)). Entonces

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^{\lambda-1} dt}{(1+a^2-2at)^\lambda} = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\lambda-1} \left(\sum_{k=0}^\infty C_k^\lambda(t)\, a^k \right) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty a^k \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\lambda-1} C_k^\lambda(t)\, dt$$

Ahora para calcular

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\lambda-1}\, C_k^{\lambda}(t)\, dt$$

utilizamos la fórmula (20) de la página 283 del volúmen II de [6] que dice:

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\lambda-1}\, C_k^{\lambda}\,(\cos\alpha\, \cos\beta + t \sin\alpha \sin\beta)\, dt =$$

$$= \frac{2^{2\lambda-1}\, k!\, (\Gamma(\lambda))^2}{\Gamma(2\lambda+k)}\, C_k^{\lambda}(\cos\alpha)\, C_k^{\lambda}(\cos\beta)$$

En nuestro caso $\cos\alpha = \cos\beta = 0$ y $\sin\alpha = \sin\beta = 1$; es decir $\alpha = \beta = \pi/2$. Entonces

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\lambda-1} C_k^{\lambda}(t)\, dt = \frac{2^{2\lambda-1}\, k!\, (\Gamma(\lambda))^2}{\Gamma(2\lambda+k)}\, (C_k^{\lambda}(0))^2$$

Ahora utilizamos la fórmula (19) de la página 175 del volúmen II de |5|, según la cual:

$$C_k^{\lambda}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ \dfrac{(-1)^l (\lambda)_l}{l!} & \text{si } k = 2l \text{ es par} \end{cases}$$

donde

$$(\lambda)_l = \lambda(\lambda+1)\, \ldots\, (\lambda+l-1) = \frac{\Gamma(\lambda+l)}{\Gamma(\lambda)}$$

Por tanto:

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\lambda-1} C_k^{\lambda}(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ \dfrac{2^{2\lambda-1}\, k!\, (\Gamma(\lambda))^2}{\Gamma(2\lambda+k)} \left(\dfrac{(\lambda)_l}{l!}\right)^2 & \text{si } k=2l \text{ es par} \end{cases}$$

Así pues:

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{\lambda-1}\,dt}{(1+a^2-2at)^{\lambda}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} a^{2l} \frac{2^{2\lambda-1}(2l)!\,(\Gamma(\lambda))^2\,((\lambda)_l)^2}{\Gamma(2l+2\lambda)\,(l!)^2}$$

Pero

$$\frac{(2l)!\,(\Gamma(\lambda))^2\,((\lambda)_l)^2}{\Gamma(2l+2\lambda)\,(l!)^2} = \frac{\Gamma(2l+1)(\Gamma(\lambda))^2\,(\frac{\Gamma(\lambda+l)}{\Gamma(\lambda)})^2}{\Gamma(2l+2\lambda)(\Gamma(l+1))^2} =$$

$$= \frac{\Gamma(2l+1)}{\Gamma(2l+2\lambda)} \left(\frac{\Gamma(l+\lambda)}{\Gamma(l+1)}\right)^2$$

La fórmula (4) de la página 47, volúmen I de [5] da la siguiente expresión asintótica:

$$\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)} = z^{\alpha-\beta}(1 + \frac{1}{2} z^{-1}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1) + O(z^{-2}),$$

Así obtenemos, para $l \neq 0$:

$$\frac{\Gamma(2l+1)}{\Gamma(2l+2\lambda)} \left(\frac{\Gamma(l+\lambda)}{\Gamma(l+1)}\right)^2 = 2^{1-2\lambda} \frac{1}{l} (1 + O(\frac{1}{l}))$$

Para $l = 0$ obtenemos una constante que depende de λ. Así pues:

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{\lambda-1}dt}{(1+a^2-2ar)^{\lambda}} = (\text{const}) + \sum_{l=1}^{\infty} a^{2l} \frac{1}{l} (1 + O(\frac{1}{l})) =$$

$$= (\text{const}) + \sum_{l=1}^{\infty} a^{2l} (\frac{1}{l} + O(\frac{1}{l^2})) =$$

$$= (\text{const}) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} a^{2l}(\frac{1}{2l+1} + O(\frac{1}{l^2})) =$$

$$= (\text{const}) + \frac{2}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} a^{2l+1} + \sum_{l=1}^{\infty} a^{2l}\, O(\frac{1}{l^2}) =$$

$$= (\text{const}) + \frac{1}{a} \log \left|\frac{1+a}{1-a}\right| + \sum_{l=1}^{\infty} a^{2l}\, O(\frac{1}{l^2})$$

Así, para $s < r$:

$$K_\lambda(r,s) = \frac{1}{r^{2\lambda}} \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{\lambda-1}\, dt}{(1 + (\frac{s}{r})^2 - 2(\frac{s}{r})t)^\lambda} =$$

$$= \frac{1}{r^{2\lambda}} ((\text{const}) + \frac{r}{s} \log \left|\frac{r+s}{r-s}\right| + \sum_{l=1}^{\infty} (\frac{s}{r})^{2l}\, O(\frac{1}{l^2}))$$

y, por lo tanto

$$\mathcal{R}_\lambda(r,s) = C_\lambda \frac{\partial}{\partial r} (\frac{(\text{const})}{r^{2\lambda}} + \frac{1}{r^{2\lambda-1} s} \log \left|\frac{r+s}{r-s}\right| +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{s^{2l}}{r^{2l + 2\lambda}}\, O(\frac{1}{l^2})) =$$

$$= C_\lambda \{\frac{(\text{const})}{r^{2\lambda+1}} - \frac{1}{r^{2\lambda-1}} \frac{2}{r^2-s^2} - \frac{2\lambda-1}{r^{2\lambda} s} \log\left|\frac{r+s}{r-s}\right| +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{s^{2l}}{r^{2l + 2\lambda + 1}}\, O(\frac{1}{l})\} =$$

$$= C_\lambda \{\frac{(\text{const})}{r^{2\lambda+1}} - \frac{1}{r^{2\lambda-1}} \frac{2}{r^2-s^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{s^{2l}}{r^{2l+2\lambda+1}}\, O(\frac{1}{l})\}$$

Entonces para $s < r$, nuestro núcleo es:

$$r^{2\lambda}\mathcal{R}_\lambda(r,s) = C_\lambda \{\frac{(\text{const})}{r} - \frac{2r}{r^2-s^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{s^{2l}}{r^{2l+1}}\, O(\frac{1}{l})\} =$$

$$= C_\lambda \{\frac{(\text{const})}{r} - \frac{1}{r-s} - \frac{1}{r+s} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{s^{2l}}{r^{2l+1}}\, O(\frac{1}{l})\}$$

A continuación estudiamos la situación para s > r.

$$K_\lambda(r,s) = K_\lambda(s,r) = \frac{1}{s^{2\lambda}}\left((\text{const}) + \frac{s}{r}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{r}{s}\right)^{2l} O\left(\frac{1}{l^2}\right)\right).$$

Entonces

$$\mathcal{R}_\lambda(r,s) = \frac{C_\lambda}{s^{2\lambda}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{s}{r}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right| + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{r}{s}\right)^{2l} O\left(\frac{1}{l^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{C_\lambda}{s^{2\lambda}}\left\{\frac{s}{r}\,\frac{2s}{s^2-r^2} - \frac{s}{r^2}\log\left|\frac{r+s}{r-s}\right| + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{r^{2l-1}}{s^{2l}}\,O\left(\frac{1}{l}\right)\right\} =$$

$$= \frac{C_\lambda}{s^{2\lambda}}\left\{-\frac{s^2}{r^2}\,\frac{2r}{r^2-s^2} + O(1)\,\frac{r}{s^2} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{r^{2l+1}}{s^{2l+2}}\,O\left(\frac{1}{l}\right)\right\}$$

Para s > r el núcleo será

$$r^{2\lambda}\mathcal{R}_\lambda(r,s) = C_\lambda\left\{-\left(\frac{r}{s}\right)^{2\lambda-2}\frac{2r}{r^2-s^2} + O(1)\,\frac{r^{2\lambda+1}}{s^{2\lambda+2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{r^{2l+2\lambda+1}}{s^{2l+2\lambda+2}}\,O\left(\frac{1}{l}\right)\right\} =$$

$$= C_\lambda\left\{-\left(\frac{r}{s}\right)^{2\lambda-2}\left(\frac{1}{r-s} + \frac{1}{r+s}\right) + O(1)\,\frac{r^{2\lambda+1}}{s^{2\lambda+2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{r^{2l+2\lambda+1}}{s^{2l+2\lambda+2}}\,O\left(\frac{1}{l}\right)\right\}$$

Entonces

$$\text{v.p.}\int_0^\infty (f(s)\,s^{2\lambda})(r^{2\lambda}\mathcal{R}_\lambda(r,s))\,ds =$$

$$= C_\lambda\{(\text{const})\ \frac{1}{r}\int_0^r f(s)\ s^{2\lambda}ds - \text{v.p.}\int_0^\infty (f(s)s^{2\lambda})\ \frac{1}{r-s}\ ds +$$

$$+ \int_r^\infty (1 - (\tfrac{r}{s})^{2\lambda-2})\ \frac{1}{r-s}\ (f(s)s^{2\lambda})ds + \int_0^\infty (f(s)s^{2\lambda})\frac{1}{-r-s}\ ds +$$

$$+ \int_r^\infty (1 - (\tfrac{r}{s})^{2\lambda-2})\ \frac{1}{r+s}\ (f(s)\ s^{2\lambda})\ ds +$$

$$+ \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{r^{2l+1}}\int_0^r (f(s)s^{2\lambda})\ s^{2l}\ ds\ O(\tfrac{1}{l}) +$$

$$+ O(1)\ r^{2\lambda+1}\int_r^\infty (f(s)\ s^{2\lambda})\ \frac{1}{s^{2\lambda+2}}\ ds +$$

$$+ \sum_{l=1}^\infty r^{2l+2\lambda+1}\int_r^\infty (f(s)s^{2\lambda})\ \frac{1}{s^{2l+2\lambda+2}}\ ds\ O(\tfrac{1}{l})\}$$

La situación no es muy diferente del caso $\lambda = 1$ estudiado previamente.

$$\text{v.p.}\int_0^\infty (f(s)s^{2\lambda})\ \frac{1}{r-s}\ ds = (f(s)\ s^{2\lambda})^\sim(r);$$

$$\int_0^\infty (f(s)s^{2\lambda})\ \frac{1}{-r-s}\ ds = (f(s)\ s^{2\lambda})^\sim(-r)$$

$$\frac{1}{r}\int_0^r f(s)\ s^{2\lambda}ds = A_0\ (f(s)\ s^{2\lambda})(r).$$

Sabemos que A_0 es acotado de $H^1_+(\mathbb{R})$ en $L^1([0,\infty[)$. Para $l > 0$:

$$\frac{1}{r^{2l+1}}\int_0^r (f(s)s^{2\lambda})s^{2l}\ ds = (2l+1)A_l(f(s)s^{2\lambda})(r)$$

y A_l aplica $L^1([0,\infty[)$ en si mismo con norma $O(\frac{1}{l^2})$. También

$$r^{2l+2\lambda+1}\int_r^\infty (f(s)\ s^{2\lambda})\ \frac{1}{s^{2l+2\lambda+2}}\ ds =$$

$$= (2(l+\lambda) + 1)\ B_{l+\lambda}(f(s)\ s^{2\lambda})(r)$$

y $B_{1+\lambda}$ aplica $L^1([0,\infty[)$ en sí mismo con norma $O(\frac{1}{(1+\lambda)^2})$.

Los únicos operadores cuyo comportamiento nos falta analizar son:

$$g(r) \longmapsto \int_r^\infty (1-(\frac{r}{s})^{2\lambda-2}) \frac{1}{r-s} g(s)\, ds$$

y

$$g(r) \longmapsto \int_r^\infty (1-(\frac{r}{s})^{2\lambda-2}) \frac{1}{r+s} g(s)\, ds$$

$$\int_r^\infty (1-(\frac{r}{s})^{2\lambda-2}) \frac{1}{r-s} g(s)\, ds = \int_r^\infty \frac{s^{2\lambda-2} - r^{2\lambda-2}}{s^{2\lambda-2}} \frac{1}{r-s} g(s)\, ds$$

$\lambda \geq 1/2$, es decir $2\lambda - 2 \geq -1$. Estudiemos el operador

$$g(r) \longmapsto \int_r^\infty \frac{s^\alpha - r^\alpha}{s^\alpha} \frac{1}{r-s} g(s)\, ds; \ \alpha \geq -1$$

Para $\alpha \geq 1$,

$$\int_r^\infty \frac{s^\alpha - r^\alpha}{s^\alpha} \frac{1}{r-s} g(s)\, ds = - \int_r^\infty \frac{s^\alpha - r^\alpha}{s - r} \frac{1}{s^\alpha} g(s)\, ds$$

$$g(r) \longmapsto \int_r^\infty \frac{s^\alpha - r^\alpha}{s - r} \frac{1}{s^\alpha} g(s)\, ds$$

es un operador positivo,

$$\frac{s^\alpha - r^\alpha}{s - r} \leq (\text{const})\, s^{\alpha-1}$$

de forma que:

$$\int_0^\infty \left|\int_r^\infty \frac{s^\alpha - r^\alpha}{s-r} \frac{1}{s^\alpha} g(s)\, ds\right| dr \leq (\text{const}) \int_0^\infty \int_r^\infty \frac{|g(s)|}{s}\, ds\, dr =$$

$$= (\text{const}) \int_0^\infty \left(\int_0^s dr\right) \frac{|g(s)|}{s} \leq (\text{const}) \int_0^\infty |g(s)|ds$$

Así pues, para $\alpha \geq 1$, nuestro operador es acotado en $L^1([0,\infty[)$.

Sea ahora $0 < \alpha < 1$. Entonces $s^\alpha - r^\alpha \leq (s-r)^\alpha$. Así

$$\frac{s^\alpha - r^\alpha}{s - r} \leq \frac{1}{(s-r)^{1-\alpha}}.$$

Ahora bien:

$$\int_0^\infty \left|\int_r^\infty \frac{s^\alpha - r^\alpha}{s-r} \frac{1}{s^\alpha} g(s)\, ds\right| dr \leq \int_0^\infty \int_r^\infty \frac{1}{(s-r)^{1-\alpha}} \frac{|g(s)|}{s^\alpha}\, ds\, dr =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^s \frac{dr}{(s-r)^{1-\alpha}}\right) \frac{|g(s)|}{s^\alpha}\, ds = \int_0^\infty \left(\int_0^s \frac{du}{u^{1-\alpha}}\right) \frac{|g(s)|}{s^\alpha}\, ds =$$

$$= (\text{const}) \int_0^\infty |g(s)|\, ds.$$

Hemos visto así que para cualquier $\alpha > 0$ el operador está acotado en $L^1([0,\infty[)$. Para $\alpha = 0$ obtenemos el operador 0.

Consideremos el caso $-1 < \alpha < 0$, es decir $\alpha = -\beta$ con $0 < \beta < 1$. Entonces

$$\int_r^\infty \frac{s^\alpha - r^\alpha}{s^\alpha} \frac{1}{r-s} g(s)\, ds =$$

$$= \int_r^\infty \frac{r^\alpha - s^\alpha}{s^\alpha} \frac{1}{s-r} g(s)\, ds = \int_r^\infty \frac{\frac{1}{r^\beta} - \frac{1}{s^\beta}}{1/s^\beta} \frac{1}{s-r} g(s)\, ds =$$

$$= \int_r^\infty \frac{(s^\beta - r^\beta)/(r^\beta s^\beta)}{1/s^\beta} \frac{1}{s-r} g(s)\, ds =$$

$$= \int_r^\infty \frac{s^\beta - r^\beta}{r^\beta} \, \frac{1}{s-r} \, g(s) \, ds$$

Pero

$$\frac{s^\beta - r^\beta}{s - r} \leqslant \frac{(s-r)^\beta}{s - r} = \frac{1}{(s-r)^{1-\beta}}$$

Así pues

$$\int_0^\infty \left| \int_r^\infty \frac{s^\beta - r^\beta}{r^\beta} \, \frac{1}{s-r} \, g(s) \, ds \right| dr \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \int_r^\infty \frac{1}{r^\beta} \frac{1}{(s-r)^{1-\beta}} |g(s)| \, ds \, dr =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^s \frac{1}{r^\beta} \, \frac{1}{(s-r)^{1-\beta}} \, dr \right) |g(s)| \, ds =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^1 \frac{1}{u^\beta} \frac{1}{(1-u)^{1-\beta}} \, du \right) |g(s)| \, ds \leqslant (\text{const}) \int_0^\infty |g(s)| ds$$

Por lo tanto, también en este caso tenemos un operador acotado en $L^1([0,\infty[)$.

Queda por considerar el caso $\alpha = -1$ que corresponde a $\lambda = 1/2$, es decir a $n = 2$. En este caso

$$\int_r^\infty \frac{1/r - 1/s}{1/s} \, \frac{1}{s-r} \, g(s) \, ds = \int_r^\infty \frac{\frac{s-r}{rs}}{1/s} \, \frac{1}{s-r} \, g(s) \, ds =$$

$$= \frac{1}{r} \int_r^\infty g(s) \, ds.$$

Este operador es acotado de $H^1_+(\mathbb{R})$ en $L^1([0,\infty[)$ ya que para un átomo $a(s)$:

$$\frac{1}{r}\int_r^{\infty} a(s)\, ds = -\frac{1}{r}\int_0^r a(s)\, ds = -A_0\, (a)(r).$$

A continuación estudiamos el operador

$$g(r) \longmapsto \int_r (1-(\frac{r}{s})^{2\lambda-2})\, \frac{1}{r+s}\, g(s)ds$$

De hecho

$$g(r) \longmapsto \int_r \frac{1}{r+s}\, g(s)\, ds$$

es un operador acotado en $L^1([0,\infty[)$, ya que:

$$\int_0^{\infty} \left|\int_r^{\infty} \frac{g(s)}{r+s}\, ds\right|\, dr \leqslant \int_0^{\infty}\int_r^{\infty} \frac{|g(s)|}{s}\, ds\, dr \leqslant \int_0^{\infty} |g(s)|\, ds$$

Así pues, tenemos que considerar únicamente el operador

$$g(r) \longmapsto \int_r^{\infty} (\frac{r}{s})^{2\lambda-2}\, \frac{1}{r+s}\, g(s)\, ds$$

Si $2\lambda-2 \geqslant 0$, es decir, si $\lambda \geqslant 1$ entonces, puesto que $(\frac{r}{s})^{2\lambda-2} \leqslant 1$ el estudio se reduce al del operador

$$\int_r^{\infty} \frac{1}{r+s}\, g(s)\, ds$$

que ya sabemos que es acotado. Consideremos ahora

$$g(r) \longmapsto \int_r^{\infty} (\frac{r}{s})^{-\beta}\, \frac{1}{r+s}\, g(s)\, ds.$$

con $0 < \beta < 1$, es decir:

$$g(r) \longmapsto \int_r^\infty (\frac{s}{r})^\beta \frac{1}{s+r}\, g(s)\, ds.$$

Entonces

$$\int_0^\infty \left|\int_r^\infty \frac{s^\beta}{r^\beta(r+s)} \; g(s)\, ds\right| dr \leq \int_0^\infty \int_r^\infty \frac{1}{r^\beta} \frac{|g(s)|}{s^{1-\beta}}\, ds\, dr =$$

$$= \int_0^\infty (\int_0^s \frac{dr}{r^\beta}) \frac{|g(s)|}{s^{1-\beta}} \; ds = (\text{const}) \int_0^\infty |g(s)| \; ds.$$

y vemos que el operador es acotado en $L^1([0,\infty[)$.

Queda por estudiar el caso $\beta = 1$, es decir:

$$g(r) \longmapsto \int_r^\infty \frac{s}{r} \frac{1}{r+s} \; g(s)\, ds$$

Llamemos

$$G(r) = \int_0^r g(s)\, ds.$$

Integremos por partes suponiendo que g está en $H^1_+(\mathbb{R})$.

$$\int_r^\infty \frac{s}{r} \; \frac{1}{r+s}\, g(s)\, ds = \frac{1}{r} \int_r^\infty \frac{s}{r+s}\, g(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{r} \left(\left|\frac{s}{r+s}\, G(s)\right|_r^\infty - \int_r^\infty G(s) \; \frac{r}{(r+s)^2}\, ds \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{r}\, G(r) - \int_r^\infty G(s) \; \frac{1}{(r+s)^2}\, ds = -\frac{1}{2} \; \frac{1}{r} \int_0^r g(s)\, ds \; -$$

$$- \int_r^\infty (\frac{1}{s} \int_0^s g(t)\, dt) \; \frac{s}{(r+s)^2}\, ds = -\frac{1}{2}\, A_0(g)(r) \; -$$

$$- \int_r^\infty A_0(g)(s) \; \frac{s}{(r+s)^2}\, ds$$

A_0 es acotado de $H^1_+(\mathbb{R})$ en $L^1([0,\infty[)$ y el operador

$$h(r) \longmapsto \int_r^\infty h(s) \frac{s}{(r+s)^2}\, ds$$

es acotado en $L^1([0,\infty[)$, ya que:

$$\int_0^\infty \left|\int_r^\infty h(s) \frac{s}{(r+s)^2}\, ds\right| dr \leq \int_0^\infty \int_r^\infty |h(s)| \frac{s}{(r+s)^2}\, ds\, dr \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \int_r^\infty |h(s)| \frac{1}{s}\, ds\, dr = \int_0^\infty \left(\int_0^s dr\right) \frac{|h(s)|}{s}\, ds \leq$$

$$\leq \int_0^\infty |h(s)|\, ds.$$

Hemos demestrado el siguiente resultado.

<u>TEOREMA IV.3.7. Sea</u> $\lambda \geq 1/2$. <u>Si</u> $f(s)\, s^{2\lambda}$ <u>está en</u> $H^1_+(\mathbb{R})$ <u>entonces la integral singular</u>

$$\mathcal{R}_\lambda(f)(r) = \text{v.p.} \int_0^\infty (f(s)s^{2\lambda})\ {}_{\lambda}(r,s)\, d\lambda,$$

<u>está en</u> $L^1([0,\infty[;r^{2\lambda}dr)$ <u>donde</u>

$$\mathcal{R}_\lambda(r,s) = C_\lambda \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^\pi \frac{(\sin\theta)^{2\lambda-1}}{(r^2+s^2-2rs\cos\theta)^\lambda}\, d\theta\right).$$

<u>En otras palabras</u>: $f(s)$ <u>está en el espacio</u> H^1 <u>con respecto al peso</u> $r^{2\lambda}$ <u>que definen Muckenhoup y Stein en</u> [11].

Tomando, en particular $\lambda = (n-1)/2$ para $n = 2, 3, \ldots$ obtenemos la generalización de (IV.3.6) a un espacio euclídeo arbitrario; que es la mitad del corolario IV.2.5; es decir:

COROLARIO IV.3.8. Sea $n = 2, 3, \ldots$. Si $f(s)\, s^{n-1}$ está en $H^1_+(\mathbb{R})$, entonces la función radial en $\mathbb{R}^n$ dada por $F(x) = f(|x|)$ está en $H^1(\mathbb{R}^n)$ y

$$||F||_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq (\text{const})\, ||f(s)\, s^{n-1}||_{H^1(\mathbb{R})}$$

Observemos que para demostrar el recíproco de (IV.3.7) todo lo que necesitamos es darnos cuenta de que para un función $f(s)$ en el espacio H^1 de Muckenhoupt y Stein correspondiente a un cierto λ, $A_0(f(s)\, s^{2\lambda})(r)$ está en $L^1([0,\infty[)$. La razón es que, aparte de la transformada de Hilbert

$$\text{v.p.} \int_0^\infty (f(s)\, s^{2\lambda})\, \frac{1}{r-s}\, ds = (f(s)\, s^{2\lambda})^{\sim}(r),$$

el resto de los operadores que aparecen en la descomposición de

$$\text{v.p.} \int_0^\infty (f(s)\, s^{2\lambda})\, (r^{2\lambda} \mathcal{R}_\lambda(r,s))ds$$

son, o bien acotados de $L^1([0,\infty[)$ en sí mismo, con normas que forman una serie convergente, o bien son composiciones de A_0 con algún operador acotado en $L^1([0,\infty[)$ y estos últimos aparecen sólo en número finito.

Veamos, por ejemplo, cómo se descompone

$$\int_0^\infty g(s)\, \frac{1}{r+s}\, ds$$

que, para los efectos de la demostración de (IV.3.7), considerábamos como una transformada de Hilbert.

$$\int_0^\infty g(s)\, \frac{1}{r+s}\, ds = \int_0^r g(s)\, \frac{1}{r+s}\, ds + \int_r^\infty g(s)\, \frac{1}{r+s}\, ds$$

El segundo operador está acotado en L^1 como ya vimos. En cuanto al primero, podemos integrar por partes y obtener, llamando como antes

$$G(s) = \int_0^s g(t)\,dt:$$

$$\int_0^r g(s)\,\frac{1}{r+s}\,ds = \frac{1}{r+s}\,G(s)\Big|_0^r + \int_0^r G(s)\,\frac{1}{(r+s)^2}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2r}\,G(r) + \int_0^r \frac{G(s)}{s}\,\frac{s}{(r+s)^2}\,ds = \frac{1}{2}\,A_0(g)(r) +$$

$$+ \int_0^r A_0(g)(s)\,\frac{s}{(r+s)^2}\,ds.$$

Pero el operador

$$h(r) \longmapsto \int_0^r h(s)\,\frac{s}{(r+s)^2}\,ds$$

está acotado en $L^1([0,\infty[)$. En efecto:

$$\int_0 \left|\int_0^r h(s)\,\frac{s}{(r+s)^2}\,ds\right|\,dr \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \int_0^r |h(s)|\,\frac{s}{(r+s)^2}\,dsdr \leq \int_0^\infty \int_0^r |h(s)|\,\frac{s}{r^2}\,ds\,dr =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \frac{dr}{r^2}\right)\,|h(s)|s\,ds = \int_0^\infty |h(s)|\,ds.$$

El hecho de que $A_0(f(s)\,s^{2\lambda})$ está en $L^1([0,\infty[)$ será demostrado para los "casos euclídeos" $\lambda = (n-1)/2$, examinando el sistema de las transformadas de Riesz de segundo orden de una función radial en $\mathbb{R}^n$.

Las transformaciones de Riesz de segundo orden son los operadores integrales singulares que consisten en convolver con distribuciones de la forma v.p. $P(x)/|x|^{n+2}$ donde $P(x)$ es un polinomio armónico homogéneo de grado 2.

En general si $P(x)$ es un polinomio armónico homogéneo de grado $k \geq 1$ en $\mathbb{R}^n$,

$$K(x) = \frac{P(x)}{|x|^{n+k}}$$

da lugar a una distribución en valor proncipal. Podemos convolver K con funciones suficientemente buenas obteniendo el operador integral singular:

$$(\wp F)(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} F(y) \frac{P(x-y)}{|x-y|^{n+k}} dy$$

Pero

$$\text{v.p.} \frac{P(y)}{|y|^{n+k}} = (\text{const})\ P(D)\left(\frac{1}{|y|^{n-k}}\right)$$

en el sentido de las distribuciones. Esto puede demostrarse sin mas que darse cuenta de que ambas distribuciones tiene la misma transformada de Fourier, que es:

$$(\text{const}) \frac{P(t)}{|t|^k}$$

Así pues

$$(\wp F)(x) = (\text{const}) \int_{\mathbb{R}^n} F(y)\ P(D)\left(\frac{1}{|x-y|^{n-k}}\right) dy =$$

$$= (\text{const}) \int_{\mathbb{R}^n} (P(D)F)(y) \frac{1}{|x-y|^{n-k}} dy$$

Ahora bien, si F es radial y $F(y) = f(|y|)$, tendremos:

$$(P(D)F)(y) = \frac{P(y)}{|y|^k}\{\sum_{j=1}^{k} C_j \frac{f^{(j)}(|y|)}{|y|^{k-j}}\}$$

Por tanto

$$(\wp F)(x) = (\mathrm{const})\int_{\mathbb{R}^n}(\frac{P(y)}{|y|^k}\{\sum_{j=1}^{k} C_j \frac{f^{(j)}(|y|)}{|y|^{k-j}}\})\frac{1}{|x-y|^{n-k}}\,dy =$$

$$= (\mathrm{const})\int_{\mathbb{R}^n}(P(\frac{y}{|y|})\{\sum_{j=1}^{k} C_j \frac{f^{(j)}(|y|)}{|y|^{k-j}}\})\frac{1}{|x-y|^{n-k}}\,dy =$$

$$= (\mathrm{const})\int_0^\infty\{\sum_{j=1}^{k} C_j \frac{f^{(j)}(s)}{s^{k-j}}\}(\int_{\Sigma_{n-1}}\frac{P(y')}{|x-sy'|^{n-k}}\,dy')s^{n-1}ds$$

Ahora si $\mathbf{1}$ es cualquier punto de la esfera y $Z_{\mathbf{1}}^{(k)}(y')$ es el armónico esférico zonal de grado k con polo $\mathbf{1}$, tendremos:

$$\int_{\Sigma_{n-1}}\frac{P(y')}{|rx'-sy'|^{n-k}}\,dy' = P(x')\int_{\Sigma_{n-1}}\frac{Z_{\mathbf{1}}^{(k)}(y')}{|r\mathbf{1}-sy'|^{n-k}}\,dy'$$

En efecto, tenemos una base ortonormal $\{Y_1, \ldots, Y_{d_k}\}$ del espacio $\mathcal{H}^k$ de los polinomios armónicos homogéneos de grado k en $\mathbb{R}^n$, y para x, $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$, escribamos

$$K(x,y) = \frac{1}{|x-y|^{n-k}}\,Y(y')$$

donde

$$Y(z) = (Y_1(z), \ldots, Y_{d_k}(z)) \in \mathbb{R}^{d_k}.$$

Veamos qué efecto tiene una rotación $\rho \in SO(n)$ sobre $K(x,y)$

$$K(\rho x,\rho y) = \frac{1}{|x-y|^{n-k}} \; Y(\rho y') = (M_{\rho^{-1}})^t . K(x,y)$$

donde M es la representación de SO(n) en el espacio de matrices reales $d_k \times d_k$ que corresponde en la base $\{Y_1, \ldots, Y_{d_k}\}$ a la representación T de SO(n) en $\mathcal{H}^k$ dada por

$$T_\rho A(x) = A(\rho^{-1}x);$$

y $(M_{\rho^{-1}})^t$ es la matriz traspuesta de $M_{\rho^{-1}}$. Entonces

$$\int_{\Sigma_{n-1}} K(rx';sy')\, dy' =$$

$$= \int_{\Sigma_{n-1}} K(ru^{-1}\mathbb{1};su^{-1}uy')\, dy'$$

donde u es la rotación que lleva x' a $\mathbb{1}$

$$\int_{\Sigma_{n-1}} K(ru^{-1}\mathbb{1},su^{-1}uy')\, dy' = \int_{\Sigma_{n-1}} (M_u)^t . K(r\mathbb{1},suy')\, dy' =$$

$$= (M_u)^t \, . \int_{\Sigma_{n-1}} K(r\mathbb{1},sy')\, dy'.$$

La componente i, j-ésima de M_ρ será

$$t_{ij}(\rho) = \langle Y_j(\rho^{-1}\ldots),Y_i\rangle.$$

La componente i,j-ésima de $(M_\rho)^t$ será

$$s_{ij}(\rho) = t_{ji}(\rho) = \langle Y_i(\rho^{-1}\ldots),Y_j\rangle$$

Si tomamos $Y_1 = Z_{\mathbb{1}}^{(k)}$, entonces

$$s_{i1}(\rho) = \langle Y_i(\rho^{-1}\ldots), Z_{\mathbb{1}}^{(k)}\rangle = \langle Y_i, Z_{\mathbb{1}}^{(k)}(\rho\ldots)\rangle =$$

$$= \langle Y_i, Z_{\rho^{-1}\mathbb{1}}^{(k)}\rangle = Y_i(\rho^{-1}\mathbb{1})$$

En particular, para $\rho = u$ tenemos:

$$s_{i1}(u) = Y_i(u^{-1}\mathbb{1}) = Y_i(x')$$

$$\int_{\Sigma_{n-1}} K(rx', sy')\, dy' = (M_u)^t \int_{\Sigma_{n-1}} K(r\mathbb{1}, sy')dy' =$$

$$= \begin{bmatrix} Z_{\mathbb{1}}^{(k)}(x') \\ Y_2(x') \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{d_k}(x') \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{Z_{\mathbb{1}}^{(k)}(y')}{|r\mathbb{1}-sy'|^{n-k}}\, dy' \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto demuestra que para cualquier P en $\quad{}^{k}$

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{P(y')}{|rx'-sy'|^{n-k}}\, dy' = P(x') \int_{\Sigma_{n-1}} \frac{Z_{\mathbb{1}}^{(k)}(y')}{|r\mathbb{1}-sy'|^{n-k}}\, dy'.$$

El caso que estamos considerando es k = 2.

Tenemos la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{|x-t\mathbb{1}|^{n-2}} = \frac{n-2}{|x|^{n-2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Z_{\mathbb{1}}^{(j)}\left(\frac{x}{|x|^2}\right)t^j}{n+2(j-1)}$$

$-1 < t < 1$, $n > 2$. (Véase página 47 de [4]). Para $n = 2$ la situación es mucho más sencilla como veremos en la próxima sección.

Para $s > r$:

$$\frac{1}{|r\Omega - sy'|^{n-2}} = \frac{1}{s^{n-2}|\frac{r}{s}\Omega - y'|^{n-2}} = \frac{n-2}{s^{n-2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{Z_{\Omega}^{(j)}(y')(\frac{r}{s})^j}{n+2(j-1)}$$

Por lo tanto, para $s > r$:

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{Z_{\Omega}^{(2)}(y')}{|r\Omega - sy'|^{n-2}}\, dy' = \frac{n-2}{n+2} (\frac{r}{s})^2 \frac{1}{s^{n-2}} = (\text{const})\, \frac{r^2}{s^n}$$

Para $s < r$:

$$\frac{1}{|r\Omega - sy'|^{n-2}} = \frac{1}{|s\Omega - ry'|^{n-2}}$$

Así pues

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{Z_{\Omega}^{(2)}(y')}{|r\Omega - sy'|^{n-2}}\, dy' = \int_{\Sigma_{n-1}} \frac{Z_{\Omega}^{(2)}(y')}{|s\Omega - ry'|^{n-2}}\, dy' = (\text{const})\, \frac{s^2}{r^n}.$$

$$(\mathcal{P}F)(x) = (\text{const})\int_0^{\infty} (C_1 \frac{f'(s)}{s} + C_2 f''(s))(\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{P(y')}{|x - sy'|^{n-2}}\, dy')s^{n-1} ds =$$

$$= (\text{const})P(x')\int_0^{\infty} (C_1 \frac{f'(s)}{s} + C_2 f''(s))(\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{Z_{\Omega}^{(2)}(y')}{|r\Omega - sy'|^{n-2}}\, dy')s^{n-1} ds.$$

Llamemos

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \frac{Z_{\Omega}^{(2)}(y')}{|r\Omega - sy'|^{n-2}}\, dy' = \mathcal{B}(r;s)$$

El operador $\wp$ para funciones radiales estará determinado por los operadores en $\mathbb{R}$

$$f(s) \longmapsto \int_0^\infty \frac{f'(s)}{s} \mathfrak{B}(r,s)\ s^{n-1}\ ds$$

y

$$f(s) \longmapsto \int_0^\infty f''(s)\mathfrak{B}(r,s)\ s^{n-1}\ ds$$

Aparte de los operadores debidos a la singularidad,

$$\int_0^\infty \frac{f'(s)}{s} \hat{\mathfrak{B}}(r,s)\ s^{n-1}\ ds$$

puede partirse en

$$\frac{1}{r^n}\int_0^r f(s)\ s^{n-1}\ ds \quad \text{y} \quad r^2\int_r^\infty \frac{f(s)\ s^{n-1}}{s^{n+2}}\ ds$$

y lo mismo ocurre con

$$\int_0^\infty f''(s)\hat{\mathfrak{B}}(r,s)\ s^{n-1}\ ds.$$

Es muy fácil ver que el único operador a que la singularidad da lugar **es** la identidad. En efecto:

$$<\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\hat{\mathfrak{B}}(r,s)s^{n-1}),\phi> = <\hat{\mathfrak{B}}(r,s)\ s^{n-1},\phi''> =$$

$$= \int_0^r \hat{\mathfrak{B}}(r,s)\ s^{n-1}\phi''(s)ds + \int_r^\infty \hat{\mathfrak{B}}(r,s)\ s^{n-1}\phi''(s)\ ds =$$

$$= \phi'(s)\hat{\mathfrak{B}}(r,s)\ s^{n-1}\Big|_0^r - \int_0^r (\frac{\partial}{\partial s}(\hat{\mathfrak{B}}(r,s)s^{n-1}))\phi'(s)\ ds +$$

$$+ \phi'(s)\mathcal{B}(r,s)\, s^{n-1}\Big]_r^{\infty} - \int_r^{\infty} (\frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{B}(r,s)s^{n-1}))\phi'(s)\, ds =$$

$$= -\phi(s)\, \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{B}(r,s)\, s^{n-1})\Big]_0^{r} + \int_0^{r} (\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\mathcal{B}(r,s)s^{n-1}))\phi(s)\, ds -$$

$$- \phi(s)\, \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{B}(r,s)s^{n-1})\Big]_r^{\infty} + \int_r^{\infty} (\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\mathcal{B}(r,s)s^{n-1}))\phi(s)\, ds =$$

$$= -\phi(s)\, (n+1)\, \frac{s^n}{r^n}\Big]_0^{r} + \int_0^{r} (\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\mathcal{B}(r,s)s^{n-1}))\phi(s)\, ds -$$

$$- \phi(s)\, (-\frac{r^2}{s^2})\Big]_r^{\infty} + \int_r^{\infty} (\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\mathcal{B}(r,s)s^{n-1}))\phi(s)\, ds =$$

$$= -\phi(r)\, (n+1) - \phi(r) + \int_0^{\infty} (\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\mathcal{B}(r,s)\, s^{n-1}))\phi(s)\, ds =$$

$$= -(n+2)\phi(r) + \int_0^{\infty} (\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\mathcal{B}(r,s)s^{n-1}))\, \phi(s)\, ds.$$

En cuanto a

$$\int_0^{\infty} \frac{f'(s)}{s}\mathcal{B}(r,s)\, s^{n-1}\, ds$$

no da lugar a ningún término singular como puede verse fácilmente.

Así pues

$$(\mathcal{P}F)(rx') = (\text{const})P(x')\{\frac{1}{r^{n-1}}\frac{1}{r}\int_0^{r} f(s)\, s^{n-1}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{r^{n-1}}\frac{1}{\frac{1}{r^{n+1}}}\int_r^{\infty} \frac{f(s)\, s^{n-1}}{s^{n+2}}\, ds - (\text{const})\, f(r)\}.$$

Entonces si $F(x) = f(|x|)$ está en $L^1(\mathbb{R}^n)$ (es decir, si $f(s)\, s^{n-1}$ está en $L^1([0,\infty[)$) y $(\mathcal{P}F)(x)$ está también en $L^1(\mathbb{R}^n)$, como el operador

$$g(s) \longmapsto r^{n+1}\int_r^{\infty} \frac{g(s)}{s^{n+2}}\, ds$$

es acotado en $L^1([0,\infty[)$(En efecto:

$$\int_0^\infty |r^{n+1} \int_r^\infty \frac{g(s)}{s^{n+2}} ds|\ dr \leq \int_0^\infty r^{n+1} \int_r^\infty \frac{|g(s)|}{s^{n+2}} ds\ dr =$$

$$= \int_0^\infty (\int_0^s r^{n+1}\ dr) \frac{|g(s)|}{s^{n+2}} ds = \frac{1}{n+2} \int_0^\infty |g(s)| ds),$$

concluimos que

$$\frac{1}{r} \int_0^r f(s)\ s^{n-1}\ ds$$

está en $L^1([0,\infty[)$. Esto es verdad en particular para $F(x) = f(|x|)$ en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Pero

$$\frac{1}{r} \int_0^r f(s)\ s^{n-1}\ ds = A_0(f(s)s^{n-1})(r)$$

Esto concluye otra demostración de (IV.2.5).

El hecho de que las transformadas de Riesz de segundo orden de una función radial $F(x) = f(|x|)$ en $\mathbb{R}^n$ están dadas esencialmente por

$$\frac{1}{r^{n-1}} A_0(f(s)\ s^{n-1})(r)$$

es explotado en la sección siguiente para demostrar que las transformaciones de Riesz de segundo orden no caracterizan $H^1(\mathbb{R}^n)$. Lo haremos para $n = 2$ completando de esta forma los cálculos de esta sección. Los cálculos son esencialmente los mismos para las transformaciones de Riesz de cualquier orden par.

§4. EL NUCLEO z^{-2}.

Para una función F en el plano $\mathbb{R}^2$, consideramos la integral singular con valores en $\mathbb{R}^2$ dada, en notación compleja, por:

$$\tilde{F}(w) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{z^2} F(w-z)\, ds$$

donde dz es, sencillamente, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$. El núcleo

$$\frac{1}{z^2} = \frac{(\bar{z})^2}{|z|^{2+2}} = \frac{e^{-i2\theta}}{|z|^2} = \frac{\cos 2\theta}{|z|^2} - i\,\frac{\sin 2\theta}{|z|^2},$$

donde $z = |z|\, e^{i\theta}$, nos da las dos transformadas de Riesz de segundo orden en el plano.

Demostraremos que este operador integral singular no caracteriza a $H^1(\mathbb{R}^2)$. En particular encontraremos una función radial $F(z) = f(|z|)$ en $L^1(\mathbb{R}^2)$ pero no en $H^1(\mathbb{R}^2)$, tal que $\tilde{F}$ está en $L^1(\mathbb{R}^2)$. Resulta sorprendente que mientras el núcleo

$$\frac{e^{-i\theta}}{|z|^2} = \frac{\cos\theta}{|z|^2} - i\,\frac{\sin\theta}{|z|^2} = \frac{x}{|z|^3} - i\,\frac{y}{|z|^3},$$

que corresponde a las dos transformaciones de Riesz de primer orden, caracteriza a $H^1(\mathbb{R}^2)$; el núcleo $e^{-i2\theta}/|z|^2$ no caracteriza a $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Este núcleo proporciona un contraejemplo a una conjetura de Fefferman según la cual, un sistema finito de núcleos singulares

$$K_i(x) = \frac{\Omega_i(\frac{x}{|x|})}{|x|^n}$$

donde las Ω_i tienen media cero y son suficientemente "suaves"; con un cierto tipo de independencia, serviría para caracterizar a $H^1(\mathbb{R}^n)$ (Véase [1]). La situación es muy similar a la que se plantea en la caracterización de $H^1(k)$ para un cuerpo local K (Véase [8]).

LEMA IV.4.1.

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\log|z| = -\frac{1}{2}\text{ v.p. }\frac{1}{z^2}$$

como distribuciones.

DEMOSTRACION. Ante todo

$$\frac{\partial}{\partial z}\log|z| = \frac{1}{2}\frac{1}{z}$$

como distribuciones. Esto es fácil de ver ya que tanto $\log|z|$ como $1/z$ son funciones localmente integrables en $\mathbb{R}^2$. Hemos de demostrar que para cada $\phi \in \mathcal{D}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$-\int_{\mathbb{R}^2}(\log|z|)\frac{\partial}{\partial z}\phi(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{z}\phi(z)\,dz$$

$$-\int_{\mathbb{R}^2}(\log|z|)\frac{\partial}{\partial z}\phi(z)\,dz = -\int_{\mathbb{R}^2}(\log|z|)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi(z)dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(\log|z|)\frac{\partial}{\partial x}\phi(z)\,dz + \frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(\log|z|)\frac{\partial}{\partial y}\phi(z)\,dz$$

Por otra parte

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{z}\phi(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{x-iy}{|z|^2}\phi(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{x}{|z|^2}\phi(z)\,dz - \frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{y}{|z|^2}\phi(z)\,dz$$

Tenemos que comprobar, pues, que:

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\log|z|) \frac{\partial}{\partial x} \phi(z)\, dz = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{|z|^2} \phi(z)\, dz$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\log|z|) \frac{\partial}{\partial y} \phi(z)\, dz = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{y}{|z|^2} \phi(z)\, dz.$$

Por ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\log|z|) \frac{\partial}{\partial x} \phi(z)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\log (x^2+y^2)^{1/2}) \frac{\partial}{\partial x} \phi(z)\, dx\right] dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) \frac{x}{|z|^2}\, dx\right] dy = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{|z|^2} \phi(z)\, dz.$$

A continuación vemos que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{v.p. } \frac{1}{z^2}$$

también como distribuciones.

Tenemos que ver que para cada $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ y cada $\varepsilon > 0$:

$$\int_{\varepsilon\leq|z|} \frac{1}{z^2} \phi(z)\, dz = \int_{\varepsilon\leq|z|} \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \phi(z)\, dz + \Phi(\varepsilon)$$

con $\Phi(\varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Para ver ésto, utilizamos coordenadas polares

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad y \quad \theta = \text{arc tg}\, \frac{y}{x}$$

Con respecto a estas coordenadas:

$$\frac{\partial}{\partial x} = (\cos\theta)\, \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\, \frac{\partial}{\partial \theta}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} = (\sin\theta)\, \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\, \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Así

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\, \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\, \frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\, \left\{(\cos\theta - i \sin\theta)\, \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta + i\cos\theta}{r}\, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\, \left(e^{-i\theta}\, \frac{\partial}{\partial r} - ie^{-i\theta}\, \frac{1}{r}\, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{2}\, e^{-i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} - i\, \frac{1}{r}\, \frac{\partial}{\partial \theta}\right).$$

Entonces

$$\int_{\varepsilon \leq |z|} \frac{1}{z}\, \frac{\partial}{\partial z}\, \phi(z)\, dz =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}}\, \frac{1}{2}\, e^{-i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\, \phi(re^{i\theta}) - i\, \frac{1}{r}\, \frac{\partial}{\partial \theta}\, \phi(re^{i\theta})\right) r\, dr\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} e^{-i2\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\, \phi(re^{i\theta}) - i\, \frac{1}{r}\, \frac{\partial}{\partial \theta}\, \phi(re^{i\theta})\right) dr\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\, \left(\int_{0}^{2\pi} e^{-i2\theta}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r}\, \phi(re^{i\theta})\, dr\right) d\theta\, -\right.$$

$$\left. - i \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{r} \int_{0}^{2\pi} e^{-i2\theta}\, \frac{\partial}{\partial \theta}\, \phi(re^{i\theta})\, d\theta\, dr = \right.$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} e^{-i2\theta}(-\phi(\varepsilon e^{i\theta}))\, d\theta\, -\right.$$

$$\left. - i\int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r}\left(-\int_0^{2\pi}\phi(re^{i\theta})(-i2)e^{-i2\theta}d\theta\right)dr\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-i2\theta}\phi(\varepsilon e^{i\theta})d\theta + \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\phi(re^{i\theta})e^{-i2\theta}d\theta\, dr =$$

$$= \int_\varepsilon^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\theta})^2}\,\phi(re^{i\theta})\, r\, dr\, d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-i2\theta}\,\phi(\varepsilon e^{i\theta})d\theta =$$

$$= \int_{\varepsilon\leq|z|} \frac{1}{z^2}\,\phi(z)\, dz - \Phi(\varepsilon)$$

Claramente

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-i2\theta}\,\phi(\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{-i2\theta}\,(\phi(\varepsilon e^{i\theta}) - \phi(0))\, d\theta \longrightarrow 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$.

c.q.d.

Consideremos ahora una función radial $F(z) = f(|z|)$ suficientemente buena. Entonces

$$\tilde{F}(w) = \text{v.p.}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{z^2}\, F(w-z)dz = -2\int_{\mathbb{R}^2}(\log|z|)\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\, F(w-z)dz =$$

$$= -2\int_{\mathbb{R}^2} (\log|w-z|)\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\, F(z)\, dz =$$

$$= -2\int_{\mathbb{R}^2} (\log|w-z|)\,\left\{\frac{1}{4}\left(f''(|z|)\,\frac{\bar{z}^2}{|z|^2} - f'(|z|)\,\frac{\bar{z}^2}{|z|^3}\right)\right\}\, dz$$

En efecto:

$$\frac{\partial}{\partial z} f(|z|) = f'(|z|) \cdot \frac{1}{2} \frac{\bar{z}}{|z|},$$

de donde:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(|z|) = f'(|z|) \frac{1}{2} \bar{z} \left(- \frac{1}{|z|^2} \frac{1}{2} \frac{\bar{z}}{|z|}\right) +$$

$$+ f''(|z|) \frac{1}{2} \frac{\bar{z}}{|z|} \frac{1}{2} \frac{\bar{z}}{|z|} = \frac{1}{4} \left(- f'(|z|) \frac{\bar{z}^2}{|z|^3} + f''(|z|) \frac{\bar{z}^2}{|z|^2}\right)$$

Ahora, utilizando coordenadas polares para $z = se^{i\theta}$, obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(|z|) = \frac{1}{4} \left(-f'(s) \frac{1}{s} e^{-i2\theta} + f''(s) e^{-i2\theta}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} e^{-i2\theta} \left(f''(s) - \frac{f'(s)}{s}\right).$$

Por lo tanto, para $w = re^{i\psi}$, tenemos:

$$\tilde{F}(w) = \tilde{F}(re^{i\psi}) = - \frac{1}{2} \int_0^\infty (sf''(s)-f'(s)) \left(\int_0^{2\pi} e^{-i2\theta} \log|re^{i\psi}-se^{i\theta}| d\theta\right) ds.$$

Pero

$$\int_0^{2\pi} e^{-i2\theta} \log |re^{i\psi}-se^{i\theta}| d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-i2\theta} \log|r-se^{i(\theta-\psi)}| d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-i2(\theta-\psi)} e^{-i2\psi} \log |r - se^{i(\theta-\psi)}| d\theta =$$

$$= e^{-i2\psi} \int_0^{2\pi} e^{-i2\theta} \log |r - se^{i\theta}| d\theta$$

Llamemos

$$K(r,s) = \int_0^{2\pi} e^{-i2\theta} \log |r - se^{i\theta}| \, d\theta$$

$K(r,s) = K(s,r)$ ya que

$$|r - se^{i\theta}| = \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta} = |s - re^{i\theta}|.$$

Así pues, necesitamos calcular $K(r,s)$ solamente para $s < r$. En ese caso

$$K(r,s) = \int_0^{2\pi} e^{-i2\theta} \log |r-se^{i\theta}| \, d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-i2\theta} \log \left|1 - \frac{s}{r} e^{i\theta}\right| d\theta.$$

$0 \leq \frac{s}{r} < 1$. Calculemos

$$\int_0^{2\pi} e^{-i2\theta} \log |1 - ae^{i\theta}| \, d\theta$$

para $0 \leq a < 1$. Esta integral no es otra cosa que el coeficiente de Fourier de orden +2 de la función $\log |1 - ae^{i\theta}|$. Sea $\xi = ae^{i\theta}$ que varía en el disco unidad. $\log |1 - \xi|$ es la parte real de la función holomorfa

$$\log (1 - \xi) = - \{\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} + \ldots\}$$

Así pues:

$$\log |1 - \xi| = \mathrm{Re} \log (1 - \xi) = \mathrm{Re}(-(\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} + \ldots)) =$$

$$= \frac{1}{2} (-(\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} + \ldots) - (\bar{\xi} + \frac{\bar{\xi}^2}{2} + \frac{\bar{\xi}^3}{3} + \ldots))$$

y

$$\log |1 - ae^{i\theta}| = - \frac{1}{2} (ae^{i\theta} + \frac{a^2}{2} e^{i2\theta} + \frac{a^3}{3} e^{i3\theta} + \ldots) -$$

$$- \frac{1}{2} (ae^{-i\theta} + \frac{a^2}{2} e^{-i2\theta} + \frac{a^3}{3} e^{-i3\theta} + \ldots).$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} e^{-i2\theta} \log |1 - ae^{i\theta}| \, d\theta = -\frac{2\pi}{4} a^2.$$

Así pues, para $s < r$:

$$K(r,s) = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{s}{r}\right)^2$$

y, para $s > r$:

$$K(r,s) = K(s,r) = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{s}\right)^2.$$

Entonces

$$\tilde{F}(re^{i\psi}) = -\frac{1}{2} e^{-i2\psi} \int_0^\infty (sf''(s)-f'(s)) \, K(r,s) \, ds =$$

$$= \frac{\pi}{4} e^{-i2\psi} \left(\int_0^r (sf''(s)-f'(s))\left(\frac{s}{r}\right)^2 ds + \int_r^\infty (sf''(s)-f'(s))\left(\frac{r}{s}\right)^2 ds\right)$$

Ahora bien:

$$\int_0^r sf''(s)\left(\frac{s}{r}\right)^2 ds = \frac{1}{r^2} \int_0^r f''(s) \, s^3 \, ds =$$

$$= \frac{1}{r^2} \left(s^3 f'(s)\Big|_0^r - \int_0^r f'(s) \, 3s^2 ds\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \left(r^3 f'(r) - 3 \int_0^r f'(s) \, s^2 \, ds\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \left(r^3 f'(r) - 3\left(s^2 f(s)\Big|_0^r - \int_0^r f(s) \, 2s \, ds\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \left(r^3 f'(r) - 3\left(r^2 f(r) - 2 \int_0^r f(s) \, s \, ds\right)\right) =$$

$$= rf'(r) - 3f(r) + 6 \frac{1}{r^2} \int_0^r f(s) \, s \, ds.$$

$$\int_0^r f'(s)\left(\frac{s}{r}\right)^2 ds = \frac{1}{r^2}\int_0^r f'(s)\ s^2\ ds =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(s^2\ f(s)\Big|_0^r - \int_0^r f(s)\ 2s\ ds\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(r^2 f(r) - 2\int_0^r f(s)s\ ds\right) = f(r) - \frac{2}{r^2}\int_0^r f(s)s\ ds$$

$$\int_r^\infty s f''(s)\left(\frac{r}{s}\right)^2 ds = r^2\int_r^\infty \frac{1}{s} f''(s)\ ds =$$

$$= r^2\left(\frac{1}{s} f'(s)\Big|_r^\infty - \int_r^\infty f'(s)\ \left(-\frac{1}{s^2}\right) ds\right) =$$

$$= r^2\left(-\frac{1}{r} f'(r) + \int_r^\infty \frac{f'(s)}{s^2} ds\right) =$$

$$= r^2\left(-\frac{1}{r} f'(r) + \left|\frac{1}{s^2} f(s)\right|_r^\infty - \int_r^\infty f(s)\left(-2\frac{1}{s^3}\right) ds\right) = r^2\left(-\frac{1}{r}f'(r) - \frac{1}{r^2}f(r) +\right.$$

$$\left.+ 2\int_r^\infty \frac{f(s)}{s^3} ds\right) = -rf'(r) - f(r) + 2r^2\int_r^\infty \frac{f(s)}{s^3} ds.$$

Finalmente

$$\int_r^\infty f'(s)\ \left(\frac{r}{s}\right)^2 ds = r^2\int_r^\infty \frac{f'(s)}{s^2} ds =$$

$$= r^2\left(\frac{1}{s^2} f(s)\Big|_r^\infty - \int_r^\infty f(s)\left(-2\ \frac{1}{s^3}\right) ds\right) =$$

$$= r^2\left(-\frac{1}{r^2} f(r) + 2\int_r^\infty \frac{f(s)}{s^3} ds\right) = -f(r) + 2r^2\int_r^\infty \frac{f(s)}{s^3} ds.$$

Poniendo todo junto resulta:

$$\tilde{F}(re^{i\psi}) = \frac{\pi}{4} e^{-i2\psi}\ \{rf'(r) - 3f(r) + \frac{6}{r^2}\int_0^r f(s)s\ ds -$$

$$- f(r) + \frac{2}{r^2}\int_0^r f(s)s\ ds - rf'(r) - f(r) + 2r^2\int_r^\infty \frac{f(s)}{s^3} ds +$$

$$+ f(r) - 2r^2\int_r^\infty \frac{f(s)}{s^3} ds\} = \frac{\pi}{4} e^{-i2\psi}\ \{\frac{8}{r^2}\int_0^r f(s)s\ ds - 4f(r)\}$$

Hemos demostrado lo siguiente:

<u>LEMA IV.4.2</u>. <u>Para una función radial</u> $F(z) = f(|z|)$ <u>se tiene</u>:

$$\hat{F}(re^{i\psi}) = \pi e^{-i2\psi}\,\{\frac{2}{r^2}\int_0^r f(s)\, s\, ds - f(r)\} =$$

$$= \pi e^{-i2\psi}\{\frac{2}{r} A_0\,(f(s)s)(r) - f(r)\}.$$

Ahora supongamos que tenemos una función radial $F(z) = f(|z|)$ en $L^1(\mathbb{R}^2)$, es decir $f(s)s$ está en $L^1([0,\infty[)$. Entonces $\hat{F}(z)$ está en $L^1(\mathbb{R}^2)$ si y sólo si

$$\int_0^\infty |\frac{2}{r} A_0(f(s)s) - f(r)|r\, dr < \infty$$

es decir, si y sólo si

$$2A_0(f(s)s)(r) - f(r)r$$

está en $L^1([0,\infty[)$. Pero, puesto que $f(r)r$ está ya en $L^1(|0,\infty|)$, obtenemos finalmente:

<u>TEOREMA IV.4.3</u>. <u>Para una función radial</u> $F(z) = f(|z|)$ <u>en</u> $L^1(\mathbb{R}^2)$: $\hat{F}(z)$ <u>está en</u> $L^1(\mathbb{R}^2)$ <u>si y sólo si</u> $A_0(f(s)s)(r)$ <u>está en</u> $L^1([0,\infty[)$. Ahora vamos a combinar (IV.4.3) con (IV.2.5) para obtener una función radial $F(z) = f(|z|)$ en $L^1(\mathbb{R}^2)$ pero no en $H^1(\mathbb{R}^2)$, para la cual $\hat{F}(z)$ está en $L^1(\mathbb{R}^2)$. Todo lo que necesitamos hacer es encontrar $f(s)$ definida en $[0,\infty[$ tal que $f(s)s$ esté en $L^1([0,\infty[)$ pero no en $H^1(\mathbb{R})$ y sin embargo $A_0(f(s)s)(r)$ esté también en $L^1([0,\infty[)$. A continuación construiremos una tal f.

<u>TEOREMA IV.4.4</u>. <u>Existe una función</u> $g(s)$ <u>en</u> $L^1([0,\infty[)$ <u>pero no en</u> $H^1(\mathbb{R})$ <u>para la cual</u> $A_0(g)(r)$ <u>está en</u> $L^1([0,\infty[)$.

DEMOSTRACION. Vimos que A_0 es un operador acotado de $H^1_+(\mathbb{R})$ en $L^1([0,\infty[)$. Para ver ésto, tomamos un átomo a(s) con soporte contenido en un intervalo $I \subset [0,\infty[$ y observamos que $A_0(a)$ vive también en I puesto que

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(s)\, ds = 0;$$

y su tamaño está dominado también por $1/|I|$. En efecto

$$|A_0(a)(r)| = \left|\frac{1}{r}\int_0^r a(s)\, ds\right| \leq \frac{1}{r}\int_0^r |a(s)|ds \leq \frac{1}{|I|}.$$

La estimación que hemos hecho, sin embargo, es muy burda. No hace falta que a sea un átomo para que se cumplan las propiedades mencionadas. Podemos encontrar una función b con soporte contenido en I tal que

$$\int_I b(x)\, dx = 0$$

$A_0(b)$ vive también en I y

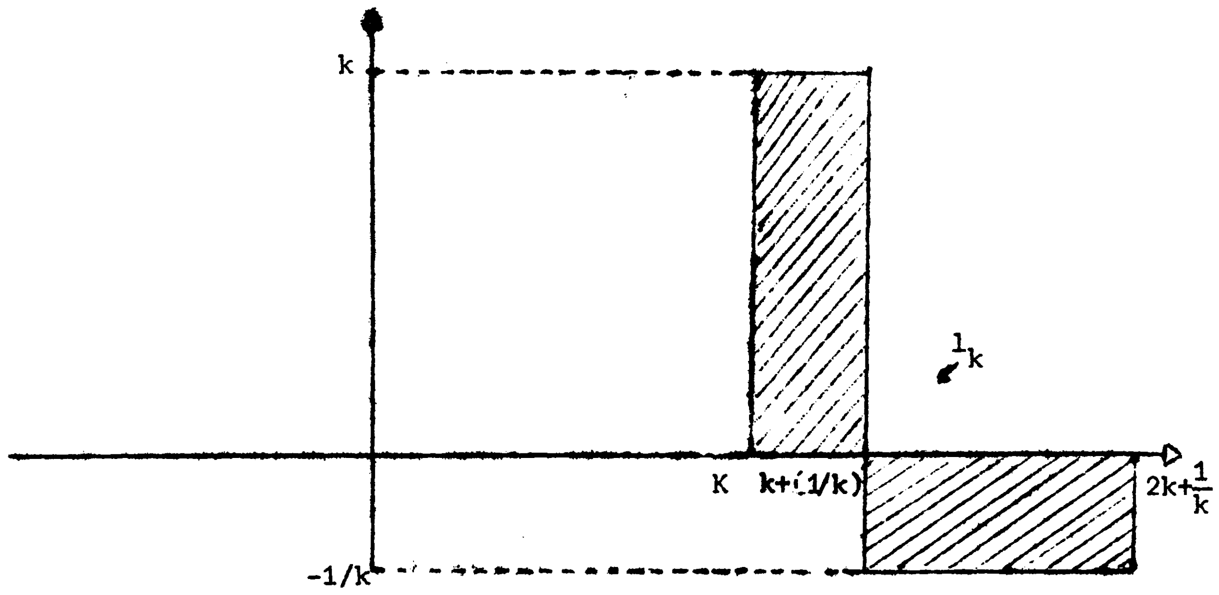
$$||A_0(b)||_\infty \leq \frac{1}{|I|}$$

sin que sea

$$||b||_\infty \leq \frac{1}{|I|}$$

Obtendremos nuestra función g poniendo juntas funciones como b. Veamos cómo construimos estas funciones. Para k = 1, 2, ..., consideramos:

$$l_k(r) = k\, \chi_{[k,k+\frac{1}{k}]}(r) - \frac{1}{k}\, \chi_{[k+\frac{1}{k},2k+\frac{1}{k}]}(r)$$



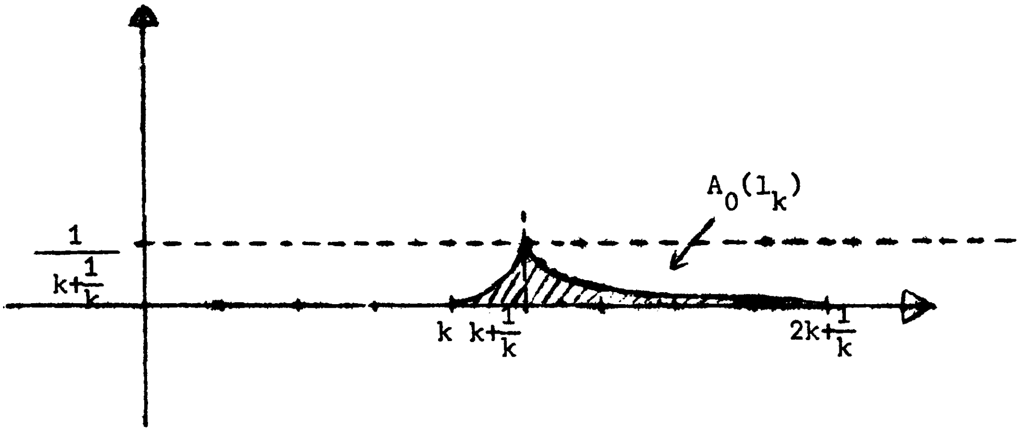
Puesto que

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_k(s)\,ds = 0, \quad A_0(1_k)(r) = \frac{1}{r}\int_0^r 1_k(s)\,ds$$

va a vivir en el mismo intervalo que 1_k, es decir, en $[k, 2k+\frac{1}{k}]$. Ahora, en lugar de hacer una estimación burda, vamos a calcular explícitamente $A_0(1_k)(r)$.

$$A_0(1_k)(r) = \frac{1}{r}\int_0^r 1_k(s)ds = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < r < k \\ k(1 - \frac{k}{r}) & \text{si } k < r < k+\frac{1}{k} \\ \frac{1}{r} - \frac{1}{k}(1 - \frac{k+\frac{1}{k}}{r}) & \text{si } k+\frac{1}{k} < r < 2k+\frac{1}{k} \\ 0 & \text{si } 2k+\frac{1}{k} < r \end{cases}$$

Así pues $A_0(1_k)(r)$ crece desde $r = k$ hasta $r = k+\frac{1}{k}$ donde alcanza el valor $1/(k+\frac{1}{k})$ y luego decrece hasta hacerse 0 a partir de $2k+\frac{1}{k}$.



Entonces

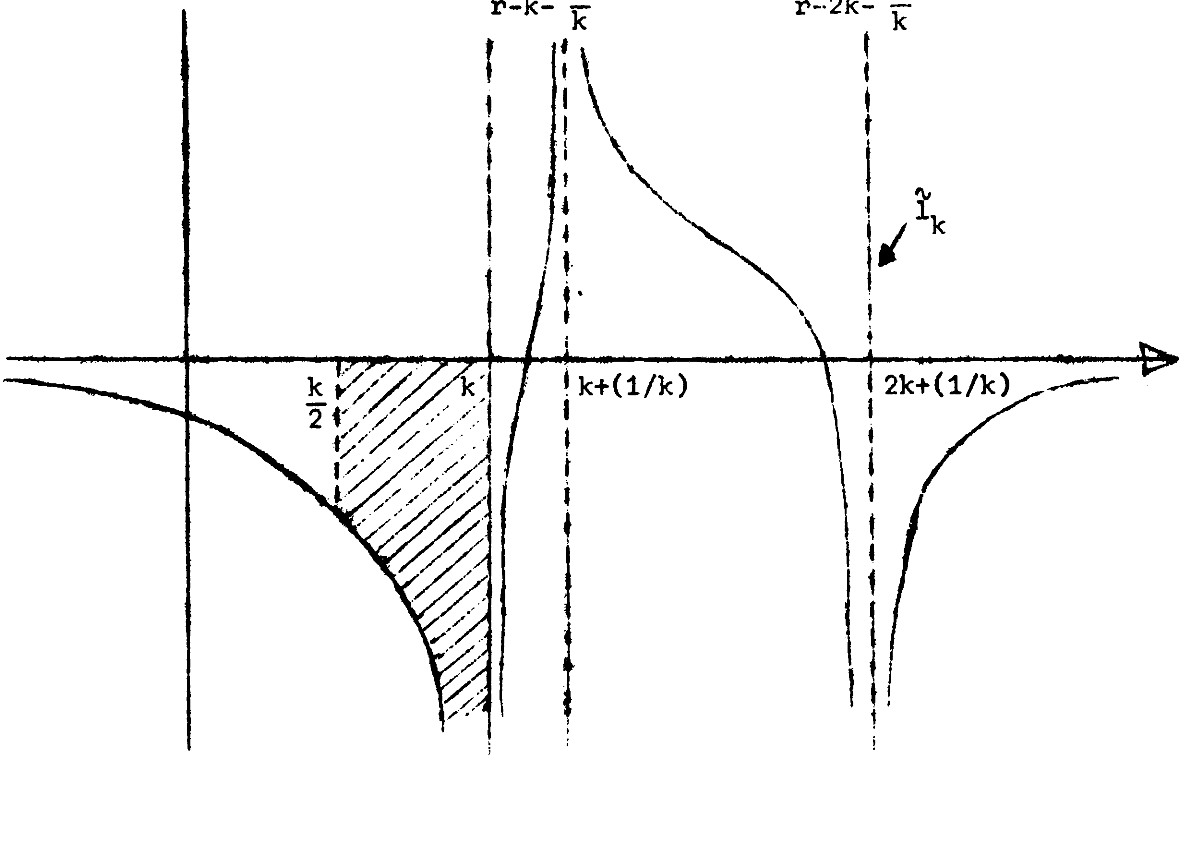
$$\int_{-\infty}^{\infty} |A_0(1_k)(r)|\, dr \leq \frac{1}{k+\frac{1}{k}}(2k + \frac{1}{k} - k) = 1$$

Cualquier

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k 1_k \quad \text{con} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty$$

será tal que $g(s)$ está en $L^1([0,\infty[)$ y $A_0(g)(r)$ también está en $L^1([0,\infty[)$. A continuación estudiamos la transformada de Hilbert

$$\tilde{1}_k(r) = k \log \left|\frac{r-k}{r-k-\frac{1}{k}}\right| - \frac{1}{k} \log \left|\frac{r-k-\frac{1}{k}}{r-2k-\frac{1}{k}}\right|$$



Existe una constante > 0 tal que para k suficientemente grande es:

$$\int_{k/2}^{k} |\tilde{I}_k(r)| \, dr \geq (\text{const}) \log k.$$

A continuación demostramos este hecho:

Para $r < k$

$$k \log \frac{k - r}{k + \frac{1}{k} - r} < \frac{1}{k} \log \frac{k + \frac{1}{k} - r}{2k + \frac{1}{k} - r}$$

ya que

$$k \log \frac{k - r}{k + \frac{1}{k} - r} = - \frac{\log(k-r) - \log(k + \frac{1}{k} - r)}{-1/k} = - \frac{1}{\theta_1}$$

para algún θ_1 tal que

$$k-r < \theta_1 < k-r+\frac{1}{k}$$

y

$$\frac{1}{k} \log \frac{k+\frac{1}{k} -r}{2k+\frac{1}{k} -r} = - \frac{\log(k+\frac{1}{k} -r) - \log(k+\frac{1}{k} -r+k)}{-k} = - \frac{1}{\theta_2}$$

para algún θ_2 tal que

$$k-r+\frac{1}{k} < \theta_2 < k-r+\frac{1}{k}+k$$

$$\theta_1 < \theta_2 \Longrightarrow - \frac{1}{\theta_1} < - \frac{1}{\theta_2}$$

Así pues, para $r < k$, $\tilde{I}_k(r) < 0$ y

$$\int_{k/2}^{k} |\tilde{I}_k(r)| dr = \int_{k/2}^{k} \left(\frac{1}{k} \log\left(\frac{k+\frac{1}{k} -r}{2k+\frac{1}{k} -r}\right) - k \log\left(\frac{k-r}{k+\frac{1}{k} -r}\right)\right) dr =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\int_{k/2}^{k} \log(k+\frac{1}{k} -r)dr - \int_{k/2}^{k} \log(2k+\frac{1}{k} -r) \, dr\right) -$$

$$- k\left(\int_{k/2}^{k} \log (k - r)\, dr - \int_{k/2}^{k} \log \left(k + \frac{1}{k} - r\right) dr\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\int_{1/k}^{(1/k+(k/2)} \log y\, dy - \int_{(1/k)+k}^{(1/k)+(3/2)k} \log y\, dy\right) -$$

$$- k\left(\int_{0}^{k/2} \log y\, dy - \int_{1/k}^{(1/k)+(k/2)} \log y\, dy\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\left(\frac{1}{k} + \frac{k}{2}\right) \log\left(\frac{1}{k} + \frac{k}{2}\right) - \frac{1}{k} \log \frac{1}{k} - \frac{k}{2} - \left(\frac{1}{k} + \frac{3k}{2}\right) \log\left(\frac{1}{k} + \frac{3k}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{k} + k\right) \log\left(\frac{1}{k} + k\right) + \frac{k}{2}\right\} - k\left\{\frac{k}{2} \log \frac{k}{2} - \frac{k}{2} -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{2}\right) \log \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{k} \log \frac{1}{k} + \frac{k}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{k}\right) \log \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k^2} \log k - \frac{1}{k}\left(\left(\frac{3k}{2} + \frac{1}{k}\right) \log \left(\frac{3k}{2} + \frac{1}{k}\right) -\right.$$

$$\left. - \left(k + \frac{1}{k}\right) \log \left(k + \frac{1}{k}\right)\right) + k\left(\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{k}\right) \log \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{k}\right) - \frac{k}{2} \log \frac{k}{2}\right) +$$

$$+ \log k = \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \log k + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k^2}\right) \log \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{k}\right) -$$

$$- 2(1 + \log \theta_1) + 1 + \log \theta_2$$

con

$$k+\frac{1}{k} < \theta_1 < \frac{3k}{2} + \frac{1}{k}$$

y

$$\frac{k}{2} < \theta_2 < \frac{k}{2} + \frac{1}{k}.$$

Por lo tanto:

$$\int_{k/2}^{k} |\tilde{1}_k(r)\, dr \geq (1 + \frac{1}{k^2}) \log k + (\frac{1}{2} + \frac{1}{k^2}) \log (\frac{k}{2} + \frac{1}{k}) -$$

$$- 1 - \log \frac{\theta_1^2}{\theta_2}.$$

Pero

$$1 < \frac{\theta_1^2}{\theta_2} \leq \frac{(\frac{3k}{2} + \frac{1}{k})^2}{k/2} \leq (\text{const})\ k.$$

Vemos pues que, para k suficientemente grande

$$\int_{k/2}^{k} |\tilde{1}_k(r)|\, dr \geq \log k + \frac{1}{2} \log \frac{k}{2} - 1 - \log ((\text{const})k) =$$

$$= \log k + \frac{1}{2} (\log k - \log 2) - 1 - \log (\text{const}) - \log k \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \log k - \text{const}.$$

Tomando ahora k suficientemente grande para que sea

$$(\text{const}) \leq \frac{1}{4} \log k,$$

tendremos

$$\int_{k/2}^{k} |\tilde{1}_k(r)| dr \geq \frac{1}{4} \log k.$$

Por lo tanto

$$||1_k||_{H^1(\mathbb{R})} \geq (\text{const})(||1_k||_1 + ||\tilde{1}_k||_1) \geq (\text{const}) \log k.$$

En este punto podemos deducir la existencia de g sin tener que construirla explícitamente.

Basta considerar la inclusión de $H^1_+(\mathbb{R})$ en el espacio de funciones f en $L^1([0,\infty[)$ para las cuales $A_0(f)$ está también en $L^1([0,\infty[)$, con la norma

$$||f||_1 + ||A_0(f)||_1.$$

Este último espacio es un espacio de Banach y la inclusión es continua. Si fuera "sobre", su inversa sería también continua y las normas

$$||f||_1 + ||A_0(f)||_1 \quad \text{y} \quad ||f||_1 + ||\tilde{f}||_1$$

serían equivalentes por el teorema de la aplicación abierta. Esto se contradice con la existencia de las l_k's. Así queda probada la existencia de g.

Sin embargo vamos a dar una manera explícita de construir g agregando l_k's. Tomemos una sucesión (k_n) de enteros positivos tal que

$$\frac{k_{n+1}}{2} > 2k_n + \frac{1}{k_n}$$

y k_1 es suficientemente grande. Tomemos también una sucesión (λ_n) de números reales positivos tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty \quad \text{pero} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \log k_n = \infty .$$

Entonces

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, l_{k_n}(s)$$

estará en $L^1([0,\infty[)$ y

$$||A_0(g)||_{L^1([0,\infty[)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty.$$

Sin embargo

$$||\tilde{g}||_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |\sum_{m=1} \lambda_m \tilde{1}_{k_m}(r)|dr \geq$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{k_n/2}^{k_n} |\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \tilde{1}_{k_m}(r)| \, dr \geq$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \int_{k_n/2}^{k_n} |\tilde{1}_{k_n}(r)| \, dr \geq (\text{const}) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \log k_n = \infty.$$

Así pues $\tilde{g} \notin L^1(\mathbb{R})$, es decir: $g \notin H^1(\mathbb{R})$.

Una manera de elegir las dos sucesiones es, por ejemplo, $k_n = 6^n n_0$ con n_0 suficientemente grande y $\lambda_n = 1/n^2$.

§5. EXTENSION DE LOS RESULTADOS DE §2 PARA $p < 1$.

Cuando nos planteamos la pregunta de si el espacio de las "funciones" radiales de $H^p(\mathbb{R}^n)$ y el espacio de las "funciones" pares de $\mathcal{H}^p(|r|^{n-1}dr)$ son equivalentes; el primer problema con que nos enfrentamos es el hecho de que no sabemos si el espacio $H^p(\mathbb{R}^n)$ definido mediante un sistema de transformaciones de Riesz, coincide con el espacio engendrado por los átomos. Un p-átomo en $\mathbb{R}^n$ será una función $A(x)$ con soporte en una bola B y tal que

$$\int A(x)\, P(x)\, dx = 0$$

para todo polinomio de grado $\leq$

$$\leq \left[n\left(\frac{1}{p} - 1\right)\right] \quad y \quad |A(x)| \leq \frac{1}{|B|^{1/p}}$$

Se sabe que el dual de $H^p(\mathbb{R}^n)$ definido por un sistema de transformaciones de Riesz, es el espacio de Lipschitz $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ con $\alpha = n(\frac{1}{p} - 1)$. $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ se define como el espacio de las clases de equivalencia $[l]$ módulo polinomios de grado $[\alpha]$ de funciones l para las que existe una constante C tal que para cada bola B existe un polinomio Q_B de grado $\leq [\alpha]$ tal que para $x \in B$

$$|l(x) - Q_I(x)| \leq C|B|^{\alpha/n}$$

El ínfimo de todas las C's es

$$\|[l]\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)}$$

Véase [7]. Es claro que cada p-átomo A da lugar a un funcional lineal continuo L_A sobre $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ para $\alpha = n(\frac{1}{p} - 1)$ definido como

$$L_A([1]) = \int_{\mathbb{R}^n} 1(x)\, A(x)\, dx.$$

El espacio $H^p(\mathbb{R}^n)$ atómico puede definirse como el espacio de todos los funcionales lineales y continuos L sobre $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ con $\alpha = n(\frac{1}{p} - 1)$ que pueden escribirse como

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i L_{A_i} \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p < \infty$$

y los A_i pátomos. La suma es, naturalmente, en el espacio de Banach $(\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n))^*$. La quasi-norma en este espacio H^p vendría dada por

$$L \longmapsto (N_p(L))^p$$

donde $N_p(L)$ es el extremo inferior de

$$\{\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p\}^{1/p}$$

tomado sobre todas las descomposiciones. Está claro que este espacio $H^p(\mathbb{R}^n)$ atómico, está contenido en el espacio $H^p(\mathbb{R}^n)$ dado por las transformaciones de Riesz y que, además, los dos espacios tienen el mismo dual. Como $p < 1$, las quasi-normas no son normas y no disponemos del teorema de Hahn-Banach. No podemos concluir, por tanto, que los dos espacios coinciden porque tienen el mismo dual. Así era como demostrábamos que $H^1(\mathbb{R}^n)$ coincide con el subespacio engendrado por los átomos. La descomposición atómica directa de una función de H^p, $p < 1$, en la recta, dada por Coifman en [8], no se extiende a varias dimensiones a causa de la geometría más complicada de las componentes conexas de un conjunto abierto arbitrario. Pero, aunque tuviéramos una descomposición de $H^p(\mathbb{R}^n)$, nuestros problemas no se acabarían aquí, Supongamos que estamos en el caso más simple, que es $p > \frac{n}{n+1}$, de forma que un p-átomo no ha de tener más momentos nulos que la integral. Sea $A(x)$ un p-átomo en $\mathbb{R}^n$. Es decir: A vive en una bola B;

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)\,dx = 0 \quad \text{y} \quad |A(x)| \leq \frac{1}{|B|^{1/p}}$$

Sea

$$a(r) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|}\int_{\Sigma_{n-1}} A(rx')\,dx'.$$

Si $r_0 = \text{dist}\,(0,B)$ y $\delta = \text{diam}\,B$, $a(r)$ vive en $[r_0,\ r_0+\delta]$,

$$\int_0^\infty a(r)\,r^{n-1}\,dr = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{|\Sigma_{n-1}|}\int_{\Sigma_{n-1}} A(rx')dx'\Big)r^{n-1}\,dr =$$

$$= (\text{const})\int_{\mathbb{R}^n} A(x)\,dx = 0.$$

$$|a(r)| = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|}\Big|\int_{\Sigma_{n-1}} A(rx')dx'\Big| \leq \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|}\int_{\Sigma_{n-1}} |A(rx')|dx' \leq$$

$$\leq \frac{(\text{const})}{\delta^{n/p}}.$$

Si $r_0 < \delta$, como

$$\int_{r_0}^{r_0+\delta} r^{n-1}dr \leq (r_0+\delta)^{n-1}\delta \leq (\text{const})\ \delta^n,$$

será

$$\frac{(\text{const})}{(\delta^n)^{1/p}} \leq \frac{(\text{const})}{\Big(\int_{r_0}^{r_0+\delta} r^{n-1}\,dr\Big)^{1/p}},$$

de forma que $a(r)/(\text{const})$ es un p-átomo de t.h. con respecto al peso $|r|^{n-1}$. Ahora bien, para $r_0 > \delta$ si usamos el mismo método que para $p = 1$ obtendríamos:

$$|a(r)| \leq \frac{1}{\left[\frac{r_0^{n-1}}{\delta^{n-1}}\right]} \frac{(\text{const})}{\delta^{n/p}} \leq \frac{(\text{const})}{\frac{r_0^{n-1}}{\delta^{n-1}}\,\delta^{n/p}}$$

que es mayor que la acotación que necesitaríamos:

$$\frac{(\text{const})}{\left(\frac{r_0^{n-1}}{\delta^{n-1}}\right)^{1/p} \delta^{n/p}}$$

Esto parece indicar que al aplicar una rotación a una "función" en H^p podemos obtener algo que no está en H^p.

Sin embargo la otra parte de la demostración sigue siendo válida; es decir: si a es un p-átomo de t.h. con respecto a $|r|^{n-1}$ y que vive en la semirrecta $[0,\infty[$, digamos en el intervalo $[r_0,r_0+\delta[$, $r_0 > 0$; y le asociamos la función radial $A(x) = a(|x|)$ en $\mathbb{R}^n$, podemos descomponer $A(x)$ en suma de p-átomos

$$A(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A^{(j)}(x) \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p \leq (\text{const})$$

independiente de a. Que a es un p-átomo de t.h. con respecto a $|r|^{n-1}$ significa que

$$\int_0^\infty a(r)\, r^{n-1}\, dr = 0$$

$$|a(r)| \leq \frac{1}{\left(\int_{r_0}^{r_0+\delta} r^{n-1} dr\right)^{1/p}}.$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} a(|x|)\, dx = |\Sigma_{n-1}| \int_0^\infty a(r) r^{n-1}\, dr = 0$$

Si $r_0 < \delta$,

$$|A(x)| \leq \frac{1}{\left(\int_{r_0}^{r_0+\delta} r^{n-1}dr\right)^{1/p}} \leq \frac{(\text{const})}{((r_0+\delta)^{n-1}\delta)^{1/p}} \leq$$

$$\leq \frac{(\text{const})}{((r_0+\delta)^n)^{1/p}} = \frac{(\text{const})}{|B(0,r_0+\delta)|^{1/p}} .$$

Como A vive en la bola $B(0,r_0+\delta)$; $A(x)/(\text{const})$ es un p-átomo en $\mathbb{R}^n$. Si $\delta < r_0$ dividimos la región $r_0 < |x| < r_0+\delta$ en

$$N = \left[\frac{r_0^{n-1}}{\delta^{n-1}}\right] + 1$$

"cubos esféricos" Q_j de medida $\leq$ (const) δ^n y hacemos

$$A^{(j)}(x) = A(x)\,\chi_{Q_j}(x).$$

Entonces

$$A(x) = \sum_{j=1}^{N} A^{(j)}(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N^{1/p}}\, N^{1/p} A^{(j)}(x).$$

Pero $N^{1/p} A^{(j)}(x)$ es un p-átomo en $\mathbb{R}^n$. En efecto $A^{(j)}$ vive en la bola más pequeña que contiene a Q_j. Llamémosle B_j. Será

$$|B_j| \leq (\text{const})\ \delta^n$$

conde (const) no depende de A ni de j.

$$\int_{\mathbb{R}^n} A^{(j)}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} A(x)\,\chi_{Q_j}(x)\,dx =$$

$$= \left(\int_{r_0}^{r_0+\delta} a(r)\, r^{n-1}dr\right)\left(\int_{\Sigma_{n-1}} \chi_{Q_j}(r_0x')dx'\right) = 0$$

En cuanto al tamaño:

$$|N^{1/p}\, A^{(j)}(x)| \leq (\text{const})\left(\frac{r_0^{n-1}}{\delta^{n-1}}\right)^{1/p} \frac{1}{((r_0+\delta)^{n-1}\delta)^{1/p}} \leq$$

$$\leq \frac{(\text{const})}{(\delta^n)^{1/p}} \leq \frac{(\text{const})}{|B_j|^{1/p}}$$

Así pues

$$\frac{N^{1/p}\, A^{(j)}(x)}{(\text{const})}$$

es un p-átomo en $\mathbb{R}^n$.

$$A(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N^{1/p}}\, N^{1/p}\, A^{(j)}(x) = (\text{const}) \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N^{1/p}} \frac{N^{1/p} A^{(j)}(x)}{(\text{const})}$$

y

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{N^{1/p}}\right)^p = N\,\frac{1}{N} = 1$$

Lo que obtenemos es una inclusión

$$\mathfrak{H}^p_{par}(|r|^{n-1}\, dr) \hookrightarrow H^p_{rad}(\mathbb{R}^n)$$

Para asegurarnos de que esta inclusión se sigue de la relación entre los p-átomos de t.h. con respecto a $|r|^{n-1}$ y los p-átomos en $\mathbb{R}^n$; hemos de ver que si una suma de p-átomos de t.h. con respecto a $|r|^{n-1}$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, a_i,$$

representa el funcional o sobre $\mathcal{L}^*_\alpha(|r|^{n-1}\, dr)$ para $\alpha = (1/p) - 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\Sigma \alpha_{ij} A_i^{(j)})$$

representa el funcional 0 sobre $\Lambda_\beta(\mathbb{R}^n)$ para $\beta = n(\frac{1}{p} - 1)$. Esto es consecuencia inmediata del hecho de que si l es una función en $\Lambda_\beta(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\bar{l}(r) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} l(rx')\, dx'$$

está en $\mathcal{L}_\alpha(|r|^{n-1}\, dr)$.

Para completar la equivalencia para $n/(n+1) < p$ vemos que para una función radial en $H^p(\mathbb{R}^n)$, las dificultades geométricas para obtener una descomposición atómica desaparecen y tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA IV.5.1. *Sea* F *una función radial en* $H^p(\mathbb{R}^n)$, $p > n/(n+1)$. *Suponemos que* F *es suficientemente "buena". Entonces*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, A_i(x)$$

en casi todo x *(la convergencia puede mejorarse dependiendo de la integrabilidad de* F) *con*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p \leq (\text{const})\, \|F\|^p_{H^p(\mathbb{R}^n)},$$

$A_i(x)$ *vive en un conjunto*

$$I_i = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \alpha_i < |x| < \beta_i < \infty\},$$

tiene integral 0 *y*

$$|A_i(x)| \leq \frac{1}{|I_i|^{1/p}}$$

Los $A_i^!s$ sumplen las mismas condiciones que los p-átomos con la única diferencia de que viven en "anillos" centrados en el origen en lugar de vivir en bolas. Una vez conseguida la descomposición, es claro que podemos suponer los $A_i^!s$ radiales. Basta sustituir $A_i(x)$ por

$$B_i(x) = \frac{1}{|\Sigma_{n-1}|} \int_{\Sigma_{n-1}} A_i(|x|y')\, dy'.$$

DEMOSTRACION. El punto de partida es el hecho de que si F es radial, la función maximal

$$(R_K^*F)(x) = \sup_{\Omega\in\mathcal{S}_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^n} F(x-t)\Omega(t)dt\right|}{||\Omega||^{(K+1)}}$$

(donde

$$||\Omega||^{(K+1)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq K+1} \int_{\mathbb{R}^n} |t|^{|\alpha|}\ |\partial^\alpha\Omega(t)|\ dt$$

con α un multi-índice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$) que caracteriza a $H^p(\mathbb{R}^n)$ para K suficientemente grande, es "casi" radial en el sentido de que existe una constante C tal que para cada rotación $\rho \in SO(n)$:

$$(R_K^*F)(\rho x) \leq C(R_K^*F)(x).$$

En efecto, sea $\rho\in SO(n)$.

$$(R_K^*F)(\rho x) = \sup_{\Omega\in\mathcal{S}_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^n} F(\rho x-t)\ \Omega(t)\ dt\right|}{||\Omega||^{(K+1)}} =$$

$$= \sup_{\Omega\in\mathcal{S}_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^n} F(x-u)\ \Omega(\rho u)\ du\right|}{||\Omega||^{(K+1)}}$$

ya que F es radial. Ahora lo único que necesitamos demostrar es que

$$||\Omega(\rho\ldots)||^{(K+1)} \leq C' \; ||\Omega||^{(K+1)}$$

donde C' depende solamente de n y de K y no de Ω o de ρ. Esto está claro ya que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Omega(\rho y)| \; dy = \int_{\mathbb{R}^n} |\Omega(y)| dy;$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |t| \; |(\frac{\partial}{\partial x_i} \Omega(\rho\ldots))(t)| \; dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |t| \; |\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \; \Omega(\rho t) \; \rho_{ij}| \; dt \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |t| \; \sum_j |\frac{\partial}{\partial x_j} \; \Omega(\rho t)| \; |\rho_{ij}| \; dt \leq$$

$$\leq \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} |t| \; |\frac{\partial}{\partial x_j} \Omega(\rho t)| \; dt = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} |t| \; |\frac{\partial}{\partial x_j} \; \Omega(t)| \; dt.$$

y lo mismo ocurre para otros órdenes de diferenciación. Así

$$(R_K^* F)(\rho x) = \sup_{\Omega \in \mathcal{E}_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{|\int_{\mathbb{R}^n} F(x-u) \; \Omega(\rho u) \; du|}{||\Omega||^{(K+1)}} \leq$$

$$\leq (\text{const}) \sup_{\Omega \in \mathcal{E}_0^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{|\int_{\mathbb{R}^n} F(x-u) \; \Omega(\rho u) \; du|}{||\Omega(\rho\ldots)||^{(K+1)}} \leq$$

$$\leq (\text{const}) \; (R_K^* F)(x).$$

El siguiente paso es obtener una descomposición de Calderón-Zygmund de nuestra función para cada $\lambda > 0$. Consideremos el abierto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : (R_K^* F)(x) > \lambda\}$$

y sea

$$\theta^\lambda = \bigcup_{\rho \in SO(n)} \rho(\{x \in \mathbb{R}^n : (R_K^* F)(x) > \lambda\})$$

que es también abierto. θ^λ es un conjunto radial, es decir: $x \in \theta^\lambda$ y $\rho \in SO(n) \Rightarrow$ $\Rightarrow \rho x \in \theta^\lambda$. Por lo tanto, las componentes conexas de θ^λ serán "anillos" abiertos de la forma $\{x : \alpha < x < \beta\}$. También

$$\theta^\lambda \subset \{x \in \mathbb{R}^n : (R_K^* F)(x) > \lambda/C\}$$

y

$$\theta^\lambda \supset \{x \in \mathbb{R}^n : (R_K^* F)(x) > C\lambda\}.$$

Así pues, en el complemento de θ^λ es

$$(R_K^* F)(x) \leq C\lambda.$$

Tomemos ahora cualquiera de los "anillos" I_i^λ que son las componentes conexas de θ^λ. Será un conjunto abierto acotado para el que podemos encontrar un recubrimiento de tipo Whitney, es decir, un recubrimiento de I_i^λ mediante intervalos cúbicos Q_{ij}^λ cuyos interiores son disjuntos y cuyos diámetros son aproximadamente proporcionales a sus distancias al complemento de I_i^λ. A cada uno de estos intervalos le asociamos una función $\phi_{ij}^\lambda = \phi_j$ en $\mathcal{D}_0^\infty$, que es 1 en Q_j y cuyo soporte es $\delta_\varepsilon(Q_j)$, el intervalo que resulta de dilatar Q_j por un ε apropiado. Los soportes de las ϕ_j's forman un recubrimiento M-disjunto con M dependiente de la dimensión. La suma $\sum \phi_j$ es una función en $\mathcal{D}_0^\infty$ acotada lejos de 0 y de ∞ y con soporte dentro de nuestro anillo abierto. A partir de las ϕ_j's construimos una partición de la unidad tomando

$$\Omega_j(x) = \frac{\phi_j(x)}{\sum \phi_i(x)}.$$

Para ser precisos tenemos $\Omega_j \equiv \Omega_j^i$. Entonces

$$\chi_{I_i} = \sum_j \Omega_j^i$$

Sea

$$B_i(x) = \sum_j (F(x) - m_j^i)\, \Omega_j^i(x)$$

donde

$$m_j^i = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \Omega_j^i(x)\, dx} \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\, \Omega_j^i(x)\, dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} B_i(x)\, dx = \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} (F(x) - m_j^i)\, \Omega_j^i(x)\, dx =$$

$$= \sum_j \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\, \Omega_j^i(x)\, dx - m_j^i \int_{\mathbb{R}^n} \Omega_j^i(x)\, dx\right) = 0.$$

$$F(x) = F(x)\, \chi_{\mathbb{R}^n - \bigcup_i I_i}(x) + \sum_i F(x)\, \chi_{I_i}(x) =$$

$$= F(x)\, \chi_{\mathbb{R}^n - \bigcup_i I_i}(x) + \sum_i F(x)\left(\sum_j \Omega_j^i(x)\right) =$$

$$= F(x)\, \chi_{\mathbb{R}^n - \bigcup_i I_i}(x) + \sum_i \sum_j F(x)\, \Omega_j^i(x) =$$

$$= F(x)\, \chi_{\mathbb{R}^n - \bigcup_i I_i} + \sum_i \sum_j m_j^i\, \Omega_j^i(x) + \sum_i \sum_j (F(x) - m_j^i)\, \Omega_j^i(x)$$

Llamemos

$$G^{\lambda}(x) = F(x)\, \chi_{\mathbb{R}^n - \bigcup_i I_i} + \sum_i \sum_j m_j^i\, \Omega_j^i(x)$$

y

$$B_i(x) = \sum_j (F(x) - m_j^i)\, \Omega_j^i(x).$$

$$F(x) = G^{\lambda}(x) + \sum_i B_i^{\lambda}(x)$$

Los B_i^{λ}'s viven en los "anillos" I_i^{λ} y tienen media 0. Ahora veremos que

$$|G^{\lambda}(x)| \leq (\text{const})\, \lambda.$$

$$G^{\lambda}(x) = F(x)\, \chi_{\mathbb{R}^n - 0^{\lambda}}(x) + \sum_{ij} m_j^i\, \Omega_j^i(x)$$

En $\mathbb{R}^n - 0^{\lambda}$:

$$G^{\lambda}(x) = F(x)$$

y

$$|G^{\lambda}(x)| = |F(x)| \leq C''|R_K^{*}F(x)| \leq C''C\lambda = (\text{const})\lambda.$$

En I_i^{λ},

$$G^{\lambda}(x) = \sum_j m_j^i\, \Omega_j^i(x);$$

pero

$$|m_j^i| = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \Omega_j^i(y)\, dy}\, \left|\int_{\mathbb{R}^n} F(y)\, \Omega_j^i(y)\, dy\right|$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} F(y)\,\Omega_j^i(y)\,dy\right| \leq (R_K^* F)(x)\,||\Omega_j^i(x-\cdot)||^{(K+1)}.$$

Elegimos x en $\mathbb{R}^n - \theta^\lambda$ tal que

$$\text{dist}\,(Q_j^i, x) \leq 2\,\text{dist}\,(Q_j^i, \mathbb{R}^n - \theta^\lambda) \leq 2\,(\text{const})\,\text{diam}\,(Q_j^i).$$

Entonces:

(i) $(R_K^* F)(x) \leq C\lambda$ ya que $x \in \mathbb{R}^n - \theta^\lambda$.

(ii) $$\frac{||\Omega_j^i(x-\cdot)||^{(K+1)}}{\int_{\mathbb{R}^n} \Omega_j^i(y)\,dy} \leq (\text{const})$$

En total

$$|m_j^i| \leq (\text{const})\,\lambda.$$

Así

$$|G^\lambda(x)| \leq \sum_j |m_j^i|\,\Omega_j^i(x) \leq (\text{const})\lambda\,\chi_{I_i}(x).$$

Ahora, para terminar la demostración de (IV.5.1) combinamos las descomposiciones de Calderón-Zygmund obtenidas para $\lambda = 2^k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $F(x)=G^k(x)+\sum_i B_i^k(x)$ $G^k(x) \to F(x)$ cuando $k \to \infty$ ya que la diferencia vive en

$$\theta^{2^k} \subset \{x : R_K^* F(x) > 2^k/C\}$$

cuya medida

$$\left(\leq \frac{\int (R_K^* F)(x))^p}{(2^k/C)^p}\right)$$

tiende a 0 cuando $k \to \infty$. $G_k(x) \to 0$ cuando $k \to -\infty$ porque

$$|G^k| \leq (\text{const})\ 2^k \to 0$$

cuando $k \to -\infty$.

Así pues

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (G^{k+1}(x) - G^k(x)) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}((\sum_i B_i^k) - (\sum_j B_j^{k+1})) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_i (B_i^k - \sum_{j:I_j^{k+1} \subset I_i^k} B_j^{k+1}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_i \Lambda_i^k(x).$$

Esto es posible ya que $\theta^{2^{k+1}} \subset \theta^{2^k}$ y cada componente conexa de $\theta^{2^{k+1}}$ está contenida en una y sólo una componente conexa de θ^{2^k}.

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_i \Lambda_i^k(x),$$

$\Lambda_i^k(x)$ vive en I_i^k y coincide allí con $G^{k+1} - G^k$ puesto que los I_i^k's para el mismo k y diferentes i's son disjuntos. Así

$$|\Lambda_i^k(x)| = |G^{k+1}(x) - G^k(x)| \leq (\text{const})\ 2^k.$$

Claramente

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Lambda_i^k(x)\, dx = 0.$$

Sea

$$A_i^k(x) = \frac{\Lambda_i^k(x)}{(\text{const})\ 2^k\ |I_i^k|^{1/p}}$$

Entonces los A_i^k's tienen todas las propiedades que aparecen en el enunciado del teorema.

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_i (\text{const})\ 2^k\ |I_i^k|^{1/p}\ A_i^k(x)$$

Todo lo que queda por demostrar es que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_i (\text{const})^p\ 2^{kp}\ |I_i^k| \leq (\text{const}) \int_{\mathbb{R}^n} |R_K^* F(x)|^p\ dx.$$

Pero

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_i 2^{kp} |I_i^k| = \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{kp}\ |\theta^{2k}| \leq$$

$$\leq \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{kp}\ |\{x \in \mathbb{R}^n : R_K^* F(x) > \frac{2^k}{C}\}| =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} 2^k\ 2^{k(p-1)}\ |\{x \in \mathbb{R} : R_K^* F(x) > \frac{2^k}{C}\}| =$$

$$= 2 \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{k-1}\ 2^{k(p-1)}\ |\{x \in \mathbb{R}^n : R_K^* F(x) > \frac{2^k}{C}\}| \leq$$

$$\leq 2 \int_0^{\infty} \lambda^{p-1}\ |\{x \in \mathbb{R}^n : R_K^* F(x) > \frac{\lambda}{C}\}|\ d\lambda =$$

$$= 2 \int_0^{\infty} C^{p-1}\ \nu^{p-1}\ |\{x \in \mathbb{R}^n : R_K^* F(x) > \nu\}| C\ d\nu =$$

$$= (\text{const}) \int_0^{\infty} \nu^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n : R_K^* F(x) > \nu\}|\ d\nu =$$

$$= (\text{const}) \int_{\mathbb{R}^n} |R_K^*(x)|^p \, dx \leq (\text{const}) \, ||F||^p_{H^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Así termina la demostración de (IV.5.1) y a partir de aquí se sigue fácilmente la equivalencia entre $H^p_{rad}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{H}^p_{par}(|r|^{n-1}\, dr)$.

REFERENCIAS

[1] ASH, J.M. (Editor). Studies in Harmonic Analysis. M.A.A. Aparecerá próximamente.

[2] COIFMAN, R.R. A real variable characterization of H^p, Studia Math. 51, 259-274 (1974).

[3] COIFMAN, R.R. y FEFFERMAN, C. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math.51, 241-250 (1974).

[4] COIFMAN, R.R. y WEISS, G. Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogenes. Lecture notes in Mathematics 242 Springer-Verlag, Berlín (1971).

[5] ERDELYI, A. (Director). Higher transcendental functions. Vol. I-III. Bateman Manuscript Project, Mc. Graw-Hill, New York (1953).

[6] ERDELYI, A. (Director). Tables of integral transforms. Vol. I-II, Bateman Manuscript Project, Mc. Graw-Hill, New York (1954).

[7] FEFFERMAN, C. y STEIN, E.M. H^p spaces of several variables. Acta Math. 129, 137-193 (1972).

[8] GANDULFO, A.; GARCIA-CUERVA, J. y TAIBLESON, M. Conjugate system characterizations of H^1: counterexamples for the euclidean plane and local fields. Aparecerá próximamente en "Bulletin of the A.M.S."

[9] JOHN, F. y NIRENBERG, L. On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure and Appl. Math. 14, 415-426 (1961).

[10] MACIAS, R. Interpolation theorems on generalized Hardy espaces. Teses Doctoral. Washington University, St. Louis, Missouri (1974).

[11] MUCKENHOUPT, B. y STEIN, E.M. Classical expansions and their relations to conjugate harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 118, 17-92 (1965).

[12] MUCKENHOUPT, B. y WHEEDEN, R.L. Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform. Aparecerá próximamente.

[13] STEIN, E.M. Singular integrals and differencitability properties of functions. Princeton University Press, Princeton (1970).

[14] STEIN, E.M. Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces. Princeton University Press, Princeton (1971).

[15] YOSIDA, K. Functional analysis. Springer-Verlag (1968).

[16] ZYGMUND, A. Trigonometric series. Segunda edición. Cambridge. 1968.