CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS
Patronato "Alfonso el Sabio"

REVISTA MATEMATICA HISPANO-AMERICANA

PUBLICADA POR EL INSTITUTO «JORGE JUAN» DE MATEMATICAS Y LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA

CUARTA SERIE
Tomo XII

MADRID
1952

ORIENTACION DE VARIEDADES ALGEBRAICAS

por

PEDRO ABELLANAS

§ 1. Introducción

En el § 2 se establece una definición aritmética del concepto de orientación de una variedad irreducible, del espacio afín, sobre un cuerpo de constantes ordenable.

Por otra parte, es bien conocido [2] (*) que, importantes propiedades topológicas de las variedades algebraicas sobre el cuerpo de los números complejos descansan en la propiedad de ser el número algebraico de intersecciones de las subvariedades igual al número aritmético de las mismas. Aquí, § 5, damos una demostración aritmética de esta propiedad, basada en la definición del § 2, en el caso de ser el cuerpo de constantes una ampliación algebraica finita y normal de un cuerpo ordenable, que cumple determinadas condiciones.

§ 2. Orientación de variedades algebraicas sobre un cuerpo ordenable

Sea $R=k[x_1, \ldots, x_n]$ un anillo de polinomios con n indeterminadas sobre un cuerpo de constantes, k, ordenable; V una variedad irreducible de dimensión r del espacio afín E_n, definida por el ideal $\mathfrak{p}$ de R; $\mathfrak{o}=k[\xi_1, \ldots, \xi_n]=R/\mathfrak{p}$ y $\Sigma=k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Supondremos que V posee k-puntos, es decir: puntos cuyas coordenadas pertenecen todas a k. Sean A, B y C tres k-puntos simples de V, definidos por los ideales $\mathfrak{p}_A=(x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n)$, $\mathfrak{p}_B=(x_1-b_1, \ldots, x_n-b_n)$ y $\mathfrak{p}_C=(x_1-c_1, \ldots, x_n-c_n)$; $a_i, b_i, c_i \in k$, $i=1, \ldots, n$; y sea $\quad \mathfrak{P}_A=\mathfrak{p}_A/\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{P}_B=\mathfrak{p}_B/\mathfrak{p} \quad$ y $\quad \mathfrak{P}_C=\mathfrak{p}_C/\mathfrak{p}$.

(*) Los números entre paréntesis rectangular se refieren a la literatura citada al final.

LEMA 1.—*Existen* n−r *parámetros de uniformización del entorno de* V, $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-r}$, *pertenecientes a* R, *linealmente independientes mód.* $\mathfrak{p}_A^2$, *mód.* $\mathfrak{p}_B^2$ *y mód.* $\mathfrak{p}_C^2$ (*).

DEMOSTRACIÓN.—De la definición clásica de punto simple ([3], pág. 2) se deduce la existencia de tres polinomios, $P_i(x)$, tales que $P_i(x) \equiv 0$ ($\mathfrak{p}$), $i=1, 2, 3$, $P_1(x) \not\equiv 0$ ($\mathfrak{p}_A^2$), $P_2(x) \not\equiv 0$ ($\mathfrak{p}_B^2$) y $P_3(x) \not\equiv 0$ ($\mathfrak{p}_C^2$). Por consiguiente, existe una combinación lineal de estos tres, que representaremos por $\bar{x}_1$, tal que

$$\bar{x}_1 \equiv 0\,(\mathfrak{p}), \quad \bar{x}_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_A^2), \quad \bar{x}_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_B^2), \quad \bar{x}_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_C^2).$$

Supongamos hallados los polinomios $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i$, tales que $\bar{x}_j \equiv 0$ ($\mathfrak{p}$), $j=1, \ldots, i$, y que si se verifica $\sum_{j=1}^{i} \varphi_j \bar{x}_j \equiv 0$ ($\mathfrak{p}_A^2$) se deduce $\varphi_j \equiv 0$ ($\mathfrak{p}_A$), $j=1, \ldots, i$, y análogamente para $\mathfrak{p}_B^2$ y $\mathfrak{p}_C^2$. Vamos a ver que si $i<n-r$ se puede determinar otro polinomio, $\bar{x}_{i+1}$, que unido a los anteriores goce de sus mismas propiedades. De nuevo, por la definición clásica de punto simple, resulta la existencia de tres polinomios, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$, pertenecientes a $\mathfrak{p}$ tales que $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i$, Q_1 son linealmente independientes mód. $\mathfrak{p}_A^2$; $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i$, Q_2 lo son mód. $\mathfrak{p}_B^2$ y $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i$, Q_3 lo son mód. $\mathfrak{p}_C^2$. De aquí se deduce inmediatamente la existencia de una combinación lineal, $\bar{x}_{i+1}$, de Q_1, Q_2 y Q_3 tal que $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i$, $\bar{x}_{i+1}$ son linealmente independientes mód. $\mathfrak{p}_A^2$, mód. $\mathfrak{p}_B^2$ y mód. $\mathfrak{p}_C^2$.

Q. e. d.

A los parámetros del lema anterior los llamaremos: sistema de parámetros de uniformización a lo largo de V *admisibles en* A, B y C.

En virtud de la hipótesis, se pueden hallar sistemas de parámetros de uniformización de los entornos de A, B y C en V de la forma:

$$I_\alpha = (\xi_{\alpha_1} - a_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r} - a_{\alpha_r}), \quad I_\beta = (\xi_{\beta_1} - b_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_r} - b_{\beta_r}),$$
$$I_\gamma = (\xi_{\gamma_1} - c_{\gamma_1}, \ldots, \xi_{\gamma_r} - c_{\gamma_r}).$$

(*) Análogo lema es cierto si V es subvariedad simple de otra variedad y A, B, C son subvariedades simples de V.

A tales sistemas, *cuando se consideran sus elementos en el orden en el que están escritos,* les llamaremos *indicatrices* de A, B y C, respectivamente. Llamaremos *índice* de la indicatriz $I_\alpha^{\prime\prime}$ respecto de I_β, y lo representaremos por $\varepsilon_{\alpha\beta}$, o, simplemente por ε, al número $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon = (-1)^i$, siendo i el número de inversiones de la sustitución $\begin{pmatrix} \beta_1, \ldots, \beta_r \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \end{pmatrix}$.

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, indeterminadas independientes sobre R y efectuemos la siguiente sustitución en los parámetros de uniformización $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-r}$, admisibles en A, B y C,

$$x_i = x_i^* + \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Sea $\mathbf{p}^*_0 = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$, entonces será:

$$(\bar{x}_1(x), \ldots, \bar{x}_{n-r}(x))' \equiv \mathrm{M}(x^*_1, \ldots, x^*_n)' + (\bar{x}_1(\lambda), \ldots, \bar{x}_{n-r}(\lambda))' (\mathbf{p}_0{}^{*2}), \tag{2}$$

en donde M es una matriz $(n-r) \times n$ cuyos elementos son polinomios en las (λ); y las $\bar{x}_i(\lambda)$ son los polinomios que se obtienen al sustituir las (x) por las (λ) en $\bar{x}_i(x)$. Llamaremos M_α, M_β, M_γ a las matrices que se obtienen tachando en M las columnas que ocupan los lugares $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$, respectivamente. Aquéllas son, por consiguiente, matrices $(n-r) \times (n-r)$. Sea $m(\lambda)$ el m. c. d. de todos los menores de orden $(n-r)$ de M y

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mathrm{M}_\alpha| = \mathrm{T}_\alpha(\lambda) \cdot m(\lambda) \\ |\mathrm{M}_\beta| = \mathrm{T}_\beta(\lambda) \cdot m(\lambda) \end{array} \right. . \tag{3}$$

Como A y B son puntos de V, será $\bar{x}_i(a) = \bar{x}_i(b) = 0$, $i = 1, \ldots, n-r$ y, por otra parte, por ser $(\xi_{\alpha_1} - a_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r} - a_{\alpha_r})$ parámetros de uniformización del primer entorno de A en V y ser $\bar{x}_1(x), \ldots, \bar{x}_{n-r}(x)$ parámetros de uniformización a lo largo de V y admisibles en A, se verifica que

$$(x_{\alpha_1} - a_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_r} - a_{\alpha_r}, \bar{x}_1(x), \ldots, \bar{x}_{n-r}(x))$$

es un sistema de parámetros de uniformización del primer entorno de A en E_n y, por consiguiente, el determinante que resulta de sustituir en $|M_\alpha|$ las (λ) por las (a) es distinto de cero y de aquí resulta que también $T_\alpha(a) \neq 0$. Por idénticas razones es $T_\beta(b) \neq 0$.

Definición.—Diremos que la indicatriz $I_\alpha = (\xi_{\alpha_1} - a_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r} - a_{\alpha_r})$ *pertenece a la misma clase* que $I_\beta = (\xi_{\beta_1} - b_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_r} - b_{\beta_r})$, siendo $A \neq B$, cuando se verifica que

$$\varepsilon\, T_\alpha(a) T_\beta(b) > 0. \tag{4}$$

Para justificar esta definición demostraremos la siguiente:

Proposición 1.—*La propiedad de pertenecer dos indicatrices a la misma clase no depende de los polinomios auxiliares* $\bar{x}_i$, $i = 1, \ldots, n-r$.

Demostración.—Sean $\bar{y}_i$, $i = 1, \ldots, n-r$ otros parámetros de uniformización a lo largo de V admisibles en A y B. Entonces será:

$$\psi(x)(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{n-r})' = (\varphi_{ij}(x))(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-r})', \tag{5}$$

en donde $(\varphi_{ij}(x))$ es una matriz $(n-r)\times(n-r)$ cuyos elementos pertenecen a R y $|\varphi_{ij}(x)| \not\equiv 0$ $(\mathbf{p})$ y $\psi(x)$ es un polinomio de R.

Efectuando en las $\bar{y}_i(x)$, $i = 1, \ldots, n-r$, la sustitución (1) se obtiene

$$(\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_{n-r}(x))' \equiv N(x_1^*, \ldots, x_n^*)' + (\bar{y}_1(\lambda), \ldots, \bar{y}_{n-r}(\lambda))' \; (\mathbf{p}_0^{*2}). \tag{6}$$

Por (5) y (2), se verifica que

$$\begin{aligned} \psi(\lambda)(\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_{n-r}(x))' \equiv {} & (\varphi_{ij}(\lambda))[M(x_1^*, \ldots, x_n^*)' \\ & + (\bar{x}_1(\lambda), \ldots, \bar{x}_{n-r}(\lambda))'] \; (\mathbf{p}_0^{*2}). \end{aligned} \tag{7}$$

De (6) y (7) se deduce

$$\begin{aligned} & [\psi(\lambda) N - (\varphi_{ij}(\lambda)) M](x_1^*, \ldots, x_n^*)' \\ & + \psi(\lambda)(\bar{y}_1(\lambda), \ldots, \bar{y}_{n-r}(\lambda))' - (\varphi_{ij}(\lambda))(\bar{x}_1(\lambda), \ldots, \bar{x}_{n-r}(\lambda)) \equiv 0 \; (\mathbf{p}_0^{*2}); \end{aligned}$$

y como las (x^*_i) son linealmente independientes mód. $\mathbf{p}_0^{*2}$, será:

$$\psi(\lambda) N = (\varphi_{ij}(\lambda)) M$$

y, recordando la notación de (3),

$$\psi(\lambda)\,N_\alpha = (\varphi_{ij}(\lambda))\,M_\alpha$$

y

$$\psi(\lambda)\,N_\beta = (\varphi_{ij}(\lambda))\,M_\beta\,.$$

De estas dos últimas resulta

$$(8) \qquad [\psi(\lambda)]^{n-r}\,|\,N_\alpha\,| = |\,\varphi_{ij}(\lambda)\,|\,|\,M_\alpha\,|$$

y

$$(9) \qquad [\psi(\lambda)]^{n-r}\,|\,N_\beta\,| = |\,\varphi_{ij}(\lambda)\,|\,|\,M_\beta\,|\,.$$

Ahora bien, si

$$\text{m. c. d.}\,(|\,N_\alpha\,|,\ |\,\varphi_{ij}(\lambda)\,|) = f_1(\lambda), \quad \text{m. c. d.}\,([\psi(\lambda)]^{n-r},\ |\,\varphi_{ij}(\lambda)\,|) = f_2,$$

$$(10) \qquad \text{m. c. d.}\,([\psi(\lambda)]^{n-r},\ |\,M_\alpha\,|) = f_3,$$

será:

$$(11) \quad [\psi(\lambda)]^{n-r} = f_2\cdot f_3, \quad |\,\varphi_{ij}(\lambda)\,| = f_1\cdot f_2, \quad |\,N_\alpha\,| = f_1\cdot P_\alpha\,, \quad |\,M_\alpha\,| = f_3\cdot Q_\alpha$$

y sustituyendo en (8)

$$(12) \qquad P_\alpha = Q_\alpha\,.$$

De (9), (10) y (11) resulta

$$f_2\cdot f_3\,|\,N_\beta\,| = f_1\,f_2\,|\,M_\beta\,|,$$

de donde

$$(13) \qquad f_3\,|\,N_\beta\,| = f_1\,|\,M_\beta\,|$$

y como, por (11) y (10) f_3 y f_1 no tienen ningún factor común, será

$$|\,M_\beta\,| \equiv 0\,(f_3) \quad \text{y} \quad |\,N_\beta\,| \equiv 0\,(f_1),$$

es decir,

$$|\,M_\beta\,| = f_3\cdot Q_\beta\,, \qquad |\,N_\beta\,| = f_1\cdot P_\beta\,.$$

Sustituyendo en (13) se obtiene

$$(14) \qquad P_\beta = Q_\beta\,.$$

Del mismo modo que se ha probado que f_3 es divisor de $|M_\beta|$ se demuestra que es divisor de cualquier otro menor de orden $(n-r)$ de M, luego, f_3 es divisor del m. c. d. $m(\lambda)$ de todos ellos. Análogamente, f_1 es divisor del m. c. d., $n(\lambda)$, de todos los menores de orden $(n-r)$ de N. Si fuese $m(\lambda)=f_3(\lambda)\cdot\mu(\lambda)$, $\mu(\lambda)$ sería divisor de Q_α y Q_β, luego

$$Q_\alpha = T_\alpha \cdot \mu, \qquad Q_\beta = T_\beta \cdot \mu,$$

y como las relaciones (12) y (14) son válidas para dos menores $|M_\alpha|$, $|M_\beta|$, y sus correspondientes $|N_\alpha|$, $|N_\beta|$, arbitrarios, resulta que μ es el m. c. d. de todos los Q_α, Q_β, ..., y por las relaciones anteriores también de todos los P_α, P_β, ..., luego el m. c. d. de todos los menores de orden $n-r$ de N será $n(\lambda)=f_1(\lambda)\cdot\mu(\lambda)$ y

$$|N_\alpha| = n(\lambda)\,T_\alpha, \qquad |N_\beta| = n(\lambda)\,T_\beta,$$

luego los polinomios T_α y T_β no dependen de la elección del sistema de parámetros de uniformización a lo largo de V.

Q. e. d.

Proposición 2.—*La propiedad de pertenecer a una clase de indicatrices es una igualdad lógica.*

Demostración.—Las propiedades idéntica y recíproca son consecuencia inmediata de la definición.

Sean las indicatrices $I_\alpha = (\xi_{\alpha_1} - a_1, \ldots, \xi_{\alpha_r} - a_{\alpha_r})$,

$$I_\beta = (\xi_{\beta_1} - b_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_r} - b_{\beta_r}) \quad \text{e} \quad I_\gamma = (\xi_{\gamma_1} - c_{\gamma_1}, \ldots, \xi_{\gamma_r} - c_{\gamma_r}),$$

tales que las dos primeras pertenecen a la misma clase y lo mismo las dos últimas. Sean $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-r}$ parámetros de uniformización a lo largo de V admisibles en A, B y C; por hipótesis, se verificarán (1), (2), (3) y (4), así como

$$(15) \qquad |M_\gamma| = T_\gamma(\lambda)\cdot m(\lambda)$$

y

$$(16) \qquad \varepsilon'\, T_\beta(b)\cdot T_\gamma(c) > 0,$$

en donde ε' es el índice de I_β e I_γ. Si llamamos ε'' al índice de I_α e I_γ, se verifica que $\varepsilon''=\varepsilon\varepsilon'$, luego, multiplicando (4) y (16), se obtiene

$$\varepsilon''\, T_\alpha(a)\, T_\gamma(c) > 0,$$

q. e. d.

DEFINICIÓN 2.—Llamaremos también *indicatriz* en un punto simple, A, de V a r parámetros de uniformización del 1.er entorno de A en V, pertenecientes a $\mathfrak{p}_A$ y dados en un cierto orden. Si $I(w)=[w_1, \ldots, w_r]$ e $I(w')=[w'_1, \ldots, w'_r]$ son dos indicatrices del mismo k-punto simple A de V, diremos que *pertenecen a la misma clase* cuando se verifique que

$$|S|>0,$$

siendo

$$(w')' \equiv S(w)'(\mathfrak{M}_A^2),$$

siendo $\mathfrak{M}$ el ideal de no unidades del anillo de cocientes de $\mathfrak{o}$ respecto de $\mathfrak{p}$.

De esta definición se deduce inmediatamente que la propiedad de pertenecer a una misma clase, según ella, es una igualdad lógica, luego, teniendo también en cuenta la Prop. 2, queda justificada la siguiente

DEFINICIÓN 3.—Al ente abstracto definido por una clase de indicatrices (Dfs. 1 y 2) se le llama *orientación de V* y a cada una de las indicatrices de la clase, *indicatriz de la orientación*.

De todo lo precedente resulta el siguiente

TEOREMA 1.—*Toda variedad irreducible, V, con puntos de un cuerpo ordenable, posee dos orientaciones, opuesta una de otra.*

Conviene observar que este concepto de orientación no coincide con la propiedad de poseer dos caras la variedad de que se trate; es, sin embargo, un concepto usual de orientación (véase, p. e., [1]) y suficiente para los problemas de intersección de variedades que son los que interesan en Geometría Algebraica.

Sea W una subvariedad simple de V, de dimensión s, y sean $[w_1, \ldots, w_{r-s}]$ y $[w'_1, \ldots, w'_{r-s}]$ dos sistemas de parámetros de uniformización a lo largo de W y pertenecientes a $\mathfrak{o}$. Entonces será

$$\varphi(w'_i)' = M(w_i)',$$

en donde M es una matriz $(r-s)\times(r-s)$ cuyos elementos pertenecen a $\mathfrak{o}$ y φ no se anula sobre W. A los anteriores sistemas de parámetros, cuando se toman sus elementos en el orden escrito, les llamaremos *indicatrices a lo largo de W*. Sea A un punto simple de W y supongamos que las indicatrices anteriores a lo largo de W son admisibles en A; entonces, si representamos por M_A la matriz cuyos elementos son los restos mód. del ideal primo de A y lo mismo φ_A, será $|M_A| \neq 0$ y $\varphi_A \neq 0$. Diremos que las indicatrices $[w_i]$ y $[w'_i]$ a lo largo de W son de la misma clase *en* A cuando $\frac{|M_A|}{\varphi_A^{r-s}} > 0$. Esta definición es, evidentemente, una igualdad lógica, por lo que al ente abstracto definido por ella le llamaremos *orientación en A a lo largo de W*. Dos indicatrices a lo largo de W pueden ser de la misma clase en un punto y de distinta en otro.

§ 3. Intersección de subvariedades orientadas de una variedad algebraica

Sea V la variedad del § 2 y W_s, W_t dos subvariedades simples e irreducibles de V, de dimensiones *s* y *t*, respectivamente, siendo $s+t=r$, que se cortan en los puntos A, B, ..., simples para ambas. Representaremos por $\mathfrak{p}_s$ y $\mathfrak{p}_t$ los ideales de $\mathfrak{o}$ correspondientes a W_s y W_t, respectivamente. No ofrece dificultad ver que se pueden elegir para la variedad V las indicatrices $I_{AV} = [w_1, ..., w_s, w_{s+1}, ..., w_r]$, $I_{BV} = [w'_1, ..., w'_s, w'_{s+1}, ..., w'_r]$ en A y B, respectivmaente, tales que si $\overline{w}_j = w_j + \mathfrak{p}_s$, $\overline{w}'_j = w'_j + \mathfrak{p}_s$, $\overline{w}_{s+h} = w_{s+h} + \mathfrak{p}_t$, $\overline{w}'_{s+h} = w'_{s+h} + \mathfrak{p}_t$; $j = 1, ..., s$; $h = 1, ..., r-s=t$, se verifique que $I_{AW_s} = [\overline{w}_1, ..., \overline{w}_s]$, $I_{BW_s} = [\overline{w}'_1, ..., \overline{w}'_s]$, son indicatrices de W_s en A y B e $I_{AW_t} = [\overline{w}_{s+1}, ..., \overline{w}_r]$, $I_{BW_t} = [\overline{w}'_{s+1}, ..., \overline{w}'_r]$ lo son de W_t en A y B.

Supongamos orientadas V, W_s y W_t y representemos por $\varepsilon(I_{AV})$, una función igual a $+1$ ó -1 según que la orientación I_{AV} sea la misma u opuesta a la orientación dada en V, análogamente se definen $\varepsilon(I_{AW_t})$ y $\varepsilon(I_{AW_s})$ respecto de la orientación dada en W_t y W_s.

DEFINICIÓN 4.—Se dice que las subvariedades orientadas W_s y W_t *se cortan positivamente* o *negativamente en A*, según que

$$\varepsilon(I_{AV}) \cdot \varepsilon(I_{AW_t}) \cdot \varepsilon(I_{AW_s}) = +1, \quad -1, \text{ respectivamente.}$$

(Conviene observar que esta definición es válida aun cuando las subvariedades W_s y W_t no se corten simplemente en A.)

A la diferencia entre el número de intersecciones positivas y el de negativas de W_s y W_t se le llama *número algebraico de puntos de intersección* de ambas subvariedades y se representa por (W_sW_t). A la suma de ambos números se le llama *número aritmético de puntos de intersección.*

Nuestro objeto es ver en qué condiciones se verifica la igualdad de estos dos números para variedades algebraicas sobre un cuerpo normal, k^*, sobre un cuerpo ordenado k. Para ello vamos a dar unos lemas elementales sobre determinantes.

§ 4. Unos lemas sobre determinantes

1. *Si*

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

es una matriz en la que las A_{ij} son submatrices cuadradas, siendo las de la primera fila reversibles, se verifica que

$$|M| = |A_{11}| \dots |A_{1n}| \begin{vmatrix} I & I & \dots & I \\ A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}A_{12}^{-1} & \dots & A_{2n}A_{1n}^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1}A_{11}^{-1} & A_{n2}A_{12}^{-1} & \dots & A_{nn}A_{1n}^{-1} \end{vmatrix}$$

Este lema se obtiene sin más que observar que

$$M = \begin{pmatrix} I & I & \dots & I \\ A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}A_{12}^{-1} & \dots & A_{2n}A_{1n}^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1}A_{11}^{-1} & A_{n2}A_{12}^{-1} & \dots & A_{nn}A_{1n}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{1n} \end{pmatrix}$$

2. *Si I indica una matriz unidad de orden* r *y representamos por M_j la matriz que resulta de tachar las filas y las columnas que contienen a la matriz I que ocupa el lugar* j*-ésimo en*

$$M = \begin{pmatrix} I & I & \dots & I \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix},$$

siendo M una matriz $nr \times nr$, *se verifica que*

$$|M| = |M_1 + (-1)^{r-1} M_2 + M_3 + (-1)^{r-1} M_4 + \dots + (-1)^{(r-1)(n-1)} M_n|.$$

Basta desarrollar $|M|$ por los menores de las r primeras filas.

3. *Si*

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ B_1 & \dots & B_n \\ \dots & \dots & \dots \\ H_1 & \dots & H_n \end{pmatrix}$$

es una matriz $m \times m$, *siendo las submatrices que figuran en una misma columna del mismo número de filas y columnas, el determinante de M no varía si se sustituye una de las filas por una combinación lineal de varias de ellas en la que los coeficientes son matrices arbitrarias, siendo la matriz unidad el coeficiente de la línea sustituída.*

La demostración es inmediata, así como la del siguiente:

4. *Si I es la matriz unidad* $\rho \times \rho$ *se verifica que*

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,I & a_{12}\,I & \dots & a_{1n}\,I \\ a_{21}\,I & a_{22}\,I & \dots & a_{2n}\,I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\,I & a_{n2}\,I & \dots & a_{nn}\,I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}^{\rho}.$$

Caso particular del L. 1 es el siguiente:

5. *Si M es una matriz* $(\rho \times \rho)$, *tal que* $|M| \neq 0$, *se verifica*

$$\begin{vmatrix} A_{11}\,M & A_{12}\,M & A_{1n}\,M \\ A_{21} & A_{22} & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{nn} \end{vmatrix} = |M| \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

§ 5. Variedad con cuerpo de constantes normal sobre un cuerpo ordenado

Sea ahora V una variedad irreducible de dimensión r sobre el cuerpo de constantes k^*, normal sobre el cuerpo ordenado k y

(1) $$k^* = k(w),$$

siendo

(2) $$w^{\rho+1} = g_{1\rho}\, w^{\rho} + \dots + g_{10}, \quad g_{1i} \in k, \; i = 1, \dots, \rho,$$

la ecuación irreducible de w sobre k.

Sean x'^{j}_{i}, $i=1 \ldots, n$, $j=0, \ldots, \rho$, nuevas indeterminadas. Mediante la sustitución :

$$(3) \qquad x_i = x'^0_i + x'^1_i w + \ldots + x'^\rho_i w^\rho, \quad i = 1, \ldots, n,$$

en los polinomios que forman el ideal $\mathbf{p}$ de V, se obtienen, previa reducción, expresiones de la forma $f_0(x'^j_i) + f_1(x'^j_i)w + \ldots + f_\rho(x'^j_i)w^\rho$; la variedad representada por el ideal engendrado por las $f_i(x'^j_i)$ correspondientes a todos los polinomios de $\mathbf{p}$ pertenece al espacio $E_{(\rho+1)n}$ sobre k y la representaremos por $\overline{V}$. Mediante esta variedad se puede definir una orientación en V del modo que vamos a indicar a continuación.

De acuerdo con las dos definiciones, 1 y 2 del § 2, habrá que distinguir dos casos, pero vamos a desarrollar únicamente el correspondiente a la Def. 1 ya que el otro se deduce fácilmente de éste mediante las oportunas modificaciones. Sean A y B dos k^*-puntos simples y distintos de V y $\mathbf{p}_A = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, $\mathbf{p}_B = (x_1 - b_1, \ldots, x_n - b_n)$ sus respectivos ideales de polinomios, siendo a_i, b_i, εk^*, $i=1, \ldots, n$. Como en el § 2, llamaremos indicatriz de V en A a todo sistema ordenado de parámetros de uniformización de A en V. Sean

$$[\xi_{\alpha_1} - a_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r} - a_{\alpha_r}] = I_\alpha \quad \text{e} \quad I_\beta = [\xi_{\beta_1} - b_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_r} - b_{\beta_r}]$$

dos indicatrices de V en A y B, respectivamente. Sea M la matriz (2) del § 2, con la diferencia de que ahora el cuerpo base es k^* en lugar de k, por consiguiente, sus elementos serán polinomios de $k^*[\lambda]$, que representaremos por $a_{ij}(\lambda)$. Mediante la sustitución (3) en todos ellos se obtiene :

$$(4) \qquad a_{ij}(\lambda) = a^0_{ij}(\lambda) + a^1_{ij}(\lambda)w + \ldots + a^\rho_{ij}(\lambda)w^\rho .$$

Llevando estas expresiones a (2) § 2, así como las

$$(3') \qquad \left.\begin{array}{ll} x_i^* = x_i^0 + x_i^1 w + \ldots + x_i^\rho w^\rho, & i = 1, \ldots, n \\ \overline{x}_i = \overline{x}_i^0 + \overline{x}_i^1 w + \ldots + \overline{x}_i \;\; w^\rho, & i = 1, \ldots, n \end{array}\right\}$$

correspondientes a las (3), y poniendo

$$(5) \qquad w^{\rho+i} = g_{i0} + g_{i1} w + \ldots + g_{i\rho} w^\rho, \quad i = 1, 2, \ldots$$

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} (x_i^j)' = (x_1^0, \ldots, x_n^0, x_1^1, \ldots, x_n^1, \ldots, x_1^\rho, \ldots, x_n^\rho)' \\ (\overline{x}_i^j)' = (\overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_n^0, \overline{x}_1^1, \ldots, \overline{x}_n^1, \ldots, \overline{x}_1^\rho, \ldots, \overline{x}_n^\rho)' \end{array}\right.$$

y

$$(7)\qquad A^{(j)} = \begin{pmatrix} a^j_{11} & \dots & a^j_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^j_{n-r,1} & \dots & a^j_{n-r,n} \end{pmatrix}, \qquad j = 0, \dots, \rho,$$

resulta:

$$(\overline{x}^j_i)' \equiv$$

$$(8)\quad \begin{pmatrix} A^{(0)} & g_{10} A^{(\rho)} & g_{10} A^{(\rho-1)} + g_{20} A^{\rho} & \dots & g_{10} A^{(1)} + \dots + g_{\rho 0} A^{(\rho)} \\ A^{(1)} & A^{(0)} + g_{11} A^{\rho} & g_{11} A^{(\rho-1)} + g_{21} A^{\rho} & \dots & g_{11} A^{(1)} + \dots + g_{\rho 1} A^{(\rho)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^{(\rho)} & A^{(\rho-1)} + g_{1\rho} A^{(\rho)} & A^{(\rho-2)} + g_{1,\rho} A^{(\rho-1)} + g_{2\rho} A^{(\rho)} & \dots & A^{(0)} + g_{1,\rho} A^{(1)} + \dots + g_{\rho\rho} A^{(\rho)} \end{pmatrix} (x^j_i)'$$
$$+ (\overline{x}^j_i(\lambda))' (\mathbf{p}_0{}^{*2}),$$

siendo

$$\mathbf{p}_0{}^* = (x_1{}^0 - \lambda_1{}^0, \dots, x_n{}^\rho - \lambda_n{}^\rho).$$

A la matriz de (8) la representaremos por $\overline{M}$. Al tachar en $\overline{M}$ las columnas de lugares $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, en lugar de $\overline{M}$ se obtiene la siguiente matriz cuadrada:

$$\overline{M}_\alpha =$$

$$(9)\quad \begin{pmatrix} A^{(0)}_\alpha & g_{10} A^{(\rho)}_\alpha & g_{10} A^{(\rho-1)}_\alpha + g_{20} A^{(\rho)}_\alpha & \dots & g_{10} A^{(1)}_\alpha + \dots + g_{\rho 0} A^{(\rho)}_\alpha \\ A^{(1)}_\alpha & A^{(0)}_\alpha + g_{11} A^{(\rho)}_\alpha & g_{11} A^{(\rho-1)}_\alpha + g_{21} A^{(\rho)}_\alpha & \dots & g_{11} A^{(1)}_\alpha + \dots + g_{\rho 1} A^{(\rho)}_\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^{(\rho)}_\alpha & A^{(\rho-1)}_\alpha + g_{1\rho} A^{(\rho)}_\alpha & A^{(\rho-2)}_\alpha + g_{1\rho} A^{(\rho-1)}_\alpha + g_{2\rho} A^{(\rho)}_\alpha & \dots & A^{(0)}_\alpha + g_{1,\rho} A^{(1)}_\alpha + \dots + g_{\rho\rho} A^{(\rho)}_\alpha \end{pmatrix}$$

en donde

$$(10)\qquad A^{(j)}_\alpha = \begin{pmatrix} a^j_{1\alpha'_1}, & \dots, & a^j_{1\alpha'n-r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a^j_{n-r,\alpha'1}, & \dots, & a^j_{n-r,\alpha'n-r} \end{pmatrix}$$

y $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-r})$ es el resultado de tachar $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ en $(1, 2, \dots, n)$.

Multiplicando la fila i-ésima de $\overline{M}_\alpha$ por $w^{i-1}I$, $i=0, \dots, \rho$ y sustituyendo la fila o por la suma de todas ellas (L. 3, § 4) y teniendo presente el .L 5 (§ 4), resulta:

$$
|\overline{\mathrm{M}}_\alpha| = \left| \sum_{i=0}^{\rho} \mathrm{A}_\alpha^{(i)} w^i \right|
$$

$$
(11) \quad \times \begin{vmatrix}
\mathrm{I} & w\,\mathrm{I} & \dots & w^\rho\,\mathrm{I} & \\
\mathrm{A}_\alpha^{(1)} & \mathrm{A}_\alpha^{(0)} + g_{11}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} & \dots & g_{11}\mathrm{A}_\alpha^{(1)} + & \dots + g_{\rho 1}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} \\
\mathrm{A}_\alpha^{(2)} & \mathrm{A}_\alpha^{(1)} + g_{12}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} & \dots & g_{12}\mathrm{A}_\alpha^{(1)} + & \dots + g_{\rho 2}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} & \mathrm{A}_\alpha^{(\rho-1)} + g_{1\rho}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} & \dots & \mathrm{A}_\alpha^{(0)} + g_{1\rho}\mathrm{A}_\alpha^{(1)} + & \dots + g_{\rho\rho}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)}
\end{vmatrix}.
$$

Pongamos

$$
\delta_i = \begin{vmatrix}
1 & w & \dots & w^{i-1} & w^i \\
1 & w^{(1)} & \dots & w^{(1)^{i-1}} & w^{(1)^i} \\
\vdots & & \vdots & & \\
1 & w^{(i)} & \dots & w^{(i)^{i-1}} & w^{(i)^i}
\end{vmatrix},
$$

en donde $w^{(1)}, \dots, w^{(\rho)}$ son todos los elementos conjugados de w sobre k. Representaremos por δ_j al adjunto del elemento $w^{(j)^i}$ en la matriz de δ_i y pondremos:

$$
\delta_i^j = \begin{vmatrix}
1 & w & \dots & w^{i-1} & w^j \\
1 & w^{(1)} & \dots & w^{(1)^{i-1}} & w^{(1)^j} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
1 & w^{(i)} & \dots & w^{(i)^{i-1}} & w^{(i)^j}
\end{vmatrix}.
$$

Supongamos demostrado que

$$
(12) \qquad |\overline{\mathrm{M}}_\alpha| = \frac{\left| \sum_{h=0}^{n} \mathrm{A}_\alpha^h w^h \right| \dots \left| \sum_{h=0}^{n} \mathrm{A}_\alpha^h w^{(i)^h} \right|}{\delta_i^{n-r}}
$$

$$
\times \begin{vmatrix}
\mathrm{I} & w\,\mathrm{I} & \dots\dots & w^r\,\mathrm{I} & \dots\dots & w^\rho\,\mathrm{I} \\
\mathrm{I} & w^{(1)}\,\mathrm{I} & \dots\dots & w^{(1)^r}\,\mathrm{I} & \dots\dots & w^{(1)^\rho}\,\mathrm{I} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\mathrm{I} & w^{(i)}\,\mathrm{I} & \dots\dots & w^{(i)^r}\,\mathrm{I} & \dots\dots & w^{(i)^\rho}\,\mathrm{I} \\
\mathrm{A}_\alpha^{(i+1)} & \mathrm{A}_\alpha^{(i)} + g_{1,i+1}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} & \dots & \mathrm{A}_\alpha^{(i+1-r)} + g_{1,i+1}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho-r+1)} + \dots + g_{r,i+1}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} & \dots & g_{1,i+1}\mathrm{A}_\alpha^{(1)} + \dots + g_{\rho,i+1}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} \\
\mathrm{A}_\alpha^{(i+2)} & \mathrm{A}_\alpha^{(i+1)} + g_{1,i+2}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} & \dots & \mathrm{A}_\alpha^{(i+2-r)} + g_{1,i+2}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho-r+1)} + \dots + g_{r,i+2}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} & \dots & g_{1,i+2}\mathrm{A}_\alpha^{(1)} + \dots + g_{\rho,i+2}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} & \mathrm{A}_\alpha^{(\rho-1)} + g_{1,\rho}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} & \dots & \mathrm{A}_\alpha^{(\rho-r)} + g_{1,\rho}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho-r+1)} + \dots + g_{r,\rho}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)} & \dots & \mathrm{A}_\alpha^{(0)} + g_{1,\rho}\mathrm{A}_\alpha^{(1)} + \dots + g_{\rho,\rho}\mathrm{A}_\alpha^{(\rho)}
\end{vmatrix}
$$

Multiplicando ordenadamente las filas de la matriz del último factor del 2.° miembro de (12) por

$$-\frac{\delta_{i+1,0}}{\delta_{i+1,i+1}}\sum_{h=0}^{\rho} A_\alpha^{(h)} w^h, \quad -\frac{\delta_{i+1,1}}{\delta_{i+1,i+1}}\sum_{h=0}^{\rho} A^{(h)} w^{(1)^h}, \quad \ldots,$$

$$-\frac{\delta_{i+1,i}}{\delta_{i+1,i+1}}\sum_{h=0}^{\rho} A_\alpha^{(h)} w^{(i)^h}, \quad \frac{\delta_{i+1}}{\delta_{i+1,i+1}} I, \quad \frac{\delta_{i+1}^{i+2}}{\delta_{i+1,i+1}} I, \quad \ldots, \frac{\delta_{i+1}^{\rho}}{\delta_{i+1,i+1}} I,$$

y sustituyendo la fila de lugar $(i+2)$-ésimo por la suma de todas ellas, teniendo en cuenta los lemas 3 y 5 del § anterior y que

$$\left|\frac{\delta_{i+1}}{\delta_{i+1,i+1}} I\right| = \frac{\delta_{i+1}^{n-r}}{\delta_{i+1,i+1}^{n-r}} = \frac{\delta_{i+1}^{n-r}}{\delta_{i}^{n-r}},$$

resulta que (12) es también válida para $i+1$ y como, por (11), es también cierta para $i=0$, resulta cierta para todo i, luego, para $i=\rho$ se obtiene:

$$(13)\quad |\overline{M}_\alpha| = \frac{\left|\sum_{h=0}^{\rho} A_\alpha^{(h)} w^h\right| \cdots \left|\sum_{h=0}^{\rho} A_\alpha^{(h)} w^{(\rho)^h}\right|}{\delta_\rho^{n-r}} \begin{vmatrix} I & wI & \ldots & w^\rho I \\ I & w'I & \ldots & w'^\rho I \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I & w^{(\rho)} I & \ldots & w^{(\rho)^\rho} I \end{vmatrix}$$

pero, por el L. 4, § 4, el último determinante es δ_ρ^{n-r} y, por consiguiente,

$$(14)\quad |\overline{M}_\alpha| = \left|\sum_{h=0}^{\rho} A_\alpha^{(h)} w^h\right| \cdots \left|\sum_{h=0}^{\rho} A_\alpha^{(h)} w^{(\rho)^h}\right| = N_{k^*|k}\left(\left|\sum_{h=0}^{\rho} A_\alpha^{(h)} w^h\right|\right).$$

De esta última expresión resulta el siguiente:

TEOREMA 2.—*Si V es una variedad irreducible del espacio afín E_n, sobre el cuerpo* k*, *normal sobre un cuerpo ordenado* k, *se puede definir en V una orientación mediante la variedad imagen, $\overline{V}$, de V en el espacio afín $E_{n(\rho+1)}$* $(\rho+1=[k^*:k])$. *Esta orientación es única, o existen dos orientaciones, inversa una de otra, según que las normas de todos los elementos de* k* *tengan, o no, el mismo signo, respectivamente.*

Las orientaciones quedan definidas por las Defs. 1 y 2 del § 2 sin más que sustituir en ellas los determinantes $|M_\alpha|$ por los $|\overline{M}_\alpha|$ dados por (14).

En particular, la orientación en V es única cuando $k^*=k(i)$, siendo $i^2=-1$.

Conviene observar que, aunque la orientación sea única para V no lo es nunca para $\overline{V}$, según establece el teorema 1 del § 2.

De la definición del § 3 se deduce inmediatamente el siguiente:

COROLARIO 1.—*Si la norma de todo elemento de* k* *respecto de* k *es positiva, el número algebraico de puntos de intersección de dos subvariedades* W_t *y* W_s (t+s=r) *de* V *es igual al número aritmético de las mismas.*

Las condiciones del corolario anterior se cumplen si $k^*=k(i)$.

COROLARIO 2.—*En la hipótesis del corolario anterior, las subvariedades de* V *no forman frontera.*

COROLARIO 3.—*Toda subvariedad de dimensión impar de* $\overline{V}$ *posee dos orientaciones distintas, aun cuando la norma de todo elemento de* k* *respecto de* k *sea positiva.*

BIBLIOGRAFIA CITADA

[1] GLEZERMAN, M. and PONTRYAGIN, L.: Intersections in Manifolds. Traducción de la Soc. Mat. Americana, núm. 50.

[2] LEFSCHETZ, S.: Géometrie Algébrique. Gauthier Villars. París, 1924.

[3] ZARISKI, O.: The concept of a simple point of an abstract algebraic variety. Trans. Am. Math. Soc., vol. 62.

Universidad de Madrid.—Patronato «Juan de la Cierva».

Madrid, febrero de 1952.

ORIENTATION OF ALGEBRAIC VARIETIES

By

PEDRO ABELLANAS

§ 1. Introduction

We give in the § 2 an arithmetical definition of the concept of orientation of an irreducible variety, of the affin space, over a orderable field of constants.

It is well known [2] (*) that, any importants topological proprietes of the algebraic varietes over the field of complex numbers yield on the propriety of the equality between the algebraic number of intersections of two subvarieties and the arithmetic number. We give hear, § 5, an arithmetical proof of this propriety, based on the definition of the § 2, for the case in which the field of constants is an algebraic finite and normal extension of an orderable field, that satisfy some conditions.

§ 2. Orientation of algebraic varieties over an orderable field

Let $R=k[x_1, \ldots, x_n]$ be a polynomial ring with n indeterminates over an orderable field of constants, k. Let V be an irreducible r-dimensional variety of the affin space E_n, defined by the ideal $\mathbf{p}$ of R and let $\mathfrak{o}=k[\xi_1, \ldots, \xi_n]=R/\mathbf{p}$. We shall suppose that V has k-points, e.i, points whose coordinates are all in k. Let A, B and C be three simple k-points of V, defined by the following ideals: $\mathbf{p}_A=(x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n)$, $\mathbf{p}_B=(x_1-b_1, \ldots, x_n-b_n)$ and $\mathbf{p}_C=(x_1-c_1, \ldots, x_n-c_n)$; $a_i, b_i, c_i \in k, i=1, \ldots, n$; and let

$$\mathfrak{p}_A=\mathbf{p}_A/\mathbf{p}, \quad \mathfrak{p}_B=\mathbf{p}_B/\mathbf{p} \quad \text{and} \quad \mathfrak{p}_C=\mathbf{p}_C/\mathbf{p}.$$

LEMME 1.—There are $n-r$ uniformizing parameters for a uniformization along V, $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-r}$, linearly independents mod. $\mathbf{p}_A^2$, mod. $\mathbf{p}_B^2$, and mod. $\mathbf{p}_C^2$ (**).

(*) The numbers in the brackets envoi to the referentes at the and of the paper.

(**) For the proofs see the foregoing spanish paper.

We shall say that the parameters of the foregoing Lemme are a system of uniformizing parameters along V *admissible for* the points A, B and C.

By the hypothesis, it is possible to find such systems of uniformizing parameters for a uniformization of the whole neighbor hoods of A, B and C *in* V as the following:

$$I_\alpha = (\xi_{\alpha_1} - a_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r} - a_{\alpha_r}), \quad I_\beta = (\xi_{\beta_1} - b_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_r} - b_{\beta_r}),$$
$$I_\gamma = (\xi_{\gamma_1} - c_{\gamma_1}, \ldots, \xi_{\gamma_r} - c_{\gamma_r}).$$

We shall say that the systems I_α, I_β, ..., are *indicatrices* of A, B, ..., when we consider its elements in the order in which they have been writed. The *index* of the indicatrix I_α with relation to I_β, that we shall denote by $\varepsilon(I_\alpha, I_\beta)$, is equal to $(-1)^i$ where i is the number of inversions of the substitution

$$\begin{pmatrix} \beta_1, & \ldots, & \beta_r \\ \alpha_1, & \ldots, & \alpha_r \end{pmatrix}.$$

Let $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ be independent indeterminates over R and we make the substitution:

$$(1) \qquad x_i = x_i^* + \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

in the uniformizing parameters $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-r}$ along V admissible for the points A, B and C. Let $\mathbf{p}_0^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$, then we have

$$(2) \quad (\bar{x}_1(x), \ldots, \bar{x}_{n-r}(x))' \equiv M(x^*_1, \ldots, x^*_n)' + (\bar{x}_1(\lambda), \ldots, \bar{x}_{n-r}(\lambda))'(\mathbf{p}_0^{*2}),$$

where M is a $(n-r) \times n$ matrix whose elements are polynomials in the (λ) and the $\bar{x}_i(\lambda)$ are the polynomials obtained from the $\bar{x}_i(x)$ by the substitution $x_i \to \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$. We shall denote by M_α, M_β, M_γ the matrices obtained from M omiting the columns α_1-th. ..., α_r-th.; β_1-th. ..., β_r-th.; and γ_1-th, ..., γ_r-th, respectively. Let $m(\lambda)$ be the g.c.d. of all the minors $(n-r) \times (n-r)$ of the matrix M and let

$$(3) \qquad \begin{cases} |M_\alpha| = T_\alpha(\lambda) \cdot m(\lambda) \\ |M_\beta| = T_\beta(\lambda) \cdot m(\lambda) \end{cases}.$$

Since A and B are points of V it will be $\bar{x}_i(a)=\bar{x}_i(b)=0$, $i=1, \ldots, n-r$. Since $(\xi_{\alpha_1}-a_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r}-a_{\alpha_r})$ are uniformizing parameters along V admissible in A, it follows that

$$(x_{\alpha_1}-a_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_r}-a_{\alpha_r}, \bar{x}_1(x), \ldots, \bar{x}_{n-r}(x))$$

is a system of uniformizing parameters of A in E_n and hence the determinant obtained by the substitution of the (λ) by the (a) in $|M_\alpha|$ is distinct from zero and therefore $T_\alpha(a) \neq 0$. Ana logously $T_\beta(b) \neq 0$.

Definition 1.—We shall say that the indicatrix $I_\alpha = (\xi_{\alpha_1}-a_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r}-a_{\alpha_r})$ *belong to the same class* that $I_\beta = (\xi_{\beta_1}-b_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_r}-b_{\beta_r})$, being $A \neq B$, if and only if

$$\varepsilon(I_\alpha, I_\beta)\, T_\alpha(a)\, T_\beta(b) > 0.$$

For justify this definition we prove the following.

Proposition 1.—*The propriety of belong two indicatrices to the same class is independent of the choice of the auxiliary parameters* $\bar{x}_i(x)$, $i=1, \ldots, n-r$.

Proposition 2.—*The propriety of belong two indicatrices to the same class is a logycal equality.*

Definition 2.—We shall also call *indicatrix* in a simple point, A, of V to anyone orderer set of uniformizing parameters of A in V. If $I(w)=[w_1, \ldots, w_r]$ and $I(w')=[w'_1, \ldots, w'_r]$ are two indicatrices of the same simple k-point, A, of V, we shall say that they *belong to the same class* when it is verified that

$$|S|>0,$$

where

$$(w')' \equiv S(w)'(\mathfrak{M}_A^2)$$

and $\mathfrak{M}_A$ is the maximal ideal of the quotient ring of $\mathfrak{p}_A$ with respect to $\mathfrak{o}$.

The propriety of belong to the same class according to the Def. 2 is also an equality, therefore we can give the following.

Definition 3.—We shall call *orientation of V* to the abstract entity defined by a class of indicatrices according to the Dfs. 1 and 2.

From all the foregoing follows the

THEOREM 1.—*Every one irreducible variety, V, with points over an orderable field has two orientations, oposite one of the other.*

It is convenient to observe that this concept of orientation d'ont coincide with the propriety of have the variety in question two sides; it is nevertheless an usual concept of orientation [1] and it is sufficient for the questions relative to the intersections of oriented manifolds in an algebraic variety.

§ 3. Intersections of oriented manifolds in an algebraic variety

Let V be the variety of the § 2 and W_s, W_t two simple and irreducible subvarieties of V of dimensions s and t, respectively, being $s+t=r$, whose intersection is formed by the points A, B, ..., which are simple points for both subvarieties. We shall denote by $\mathfrak{p}_s$ and $\mathfrak{p}_t$ the ideals of $\mathfrak{o}$ corresponding to W_s and W_t, respectively. It is possible determine the indicatrices

$$\mathrm{I}(A; V) = [w_1, \ldots, w_s, w_{s+1}, \ldots, w_r]$$

and

$$\mathrm{I}(B; V) = [w'_1, \ldots, w'_s, w'_{s+1}, \ldots, w'_r]$$

for V in A and B, respectively, in such a fashion that if

$$\overline{w}_j = w_j + \mathfrak{p}_s, \quad \overline{w}'_j = w'_j + \mathfrak{p}_s, \quad \overline{w}_{s+h} = w_{s+h} + \mathfrak{p}_t, \quad \overline{w}'_{s+h} = w'_{s+h} + \mathfrak{p}_t;$$
$$j = 1, \ldots, s, \quad h = 1, \ldots, t,$$

it shall be verified that

$$\mathrm{I}(A; W_s) = [\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_s], \quad \mathrm{I}(B; W_s) = [\overline{w}'_1, \ldots, \overline{w}'_s]$$

are indicatrices of W_s in A and B and

$$\mathrm{I}(A; W_t) = [\overline{w}_{s+1}, \ldots, \overline{w}_r], \quad \mathrm{I}(B; W_t) = [\overline{w}'_{s+1}, \ldots, \overline{w}'_r]$$

are indicatrices of W_t in the same points.

We suppose that V, W_s and W_t are oriented and we define $\varepsilon(\mathrm{I}(A; V))$ to be equal to $+1$ or -1 according to that the orientation $\mathrm{I}(A; V)$ be equal or opposite to the given orientation of V. Of the same fashion it is defined $\varepsilon(\mathrm{I}(A; W_t))$ and $\varepsilon(\mathrm{I}(B; W_t))$.

DEFINITION 4.—We shall say that the oriented subvarieties W_s and W_t *have a possitive or negative intersection in A* according to that $\varepsilon(I(A\ ;\ V))\ .\ \varepsilon(I(A\ ;\ W_t))\ .\ \varepsilon(I(A\ ;\ W_s))=1$, or -1, respectively.

One must observe that this definition is also valid if the subvarieties W_s and W_t have a multiple intersection in A. The absolut value of the difference between the number of positive and negative intersections is called *algebraic number of intersection points* of both varieties, and it is denoted by $(W_s\ W_t)$. The sum of both numbers is called the *arithmetic number of intersection points*.

§ 4. Some lemmas about determinants

1. If

$$M=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

is a matrix where the A_{ij} are square submatrices, being those of the first row of determinant distinct of zero it is verified that:

$$|M|=|A_{11}|\dots|A_{1n}|\begin{vmatrix} I & I & \dots & I \\ A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}A_{12}^{-1} & \dots & A_{2n}A_{1n}^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1}A_{11}^{-1} & A_{n2}A_{12}^{-1} & \dots & A_{nn}A_{1n}^{-1} \end{vmatrix}$$

where I is an identity matrix.

3. If

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ B_1 & \dots & B_n \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ H_1 & \dots & H_n \end{pmatrix}$$

is a matrix $m \times m$, whose submatrices on the same column are all the same number of rows and colums, the determinant of M d'ont change if it is replaced one row by a linear combination of any one of those whose coefficients are arbitrary matrices, being the coefficients of the changed row all equal to the identity matrix.

4. If I is an $\rho\times\rho$ identity matrix it is verified that

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,\mathrm{I} & a_{12}\,\mathrm{I} & \dots & a_{1n}\,\mathrm{I} \\ a_{21}\,\mathrm{I} & a_{22}\,\mathrm{I} & \dots & a_{2n}\,\mathrm{I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\,\mathrm{I} & a_{n2}\,\mathrm{I} & \dots & a_{nn}\,\mathrm{I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}^{\rho}.$$

5. If M is a $\rho\times\rho$ matrix such that $|\mathrm{M}|\neq 0$, it is verified that

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}_{11}\,\mathrm{M} & \dots & \mathrm{A}_{1n}\,\mathrm{M} \\ \mathrm{A}_{21} & \dots & \mathrm{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}_{n1} & \dots & \mathrm{A}_{nn} \end{vmatrix} = |\mathrm{M}| \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{11} & \dots & \mathrm{A}_{1n} \\ \mathrm{A}_{21} & \dots & \mathrm{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}_{n1} & \dots & \mathrm{A}_{nn} \end{vmatrix}$$

§ 5. Manifold with a field of constants which is normal over an orderer field

Let V be an r-dimensional irreducible variety over a field of constants k^* such that

$$(1) \qquad k^* = k(w),$$

$$(2) \qquad w^{\rho+1} = g_{1\rho}\, w^{\rho} + \dots + g_{10}, \quad g_{1i} \in k,\ i = 1, \dots, \rho,$$

where (2) is the irreducible equation of w over k, k^* is normal over k and k is an orderable field. Let x'^{j}_{i}, $i=1, \dots, n$, $j=0, \dots, \rho$ be new indeterminates and let

$$(3) \qquad x_i = x'^{0}_{i} + x'^{1}_{i}\, w + \dots + x'^{\rho}_{i}\, w^{\rho}, \quad i = 1, \dots, n,$$

By means of (3) the polynomials of the ideal $\mathfrak{p}$ corresponding to V can be put in the form:

$$f_0(x'^{j}_{i}) + f_1(x'^{j}_{i})\, w + \dots + f_{\rho}(x'^{j}_{i})\, w^{\rho};$$

the variety corresponding to the ideal over k generated by all the $f_i(x'^{j}_{i})$ of every polynomial of $\mathfrak{p}$, which we shall denote by $\overline{\mathrm{V}}$, belong to the affin space $\mathrm{E}_{(\rho+1)n}$ over the orderable field k.

Let A and B be two distinct and simple k^*-points of V and

$$\mathfrak{p}_{\mathrm{A}} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n), \qquad \mathfrak{p}_{\mathrm{B}} = (x_1 - b_1, \dots, x_n - b_n),$$
$$a_i,\ b_i \in k^*,\ i = 1, \dots, n,$$

its corresponding ideals. As in the § 2, we shall call *indicatrix* of V in A to every orderer system of uniformizing parameters of A in V. Let

$$I_\alpha = [\xi_{\alpha_1} - a_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_r} - a_{\alpha_r}] \quad \text{and} \quad I_\beta = [\xi_{\beta_1} - b_{\beta_1}, \ldots, \xi_{\beta_r} - b_{\beta_r}]$$

be two indicatrices of A and B, respectively. Let M be the matrix of (2), § 2 (taking into account thet now the field of constans is k^* instead of the orderable field k) and $a_{ij}(\lambda)$ the elements of M. By the substitution

$$(3') \qquad \lambda_i = \lambda_i^0 + \lambda_i^1 w + \ldots \lambda_i^\rho w^\rho, \quad i = 1, \ldots, n,$$

it is obtained

$$(4) \qquad a_{ij}(\lambda) = a^0_{ij}(\lambda) + a^1_{ij}(\lambda) w + \ldots + a^\rho_{ij}(\lambda) w$$

and the matrix M_α of § 2 is transformed into a matrix $\overline{M}_\alpha$ whose elements belong to $k[\lambda^k_h]$. It is proved that

$$(14) \quad |\overline{M}_\alpha| = \left|\sum_{h=0}^{\rho} A^{(h)}_\alpha w^h\right| \cdot\cdot \left|\sum_{h=0}^{\rho} A^{(h)}_\alpha w^{(\rho)^h}\right| = N_{k^*|k}\left(\left|\sum_{h=0}^{\rho} A^{(h)}_\alpha w^h\right|\right).$$

where $N_{k^*|k}$ is the norm relativ to k, and

$$A^{(h)}_\alpha = \begin{pmatrix} a^h_{1\alpha'_1} & \ldots & a^h_{1\alpha'_{n-r}} \\ \vdots & & \vdots \\ a^h_{n-r,\alpha'_1} & \ldots & a^h_{n-r,\alpha'_{n-r}} \end{pmatrix}$$

and $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{n-r})$ is the result of omit the numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ in $(1, 2, \ldots, n)$.

Therefore, we have the follwing:

THEOREM 2.—*If* V *is an irreducible variety of the affin space* E_n *over the field of constant* k*, *which is normal over an orderable field* k, *one can define one orientation in* V *by means of the variety* $\overline{V}$. *This orientation is unique, or there are two, according that the norms of every element of* k* *over* k *have, or have not, the same signe, respectively.*

These orientations are defined by means of the Def. 1 and 2 of § 2 with the only substitution of $|M_\alpha|$ by $|\overline{M}_\alpha|$, where $|\overline{M}_\alpha|$ has the value given by (14).

It is convenient to observe that howsoever the orientation of V is unique, it is not so for $\overline{V}$, according with the Th. 1.

COROLLARY 1.—*If the norm with respect to* k *of every element of* k^* *is positive, the algebraic number of intersections of two subvarieties* W_t *and* W_s $(t+s=r)$ *of* V *is equal to the arithmetic number of such intersections.*

COROLLARY 2.—*On the hypothesis of the foregoing corollary, the subvarieties of* V *are not bounding cycles.*

COROLLARY 3.—*Every subvariety of* $\overline{V}$ *whose dimension is odd has two distinct orientations, howsoever the norm of every element of* k^* *with respect to* k *is positive.*

REFERENCES

[1] GLEZERMAN, M AND PONTRYAGIN, L.: *Intersections in Manifolds.* Trans. núm. 50 of the Am. Math. Soc.

[2] LEFSCHETZ, S.: *Géométrie Algébrique.* Gauthier Villars. Paris, 1924.

[3] ZARISKI, O.: *The concept of a simple point of an abstract algebraic variety.* Trans. Am. Math. Soc., vol. 62.

University of Madrid.
Patronato Juan de la Cierva.

February, 1952.