Matematica (Geometria algebrica). — *Sulle superficie del quarto ordine contenenti una conica.* Nota di TOMÁS RODRIGUEZ BACHILLER, presentata [1] dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

In questa Nota ci occuperemo, per suggerimento di F. SEVERI [2], d'esaminare se una superficie F del 4° ordine contenente una conica irriducibile, ammette trasformazioni birazionali in sè. Il metodo seguito, poggiato sulla teoria della base di SEVERI, è il medesimo di quello usato da questo Autore in una Memoria del 1910 [3], nella quale trovasi un teorema generale che associa ad ogni gruppo discontinuo di trasformazioni birazionali di una superficie in sè, un gruppo isomorfo di automorfismi della forma quadratica fondamentale della superficie. SEVERI osserva però che, viceversa, non ogni automorfismo di questa forma proviene necessariamente da una trasformazione birazionale della superficie. Comunque negli esempi conosciuti (addotti da SEVERI e poi da altri) le superficie considerate posseggono sempre gruppi discontinui di trasformazioni birazionali. Interessa perciò un esempio, come quello dato in questa Nota, di una superficie la cui forma fondamentale ammetta un gruppo infinito discontinuo di automorfismi, senza che la superficie ammetta trasformazioni birazionali in sè.

1. Osserviamo preliminarmente che una superficie F del quarto ordine dello spazio ordinario, priva di punti multipli, non possiede curve eccezionali. Una tal curva dovrebbe infatti appartenere al sistema canonico impuro di F; e ciò non è possibile, perchè su F il sistema canonico (impuro e puro nello stesso tempo) è costituito dalle sezioni colle superficie d'ordine zero dello spazio.

---

(1) Nell'Adunanza del 21 marzo 1942-XX.

(2) Il quale ha indicato il problema nelle sue lezioni di Seminario presso il Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica. Ved. *Problemi, risultati e discussioni.* « Rend. di Mat. della R. Università di Roma e del R. Ist. Naz. di Alta Mat. » (1942), vol. 3, fasc. 1, pag. 65, n. 119.

(3) Ved. F. SEVERI, *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica.* « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », vol. 3°, 1910.

Portanto su F ogni curva razionale (priva di punti multipli) ha il grado virtuale -2, in quanto il grado n e il genere virtuale p di una curva tracciata su F son legati dalla relazione $n = 2p - 2$.

2. Si prevede *a priori* che la più generale superficie F del 4° ordine contenente una conica irriducibile C_1, abbia il numero base $\rho = 2$, perchè una F del 4° ordine non soggetta ad alcuna condizione ha il numero base $\rho = 1$. Ecco come si dimostra con precisione, secondo una via suggerita da SEVERI, che effettivamente è così.

Anzitutto contiamo da quanti parametri dipendono le superficie del 4° ordine che contengono qualche conica. Sopra una conica le superficie del 4° ordine segano una g^8_8 completa e quindi ve ne sono ∞^{25} per una data conica. D'altronde una superficie del 4° ordine contenente una conica non ha necessariamente punti multipli, come si riconosce facilmente supponendo che la conica stia sul piano $z = 0$ e scrivendo l'equazione della superficie. Ne deriva che la più generale superficie F del 4° ordine contenente una conica, non ne contiene infinite, giacchè, in caso contrario, ne dovrebbe contenere un'infinità continua e sarebbe razionale o riferibile ad una rigata: cosa assurda perchè F, essendo priva di punti multipli, ha il genere geometrico (= aritmetico) $p_g = 1$.

Dunque la superficie F più generale contenente una conica non contiene che un numero finito di coniche, epperò F dipende da $25 + 8 = 33$ parametri.

Considerata in questa famiglia ∞^{33} una varietà irriducibile di superficie F, tra loro birazionalmente equivalenti, con un noto ragionamento (¹) si prova che due F di tale varietà sono omografiche; sicchè le F birazionalmente distinte tra loro dipendono da $33 - 15 = 18$ moduli. Si conclude intanto che:

Una superficie del 4° ordine contenente una conica dipende da 18 moduli.

Si tenga infine presente la determinazione effettiva dei moduli d'una superficie regolare F con curva canonica d'ordine zero, come periodi dell'unico integrale doppio di 1ª specie di F, fatta da SEVERI in una recente Memoria (²). Da questa determinazione risulta che la somma del numero dei moduli di una tal superficie e del numero base è costantemente uguale a 20, perchè ogni nuova curva che entra nella base adduce una relazione lineare a coefficienti interi fra i periodi; cosicchè di tanto

(¹) Ved. F. SEVERI, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*, « Atti del R. Istituto Veneto », 1908-09, vol. 68, pag. 253.

(²) *Relazioni fra i periodi degli integrali multipli d'una varietà algebrica.* « Mem. della Classe di Sc. Fis., Mat. e Nat. Reale Accademia d'Italia », vol. IX, estratto n. 3, 1938, pag. 145.

diminuisce il numero dei moduli in una famiglia di queste superficie, di quanto aumenta il numero base (e viceversa). Ne deriva che *il numero base della più generale superficie del 4° ordine contenente una conica è* $\rho = 2$.

3. È facile ormai dimostrare che come base delle curve sopra una F generale contenente una conica irriducibile C_1 e quindi anche un'altra conica irriducibile C_2 [1] ulteriore intersezione di F col piano di C_1, può assumersi la coppia (C_1, C_2). Invero, il discriminante di tale coppia è diverso da zero:

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -12\,;$$

epperò le due curve C_1, C_2 sono algebricamente indipendenti.

Dimostriamo che la base (C_1, C_2) è *intermediaria* e quindi necessariamente *minima*, perchè sopra una superficie con curva canonica d'ordine zero ogni base intermediaria è appunto minima [2].

Se la base (C_1, C_2) non fosse minima, il determinante Δ d'una base minima (Γ_1, Γ_2) sarebbe un divisore necessariamente negativo di D, cioè uno dei valori $-2, -3, -4, -6$. Ora -4 si esclude, perchè altrimenti anche D dovrebbe essere un quadrato perfetto [3]; i valori -2, -6, attesa la parità dei gradi ν_{11}, ν_{22} di Γ_1, Γ_2 portano che sia pari il numero ν_{12} dei punti comuni a Γ_1, Γ_2 ed allora Δ sarebbe multiplo di 4. Rimane il valore -3; ma $\Delta = -3 = \nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}^2$, essendo ν_{11}, ν_{22} pari, darebbe

$$\nu_{12}^2 = \dot{4} + 3\,;$$

il che è assurdo, perchè un quadrato perfetto non è congruo a 3 (mod. 4).

La base (C_1, C_2) è dunque *minima*, e siccome il suo determinante non è un quadrato perfetto, si può dire che *la superficie del 4° ordine generica contenente una conica, non contiene curve ellittiche* (*prive di punti multipli*) [4].

---

(1) Che la conica C_1 sia irriducibile segue dal fatto che si può sempre costruire in infiniti modi una superficie F passante per due date coniche irriducibili complanari, le quali anzi può supporsi che si seghino in quattro punti distinti. Cosicchè per la più generale F queste condizioni son da ritenersi soddisfatte. E può altresì supporsi che le quattro intersezioni di C_1, C_2 non costituiscano per esempio su C_1 un gruppo armonico o equianarmonico.

(2) F. Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique.* « Annales Sc. de l'Ec. Norm. Sup. », Paris (3), to. XXV, 1908, n. 4.

(3) Ved. F. Severi, Memoria citata dei « Rend. Circ. Mat. di Palermo », 1910; n. 7, *b*).

(4) Severi, Memoria di Palermo, pag. 276.

4. Passiamo a vedere se esistono su F curve razionali effettive oltre le C_1, C_2. Curve siffatte si otterranno (se ci sono) in corrispondenza alle soluzioni intere dell'equazione quadratica

$$-2\lambda_1^2 + 8\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2 = -2$$

cioè

$$\lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = 1 .$$

La risoluzione di questa equazione diofantica si può ridurre, mediante il cambiamento di variabili

$$\lambda_1 = t + 2u , \lambda_2 = u ,$$

a quella dell'equazione di PELL

[1] $$t^2 - 3u^2 = 1 .$$

La minima soluzione positiva è $t_1 = 2$, $u_1 = 1$, onde ogni altra soluzione positiva t_n, u_n è data dalla formola di LAGRANGIA

$$(2 + \sqrt{3})^n = t_n + u_n\sqrt{3} .$$

Si debbono aggiungere le soluzioni negative, che si ottengono cambiando il segno ad uno o ad ambedue i numeri t_n, u_n, ed inoltre la soluzione $t = 1$, $u = 0$. Ma, condizione necessaria per l'esistenza effettiva di una curva $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ è che il suo ordine sia > 0, cioè che sia $2\lambda_1 + 2\lambda_2 > 0$, ovvero $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, od anche. nelle nuove variabili

[2] $$t + 3u > 0 .$$

Se (t , u) è una soluzione positiva intera questa relazione è senz'altro verificata. Se (t , u) è una soluzione intera negativa, $t = -t'$, $u = -u'$, $(t' , u' < 0)$ la condizione [2] si muta nella $t' + 3u' < 0$, che è assurda. Se $t > 0$ e $u = -u'$ $(u' > 0)$, la [2] si muta nella $t - 3u' > 0$ incompatibile con [1]; e infine se $t = -t'$ $(t' > 0)$, $u > 0$, la [2] diviene $-t' + 3u > 0$, la quale è senz'altro conseguenza della [1].

Per ciò le soluzioni intere di

$$\lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = 1$$

si ottengono in corrispondenza alle soluzioni (t , u) di [1], per le quali $u > 0$ e t è positivo o negativo. Così i sistemi corrispondenti sono

$$|\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2| = |(\pm t_n + 2u_n) C_1 + u_n C_2|$$

per t_n positivo.

Ora la curva $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ sega C_1 in $4\lambda_2 - 2\lambda_1 = 2(2\lambda_2 - \lambda_1)$ punti e C_2 in $4\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2(2\lambda_1 - \lambda_2)$ punti; dunque se $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ è effettiva deve verificarsi simultaneamente

$$2\lambda_2 - \lambda_1 > 0 \quad , \quad 2\lambda_1 - \lambda_2 > 0 \, ,$$

ossia

$$\pm 2 t_n + 3 u_n > 0 \quad , \quad \mp t_n - 2 u_n > 0$$

corrispondendosi i segni di t_n (+ con — e — con +). Poichè queste due disuguaglianze sono incompatibili, si conclude che non ci sono curve razionali effettive in F, all'infuori di quelle corrispondenti alla soluzione $t = 1$, $u = 0$, cioè $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ o $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$; che dà le C_1 e C_2 stesse.

5. Dalla non esistenza di curve razionali, diverse da C_1, C_2, tracciate su F, segue la non esistenza di trasformazioni birazionali non identiche di F in sè [1]. Invero, sia T una trasformazione birazionale di F in sè. In primo luogo la T è senza eccezioni, perchè F non contiene curve eccezionali. Inoltre T muta le C_1, C_2 ciascuna in sè o l'una nell'altra. Epperò T lascia immutato il sistema lineare completo $|C_1 + C_2|$, che è poi il sistema delle sezioni piane di F. Dunque T è un'omografia. S'essa non muta ciascuna delle C_1, C_2 in sè, il suo quadrato T^2 muta in sè ognuna delle C_1, C_2 e quindi o $T^2 = 1$, oppure T^2 subordina sopra le coniche C_1, C_2 due proiettività, che mutano in sè la quaderna comune. Se una di queste proiettività, e quindi anche l'altra, è l'identità, T^2 subordina su tutto il piano α delle due coniche l'identità e quindi è un'omologia. Se l'omografia subordinata su C_1 da T^2 non è identica, poichè il gruppo (C_1, C_2) non è su C_1 nè armonico nè equianarmonico [vedere nota (1) a piè della pag. 3], l'omografia è su C_1 involutoria, sicchè T^4 subordina su C_1 (e quindi su C_2) l'identità. Portanto o è $T^4 = 1$ oppure T^4 è un'omologia col piano d'omologia α.

Si perviene così alla conclusione che, se F possiede una trasformazione birazionale non identica in sè, esiste un'omografia involutoria o un'omologia di piano α, che muta in sè F.

La prima possibilità si scarta, perchè Severi [2] ha dimostrato che una superficie del 4° ordine trasformata in sè da un'omografia involutoria dipende (al più) da 11 moduli, mentre la nostra F dipende da 18 moduli. Resta da esaminare il caso in cui F è mutata in sè da un'omologia τ. Le rette passanti pel centro di omologia segano F in quaderne di punti mutati in sè dall'omologia; epperò, se il centro dell'omologia è

(1) L'analisi che segue è dovuta a Severi.

(2) Memoria di Palermo citata, n. 12, b).

fuori di F, la proiettività subordinata dall'omologia sopra una di quelle rette è ciclica di secondo o di quarto ordine, onde è $\tau^2 = 1$ o $\tau^4 = 1$. In ogni caso, si ricade sopra un'omologia armonica mutante in sè F. E questo è assurdo.

Dunque il centro dell'omologia giace su F e le rette pel centro segano F secondo gruppi equianarmonici e τ è ciclica di terzo ordine; sicchè l'omologia ha necessariamente il centro O fuori del piano α. Mandato il piano α all'infinito con un'omografia e posta l'origine delle coordinate nel centro O, l'equazione di F si presenta sotto la forma:

$$\varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) + \varphi_3(x, y, z) + \varphi_4(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

ove φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 son forme in x, y, z dei gradi indicati dai loro indici. Per ipotesi l'equazione precedente è mutata in sè dall'omotetia equianarmonica

$$x = \varepsilon x' \quad , \quad y = \varepsilon y' \quad , \quad z = \varepsilon z' \tag{4}$$

ove ε è una radice cubica complessa dell'unità. Dalla [3], tenuto conto della [4], segue, dopo soppresso il fattore ε e ricordato che $\varepsilon^3 = 1$:

$$\varphi_1(x', y', z') + \varepsilon\varphi_2(x', y', z') + \varepsilon^2\varphi_3(x', y', z') + \varphi_4(x', y', z') = 0.$$

Sottraendo da questa la [3], ove si ponga x', y', z' al posto di x, y, z, e soppresso di nuovo il fattore ε, si ottiene:

$$\varphi_2(x', y', z') + \varepsilon\varphi_3(x', y', z') = 0.$$

E siccome il polinomio di 3° *grado* $\varphi_2(x, y, z) + \varepsilon\varphi_3(x, y, z)$ si annulla ovunque sulla superficie irriducibile di 4° *ordine* F, esso è identicamente nullo. Mancano pertanto 15 coefficienti nell'equazione di F. Le superficie del 4° ordine invarianti per una data omologia equianarmonica dipendono così da 34 — 15 = 19 parametri e quelle invarianti per qualche omologia equianarmonica da 19 + 6 = 25 parametri, poichè le omologie equianarmoniche sono ∞^6. Le F invarianti per omologie equianarmoniche dipendono insomma da 25 — 15 = 10 moduli (al più). E siccome la nostra F dipende da 18 moduli, essa non può esser invariante di fronte ad un'omologia equianarmonica. Si conclude che:

La più generale superficie del 4° ordine contenente una conica irriducibile non possiede trasformazioni birazionali in sè.

6. Ci resta ora da mostrare che, nonostante ciò, la forma quadratica fondamentale di F possiede un gruppo infinito discontinuo di isomorfismi.

Ma prima completiamo lo studio delle curve effettive di F, mostrando ch'esse corrispondono soltanto a valori ambedue non negativi di λ_1, λ_2.

Invero, se la curva $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ deve essere effettiva, intersecandola con C_1, C_2 e con una sezione piana, avremo le disuguaglianze:

$$2\lambda_2 > \lambda_1 \quad , \quad 2\lambda_1 > \lambda_2 \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_2 > 0 ,$$

le quali, colle relazioni che esprimono λ_1, λ_2 per mezzo di t, u, porgono

$$t < 0 \quad , \quad 2t + 3u > 0 \quad , \quad t + 3u > 0 ,$$

Se ne ricava:

$$\lambda_2 = u > 0 \quad , \quad \lambda_1 = t + 2u > \frac{1}{2} u > 0 ;$$

epperò le sole curve effettive di F son le $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, corrispondenti a valori non negativi di λ_1, λ_2.

Si posson poi cercare le curve di un determinato grado virtuale $2p - 2$ (p genere). Ciò equivale a cercare gl'interi $p - 1$ che posson rappresentarsi sotto la forma:

$$-\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2 = p - 1 .$$

Trasformando quest'equazione da risolversi in numeri interi, mediante la sostituzione $\lambda_1 = t + 2u$, $\lambda_2 = u$, nell'equazione di PELL:

$$t^2 - 3u^2 = 1 - p ,$$

si trova facilmente che i possibili valori del genere virtuale delle curve *effettive* tracciate su F sono della forma $\dot{3}$ o $\dot{3} + 1$. Per esempio, i primi valori del genere sono $p = 3 , 4 , 9 , 12 , 13 , 24 , 27 , 28 , \cdots$.

7. Le trasformazioni lineari intere $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ della forma

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2$$

in sè, sono date, secondo classiche proprietà di teoria dei numeri, da:

$$\alpha = t + 2u \quad , \quad \beta = -u \quad , \quad \gamma = u \quad , \quad \delta = t - 2u ,$$

ove (t, u) è una soluzione dell'equazione di PELL [1], tratta dalla formula di LAGRANGIA (n. 4). Esse formano un gruppo discontinuo infinito; e le *sostituzioni di modulo* ± 1 formano in questo un sottogruppo discontinuo infinito, che si riconosce agevolmente esser generato dalle due *trasformazioni fondamentali*:

$$S \equiv \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad T \equiv \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

la prima delle quali è involutoria.