

CUADROS SINÓPTICOS PARA EL ANÁLISIS TEMPORAL Y FRECUENCIAL DE SEÑALES Y SISTEMAS CONTINUOS Y DISCRETOS

María José Gómez Silva



Universidad Complutense de Madrid

Sistemas Lineales
Grado en Ingeniería Electrónica de Comunicaciones

2026

ÍNDICE

- Relación entre el comportamiento de una señal continua y el tipo de polos de su transformada de Laplace 4
- Relación entre el comportamiento de una señal discreta y el tipo de polos de su transformada Z 5
- Comportamiento de la salida (acotada o no) de un sistema continuo en función de los polos de la entrada y del sistema (estable/inestable/marginalmente estable) 6
- Comportamiento de la salida (acotada o no) de un sistema discreto en función de los polos de la entrada y del sistema (estable/inestable/marginalmente estable) 7
- Análisis temporal de la respuesta al escalón de sistemas continuos de primer y segundo orden 8
- Formulación de la Serie y Transformada de Fourier para señales continuas 9
- Aplicación de la Serie y Transformada de Fourier para señales continuas 9
- Formulación de la Serie y Transformada de Fourier para señales discretas 10
- Aplicación de la Serie y Transformada de Fourier para señales discretas 10
- Cálculo de la Respuesta Permanente 11
- Conceptos básicos del Análisis Temporal y Frecuencial de sistemas Continuos 12
- Conceptos básicos del Análisis Temporal y Frecuencial de sistemas Discretos 13
- Diagrama de Bode asintótico para cada tipo de factor de la Función de Transferencia de sistemas continuos 14
- Cambios de unidades habituales en Análisis Frecuencial 15

PREFACIO

Bienvenido a la asignatura de **Sistemas Lineales**.

Como profesora de esta materia en la Universidad Complutense de Madrid, he sido testigo, año tras año, del reto intelectual que supone para los estudiantes enfrentarse a este temario por primera vez. La densidad de los conceptos, la transición entre dominios — del tiempo a la frecuencia, de lo continuo a lo discreto — y la gran cantidad de herramientas matemáticas necesarias, suelen generar una sensación de "ruido" cognitivo que dificulta el aprendizaje y comprensión profundos de los conceptos básicos.

Este libro nace en nuestras aulas y para nuestras aulas. No surge como un sustituto de las clases magistrales ni de la bibliografía clásica; surge como una herramienta de arquitectura mental.

¿Por qué cuadros sinópticos?

En una disciplina donde "todo está conectado", la visión lineal de un libro de texto convencional a veces oculta las relaciones transversales. He diseñado estos cuadros sinópticos con un objetivo claro: que puedas ver el bosque antes de analizar cada árbol. El uso de este material te permitirá:

- **Jerarquizar:** Identificar qué conceptos son los pilares y cuáles son derivaciones técnicas.
- **Conectar:** Visualizar de un vistazo las relaciones y analogías entre conceptos, como la Serie y Transformada de Fourier, o entre los sistemas analógicos y digitales.
- **Sintetizar:** Tener una hoja de ruta rápida para las sesiones de resolución de problemas y prácticas de laboratorio.

Instrucciones de uso

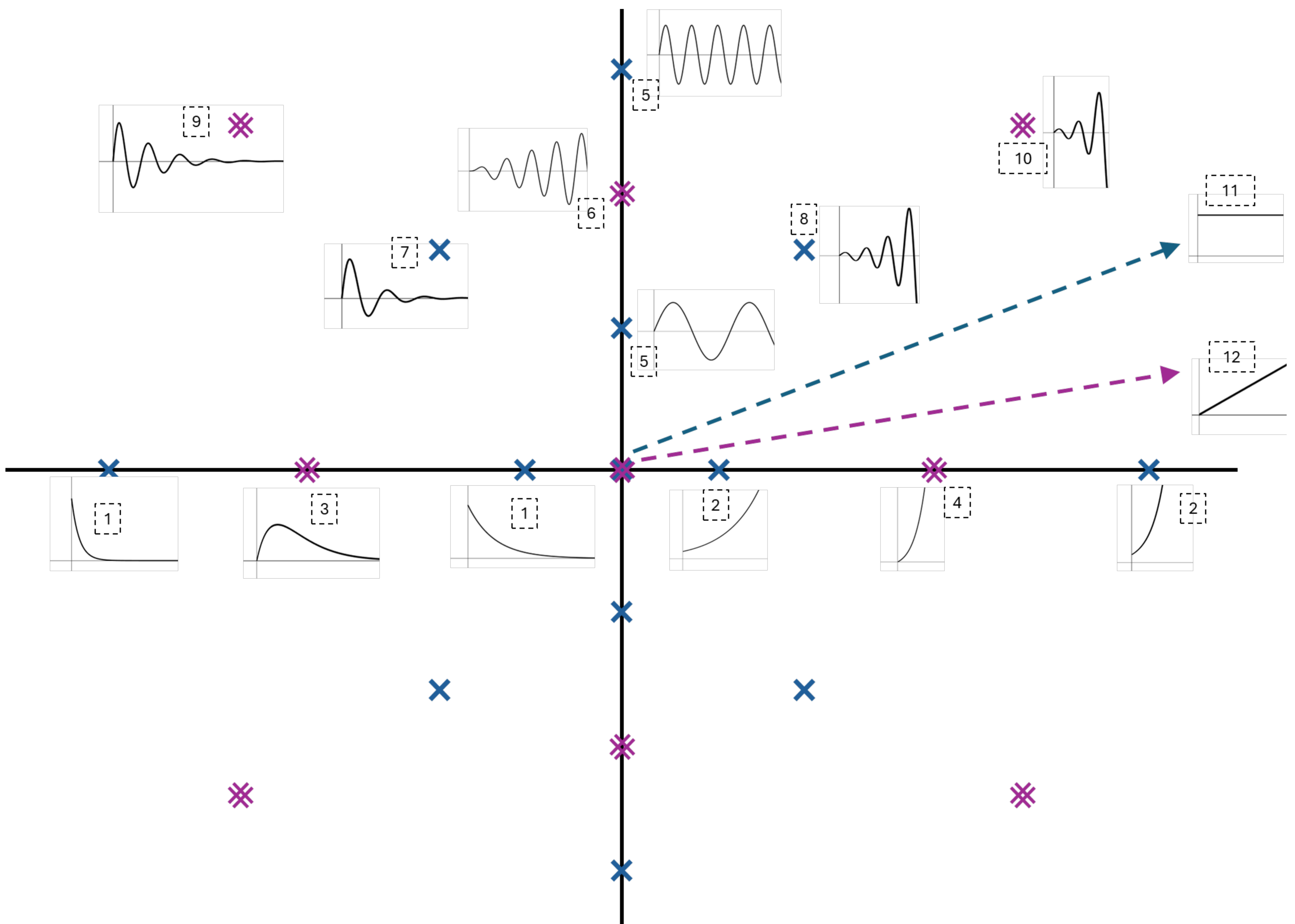
Es importante mantener el rigor académico: **estos esquemas son un complemento, no un atajo**. Un cuadro sinóptico organiza el conocimiento que ya se ha empezado a trabajar, pero no puede generar la destreza que solo se adquiere con la práctica constante y el estudio de la teoría de base. Utiliza este manual para poner orden a tus apuntes de clase, para repasar antes de nuestros exámenes y para aclarar el panorama cuando los cálculos se vuelvan complejos.

Mi meta es que, al finalizar el cuatrimestre, no solo sepas aplicar herramientas matemáticas para resolver problemas, sino que seas capaz de comprender las peculiaridades de cada sistema y analizar los resultados, a través del pensamiento crítico y el dominio de los conceptos clave sobre Sistemas Lineales. Espero que este compendio visual sea el aliado que te ayude a conseguirlo.

*Dra. María José Gómez Silva
Sección Departamental de Arquitectura de Computadores y Automática
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid.*

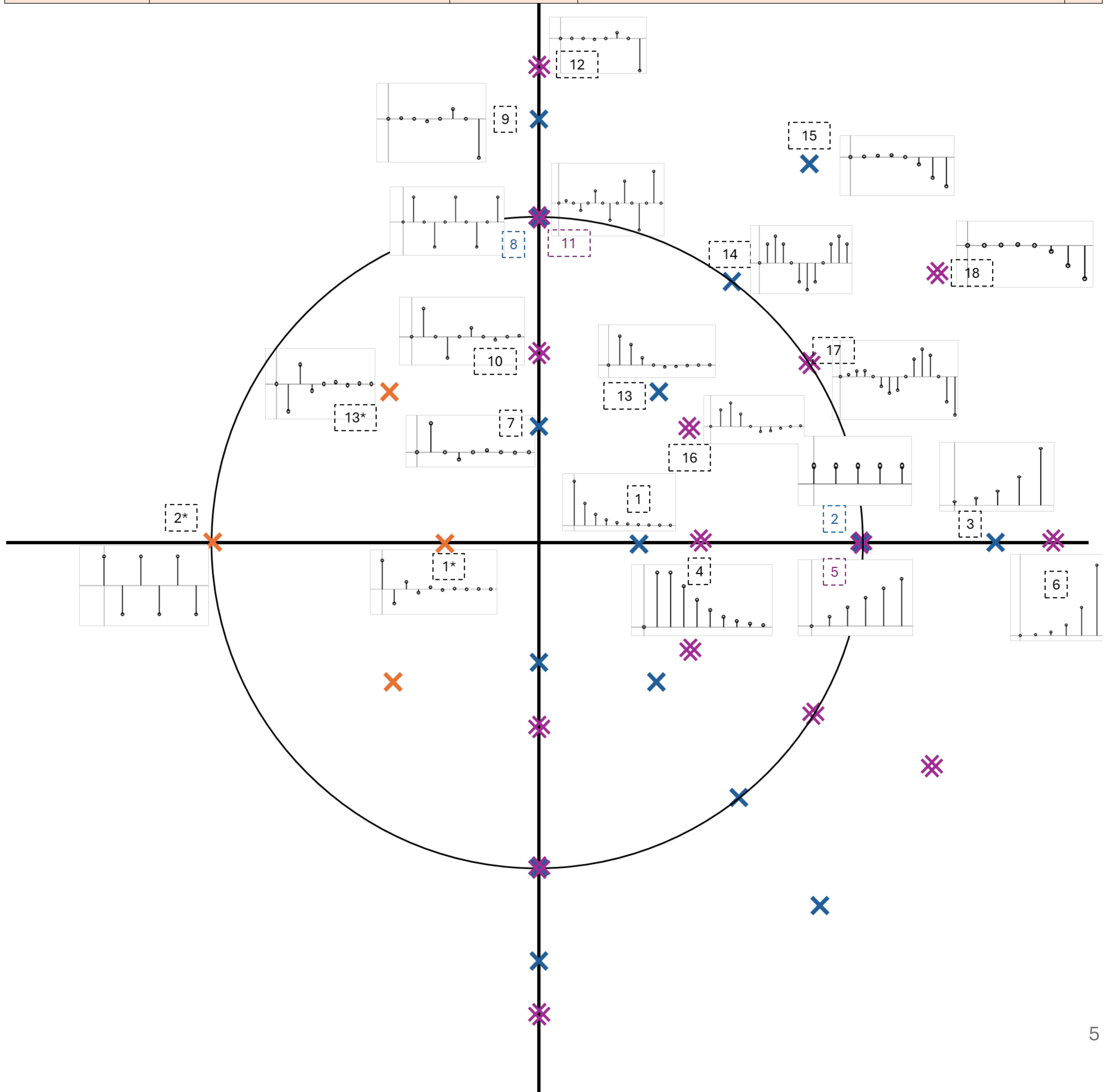
RELACIÓN ENTRE EL COMPORTAMIENTO DE UNA SEÑAL CONTINUA Y EL TIPO DE POLOS DE SU TRANSFORMADA DE LAPLACE

Tipo de polos de X(s)	La transformada inversa de Laplace de X(s) es x(t)	Comportamiento de x(t)		
Simple (s = -a)	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b}{s+a}\right) = be^{-at}$	Exponencial	Si la parte real del polo es negativa → tiende a cero	1
			Si la parte real del polo es positiva → tiende a alejarse de cero	2
Doble	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b}{(s+a)^2}\right) = bte^{-at}$	Exponencial por rampa . Predomina la exponencial	Si la parte real del polo es negativa → tiende a cero	3
			Si la parte real del polo es positiva → tiende a alejarse de cero	4
Imaginarios conjugados (s = ±jω)	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) = \sin(\omega t)$	Sinusoidal	Oscilación que mantiene su amplitud	5
Imaginarios conjugados dobles	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}\right) = \frac{\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)}{2\omega^2}$	Sinusoidal por rampa	Oscilación cuya amplitud tiende a crecer	6
Complejos conjugados (s = a ± jω)	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2 + 2as + a^2 + \omega^2}\right) = e^{-at} \sin(\omega t)$	Exponencial por sinusoidal	Si la parte real del polo es negativa → oscilación que tiende a cero	7
			Si la parte real del polo es positiva → oscilación cuya amplitud tiende a crecer	8
Complejos conjugados dobles	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{(s^2 + 2as + a^2 + \omega^2)^2}\right) = b \cdot e^{-at} \sin(\omega t) + c \cdot te^{-at} \cos(\omega t)$	Exponencial por rampa por sinusoidal Predomina la exponencial frente a la rampa	Si la parte real del polo es negativa → oscilación que tiende a cero	9
			Si la parte real del polo es positiva → oscilación cuya amplitud tiende a crecer	10
En el origen (s = 0)	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1(t)$	Escalón	Se mantiene constante	11
Doble en el origen	$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t$	Rampa	Tiende a alejarse del cero	12
				1

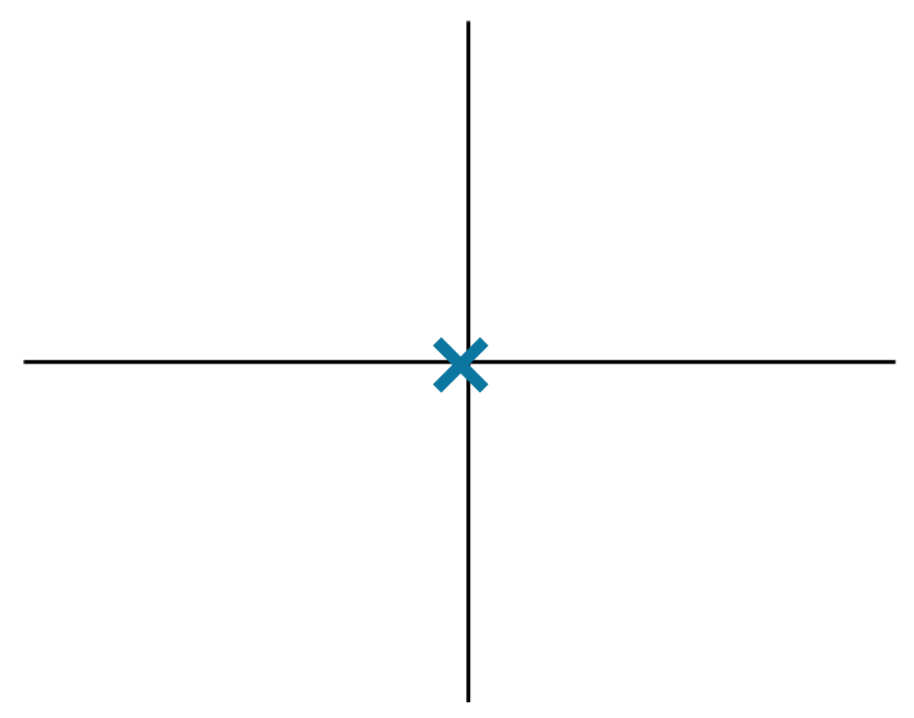
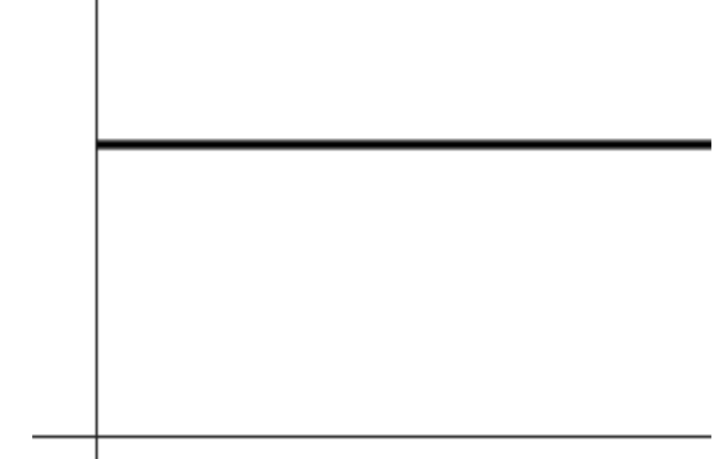
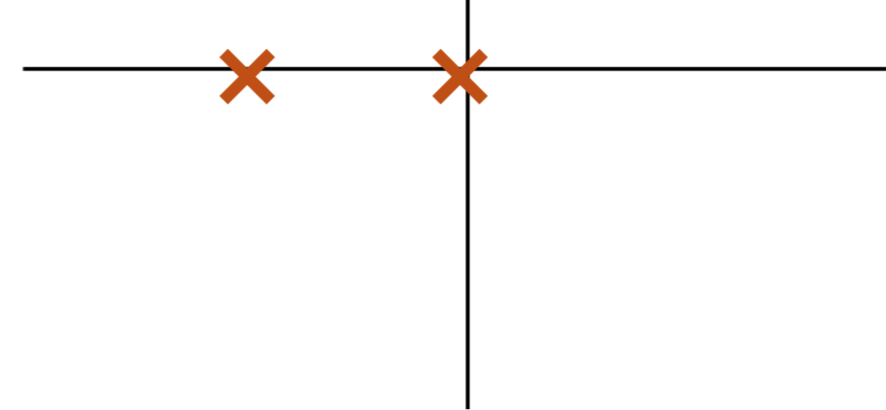
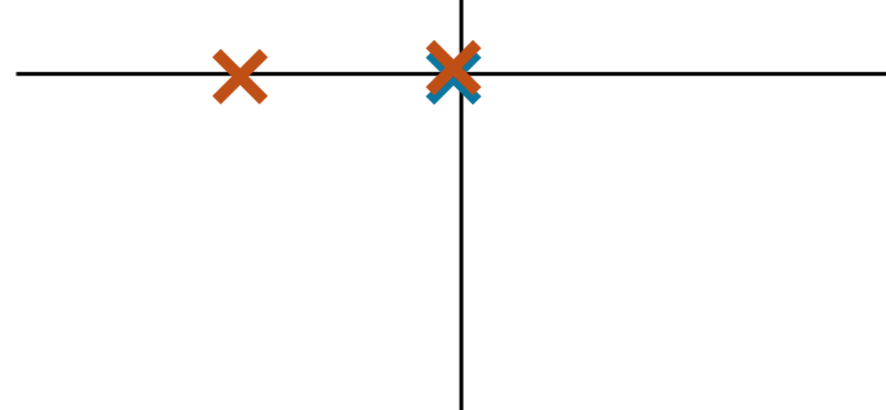
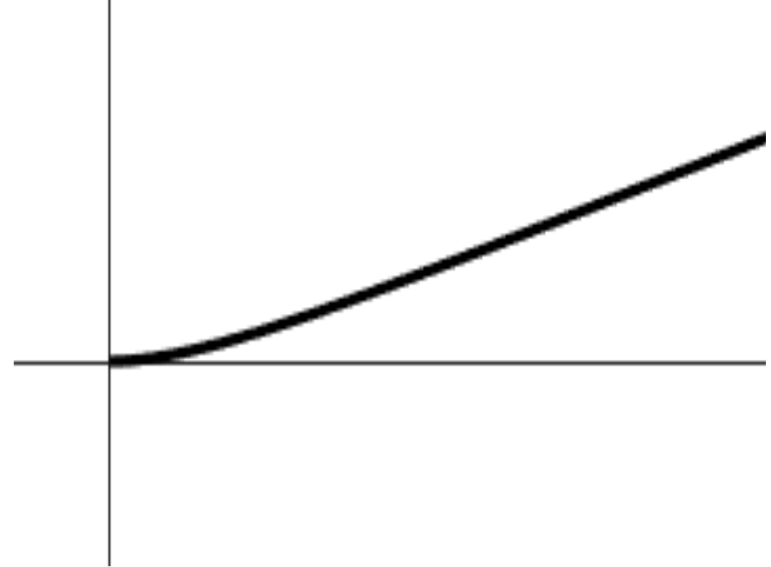
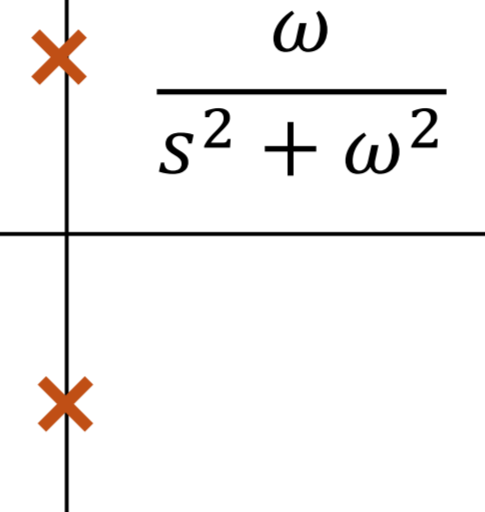
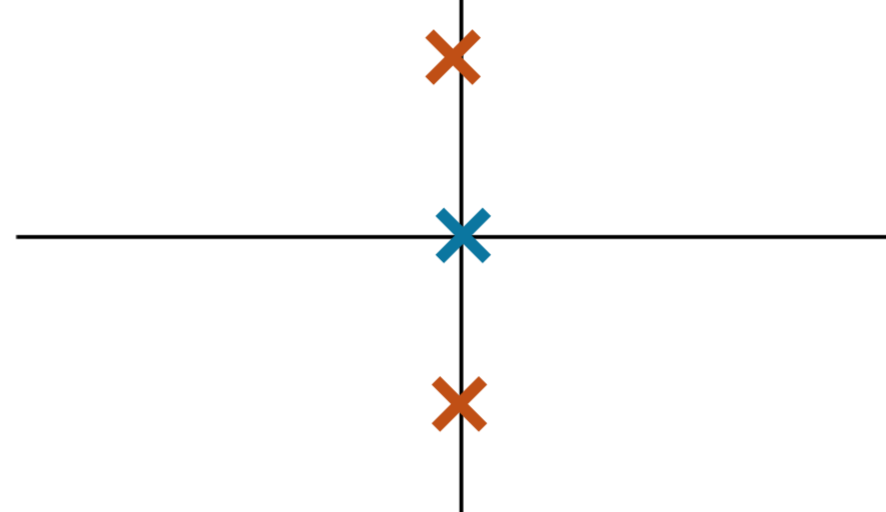
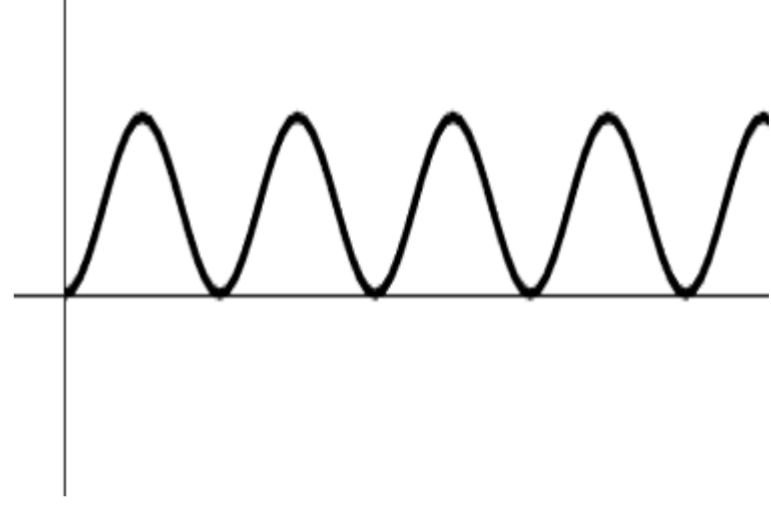
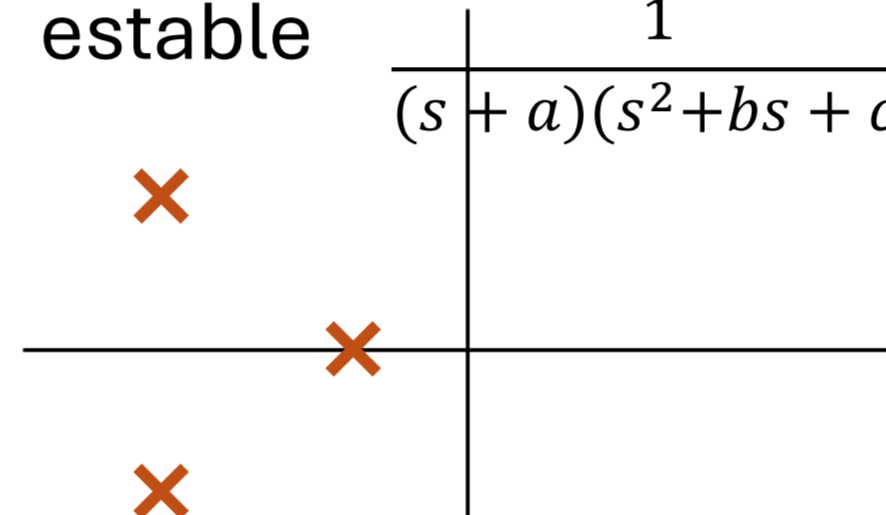
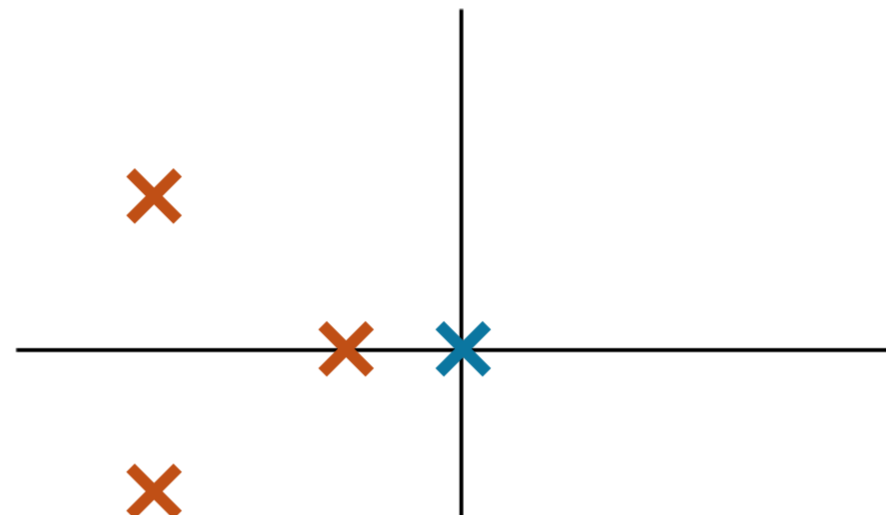
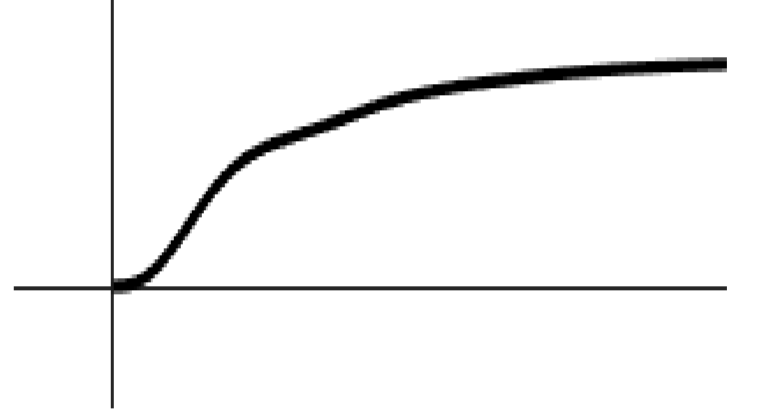
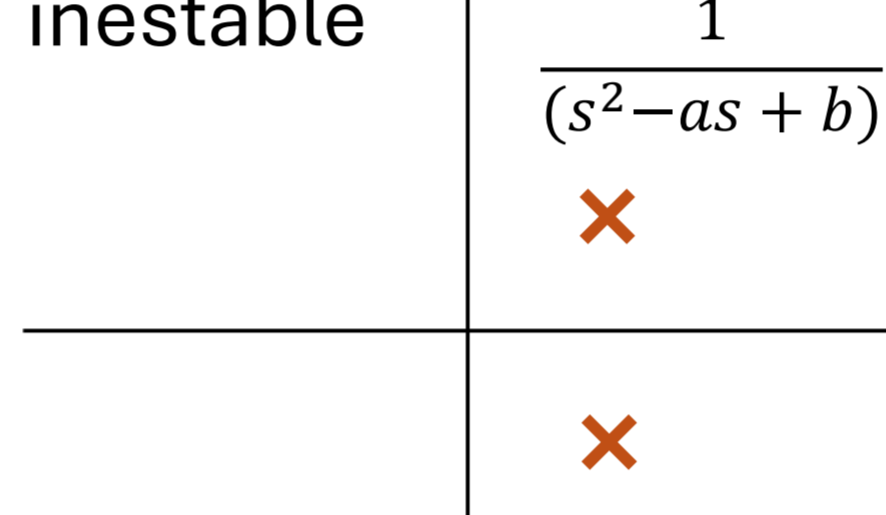
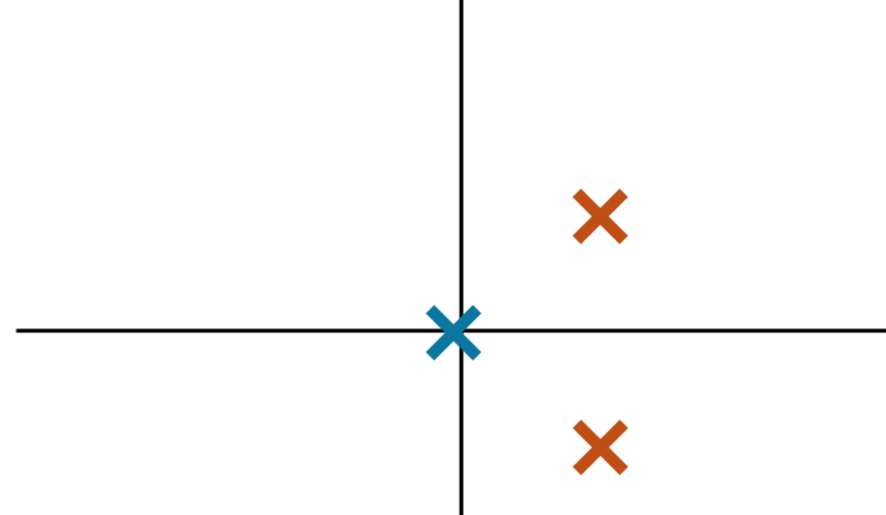
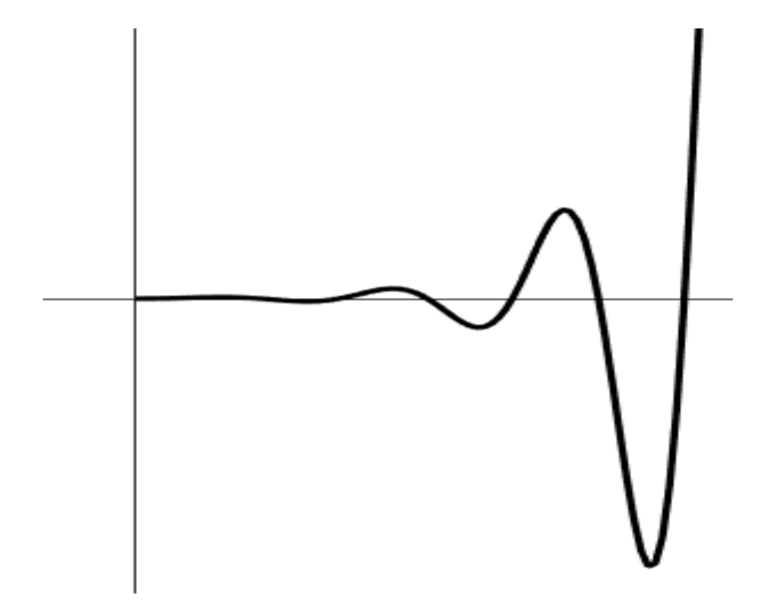
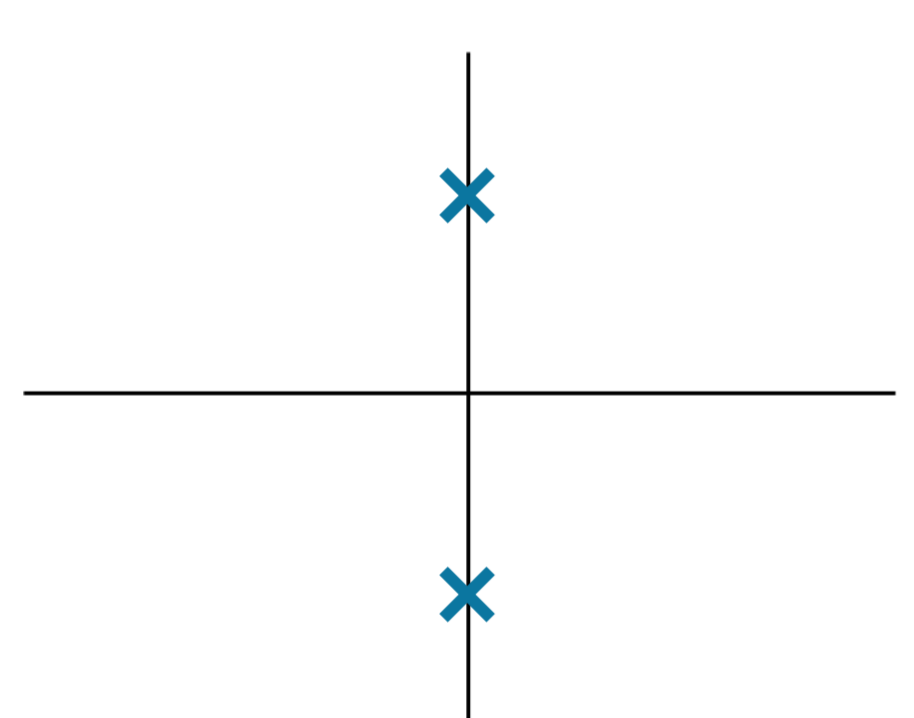
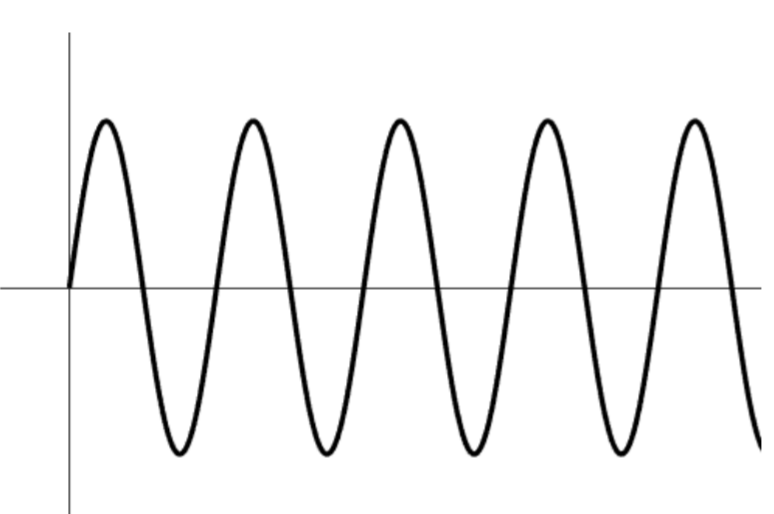
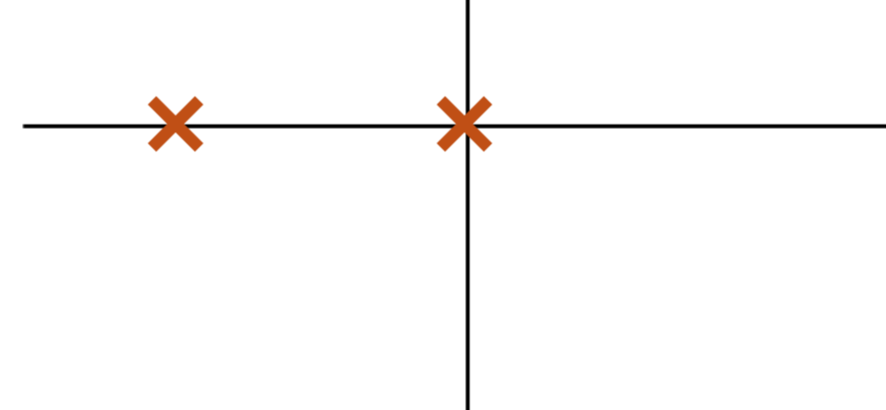
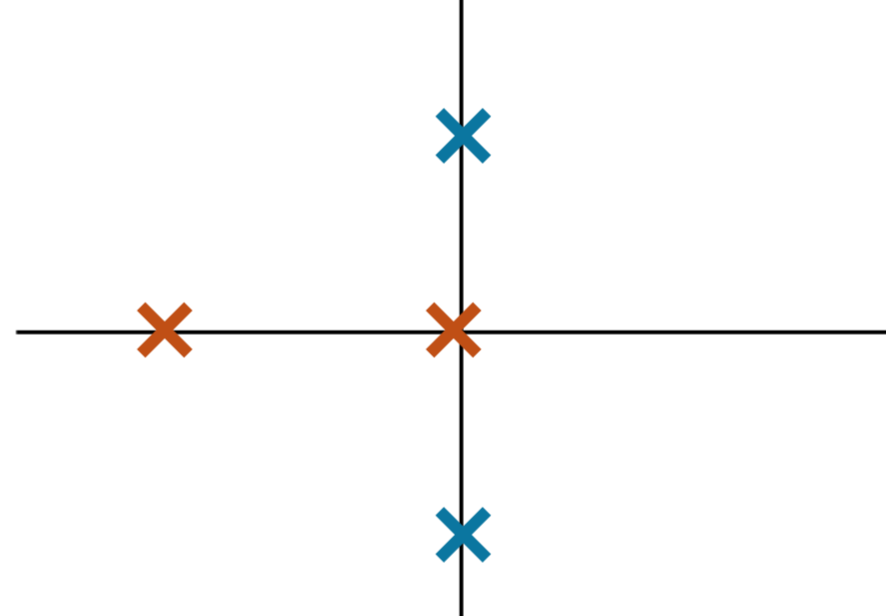
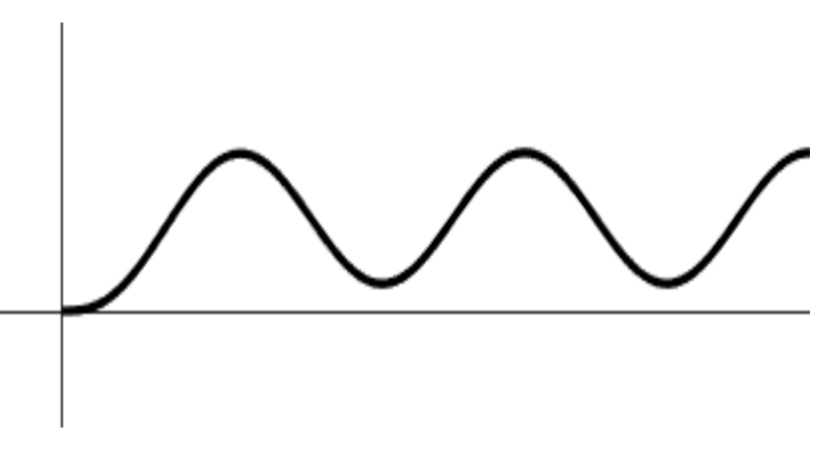
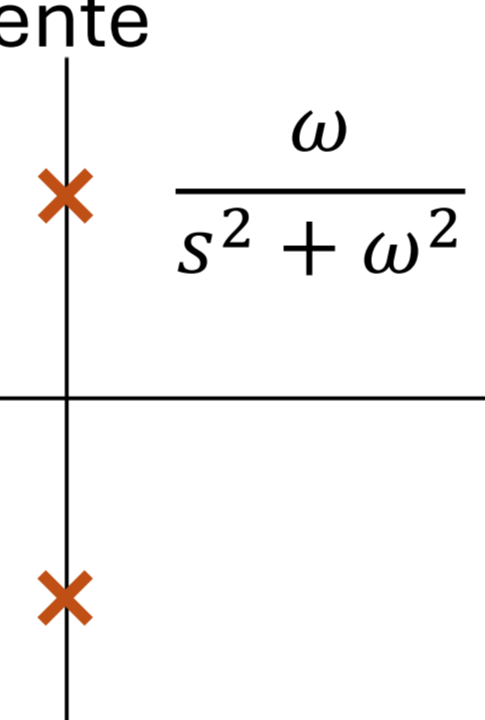
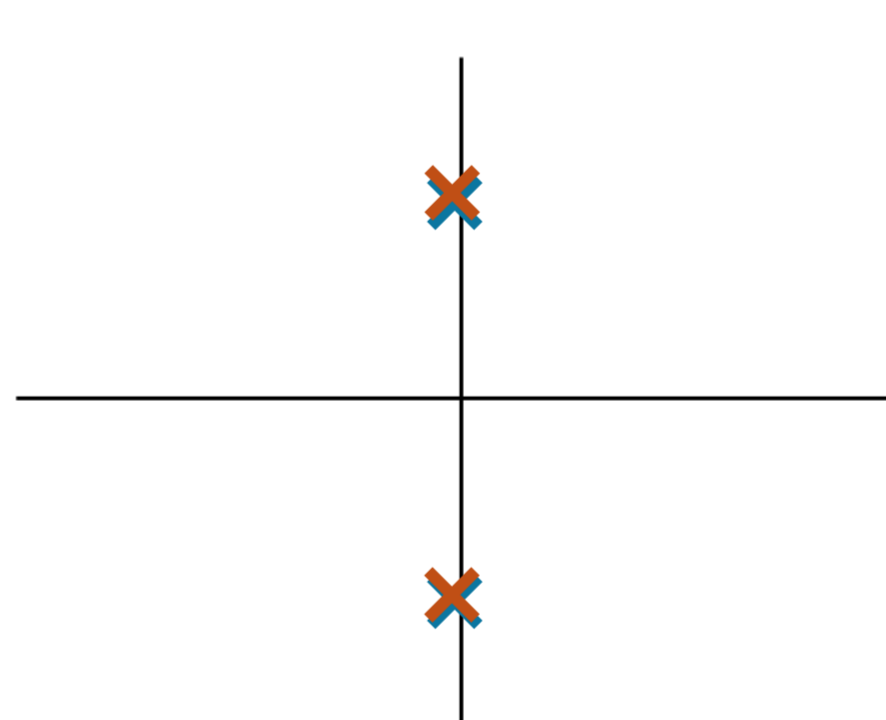
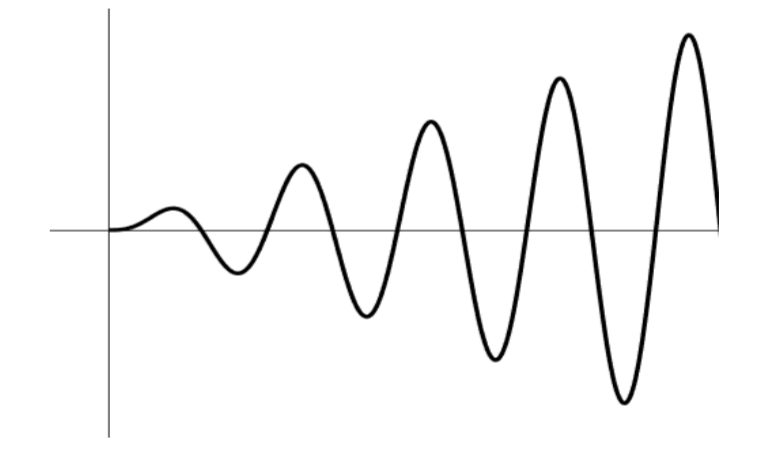
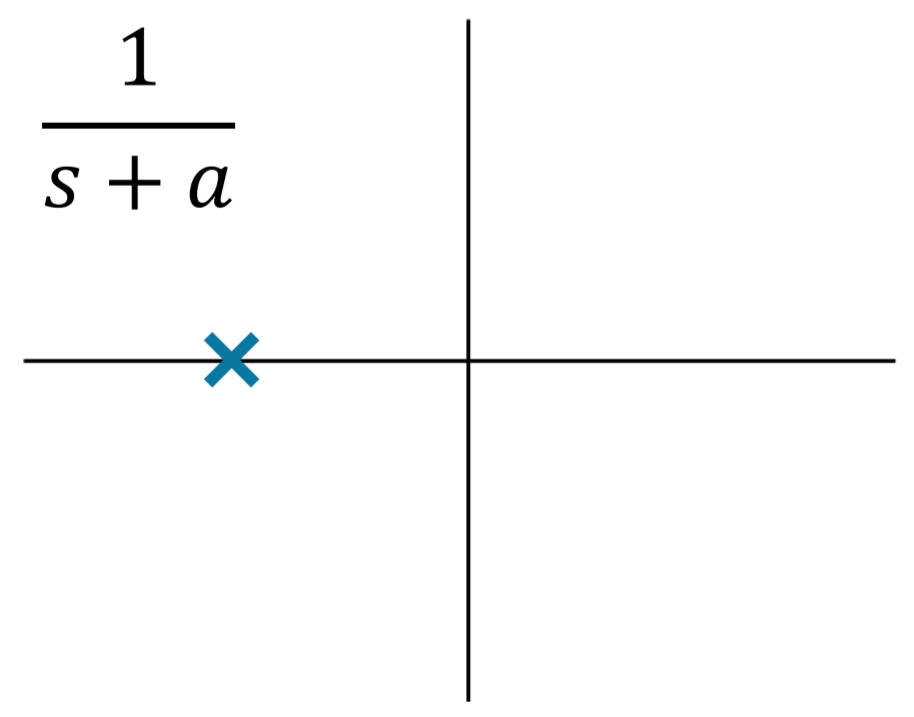
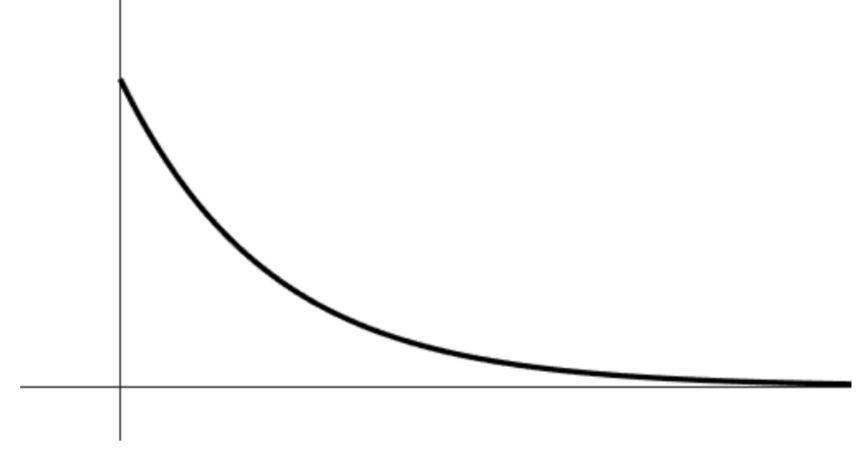
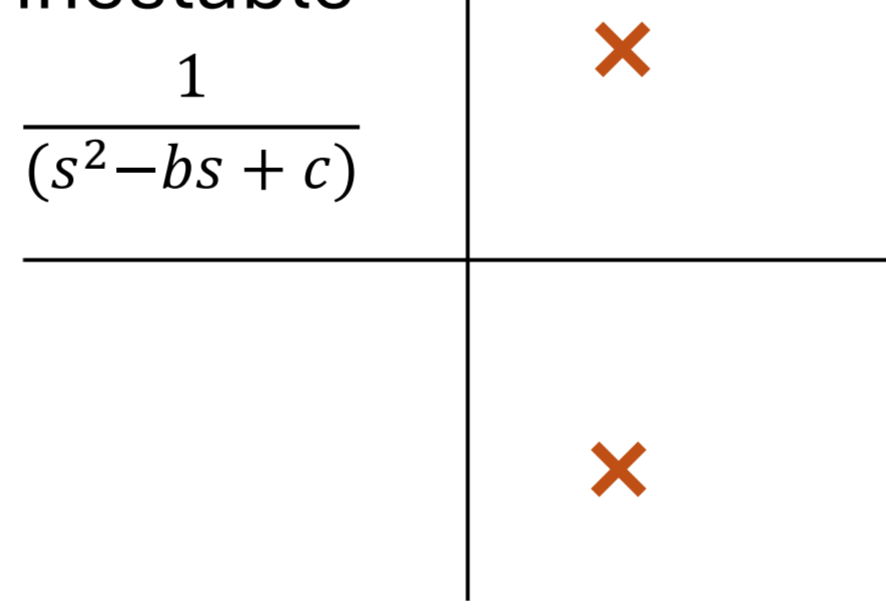
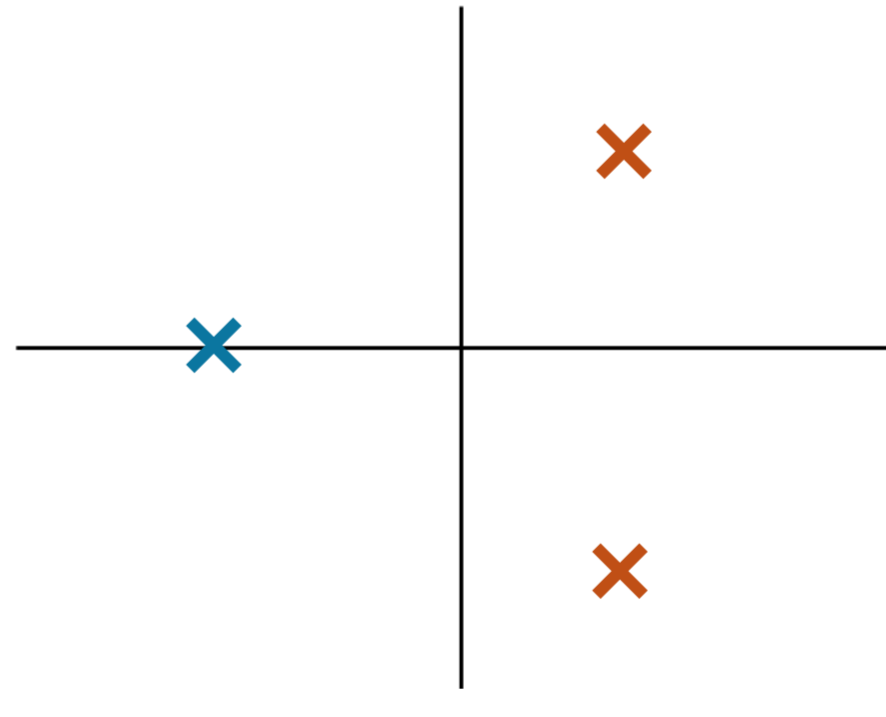
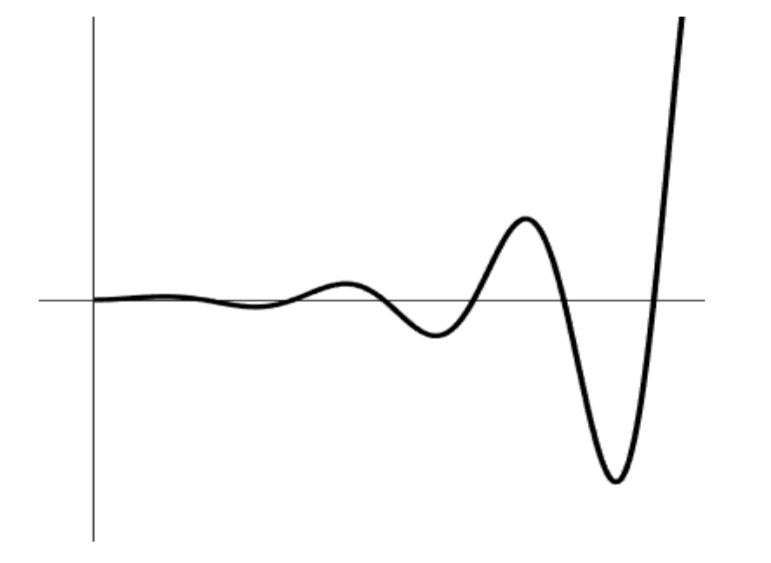
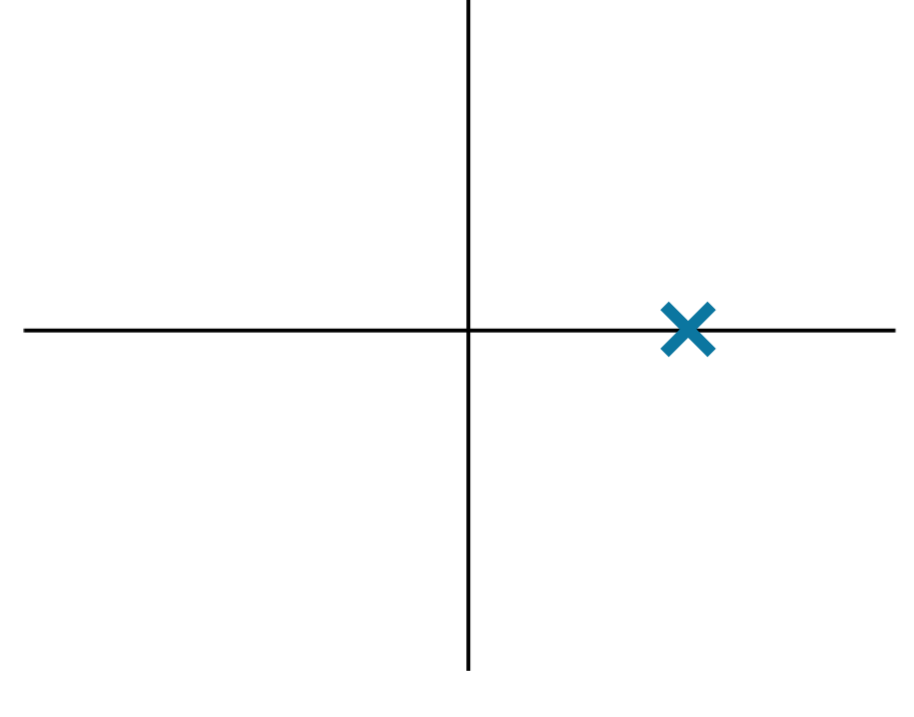
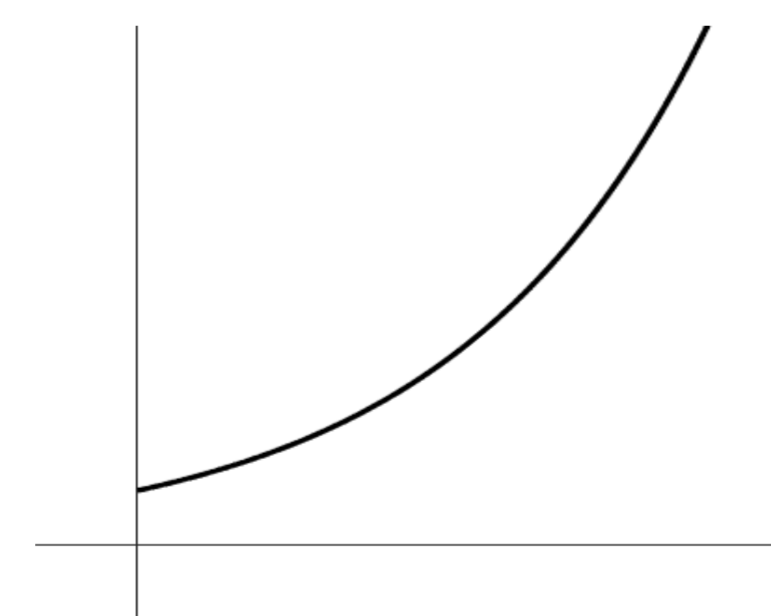
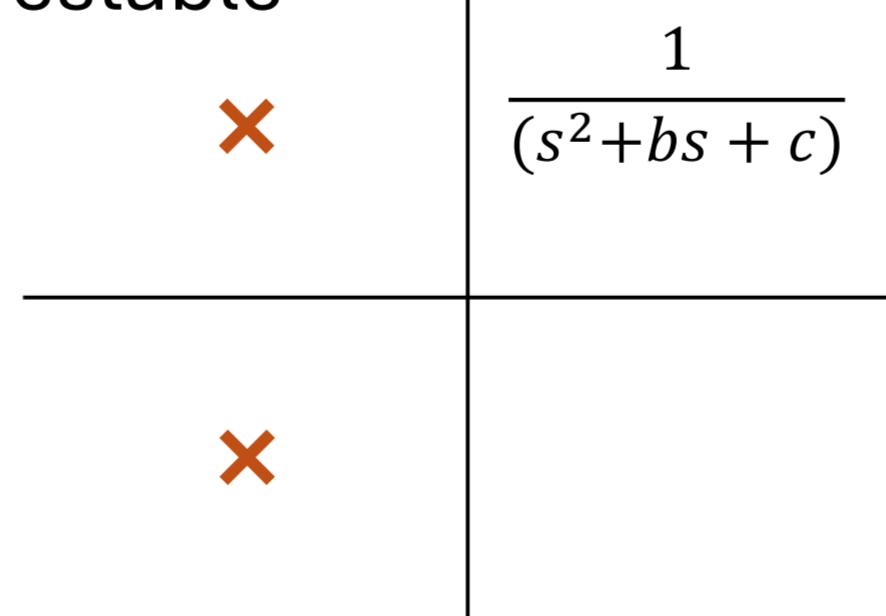
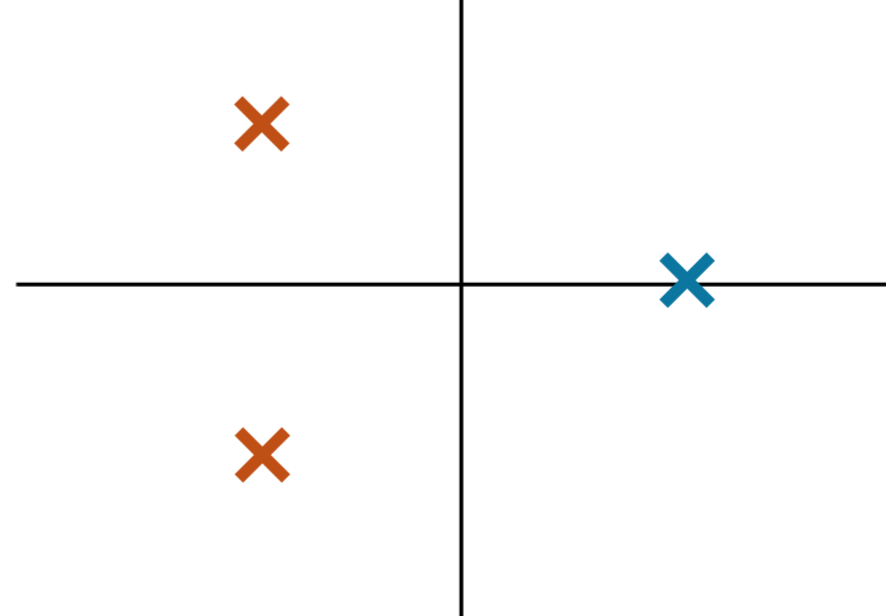
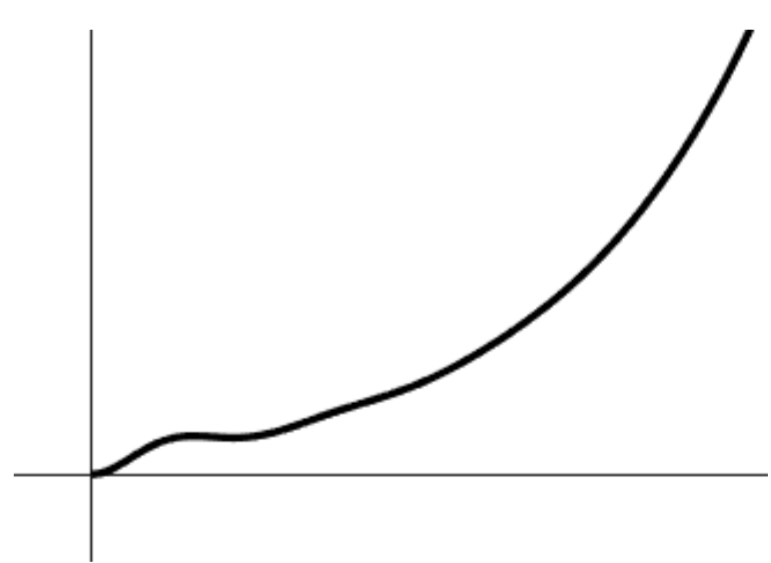
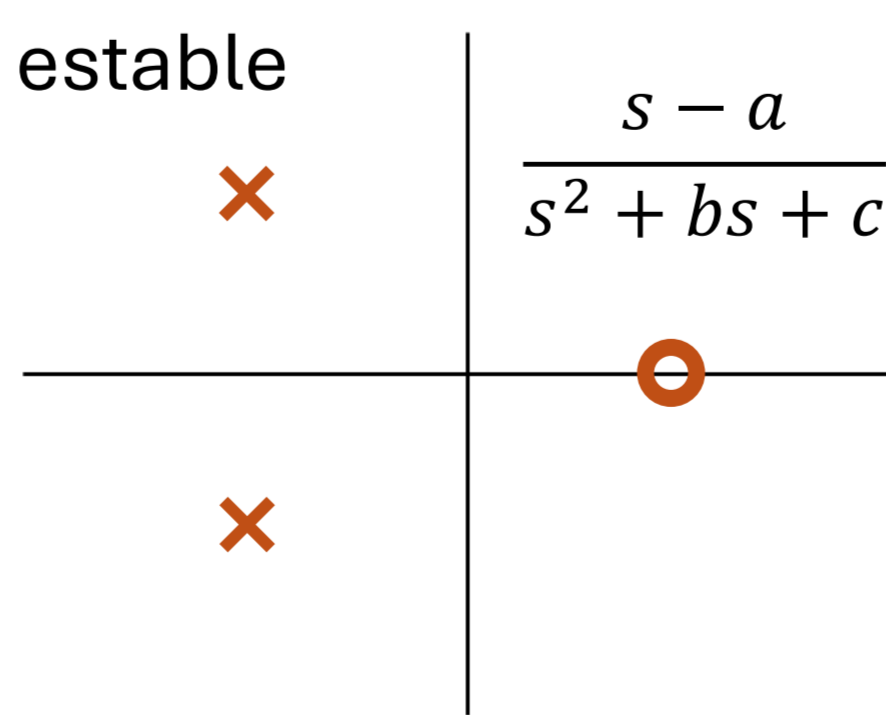
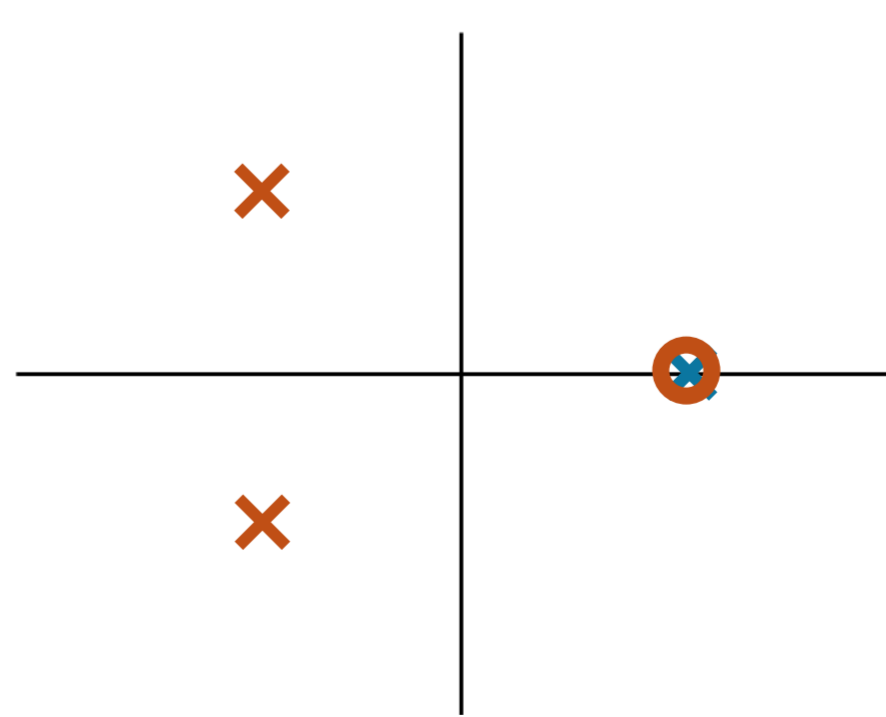
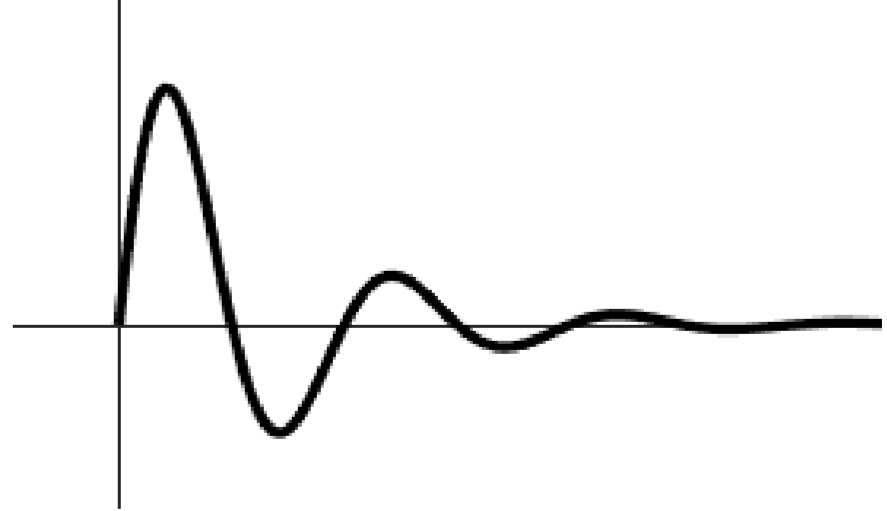
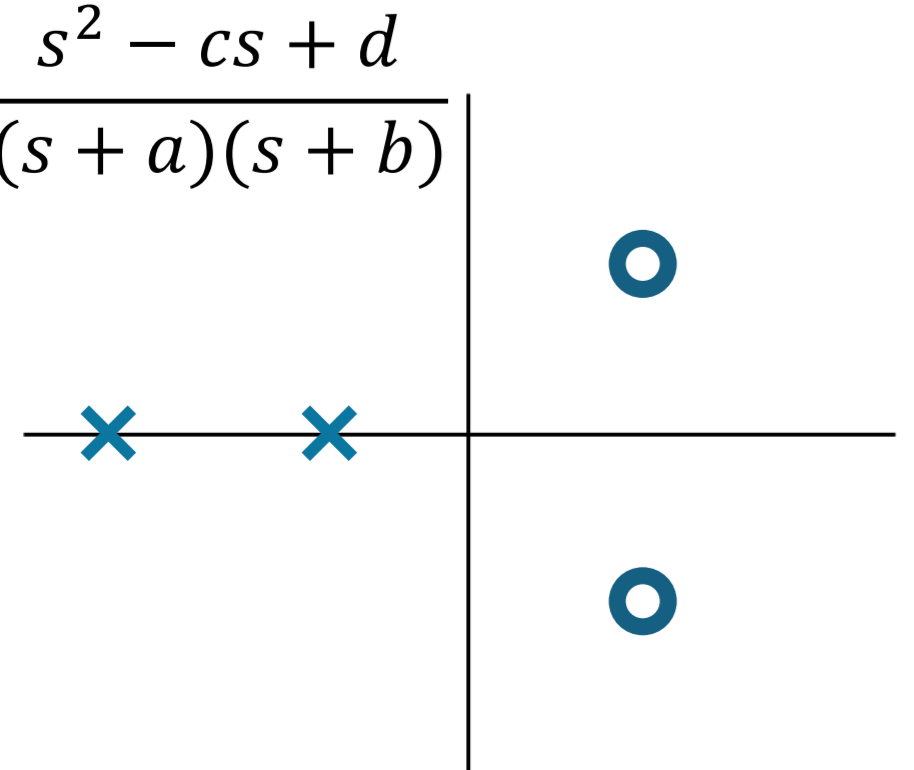
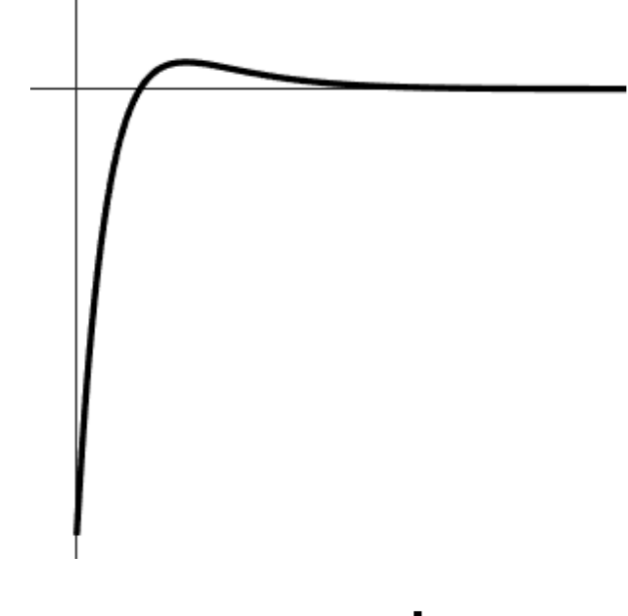
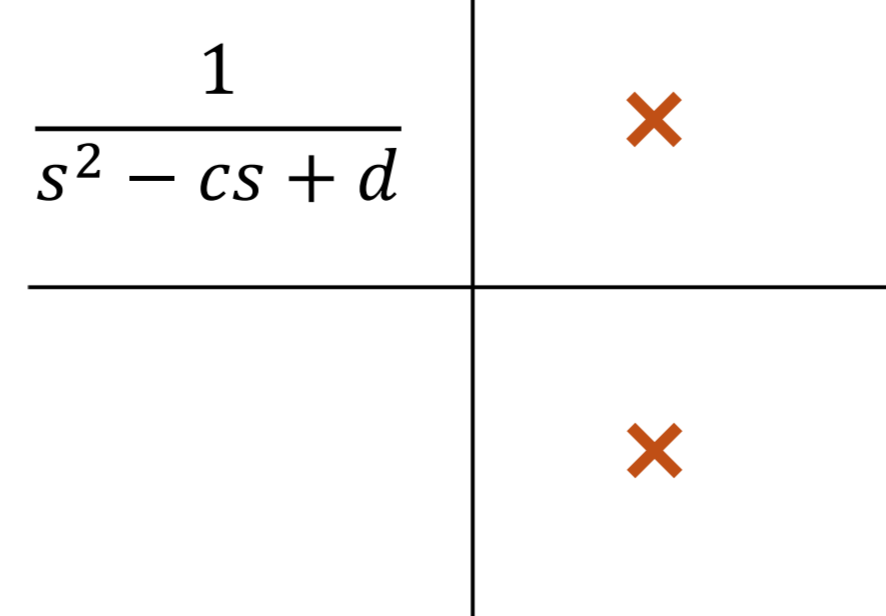
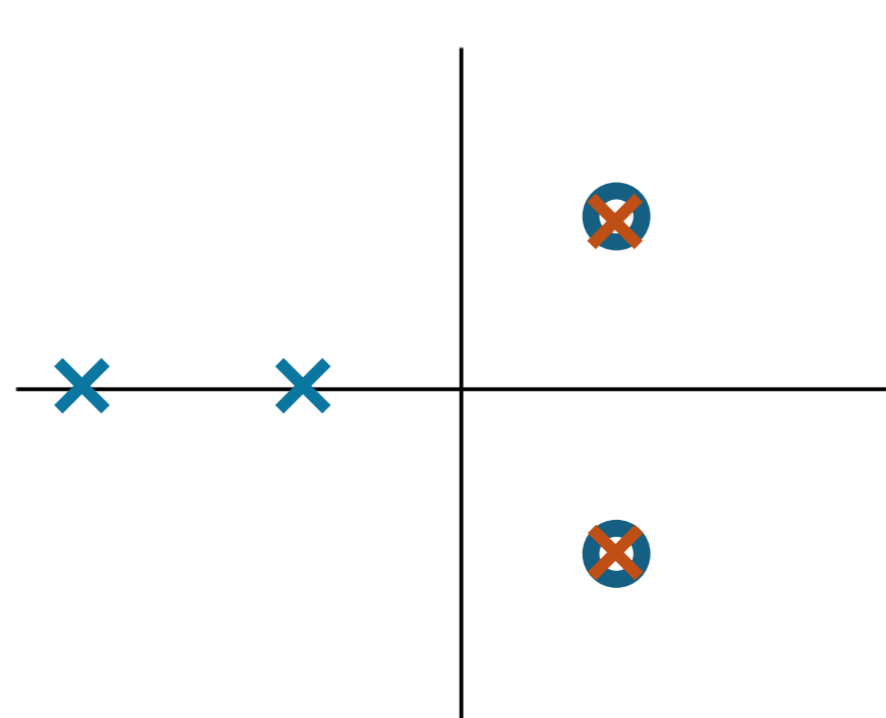
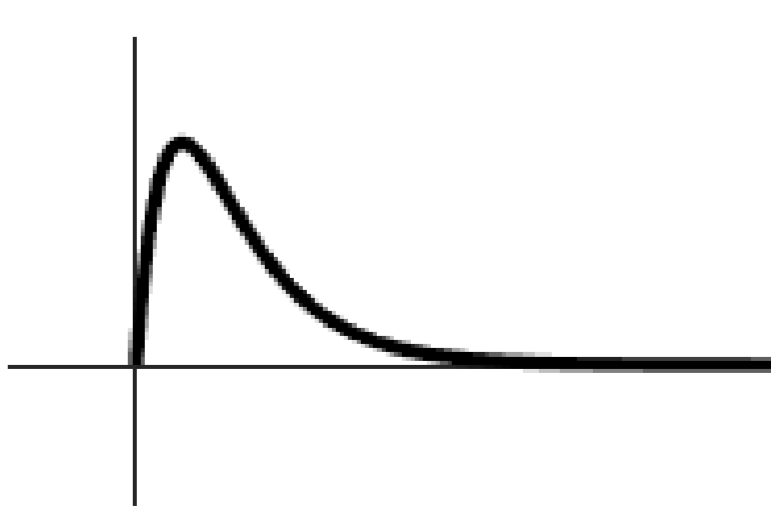


RELACIÓN ENTRE EL COMPORTAMIENTO DE UNA SEÑAL DISCRETA Y EL TIPO DE POLOS DE SU TRANSFORMADA Z

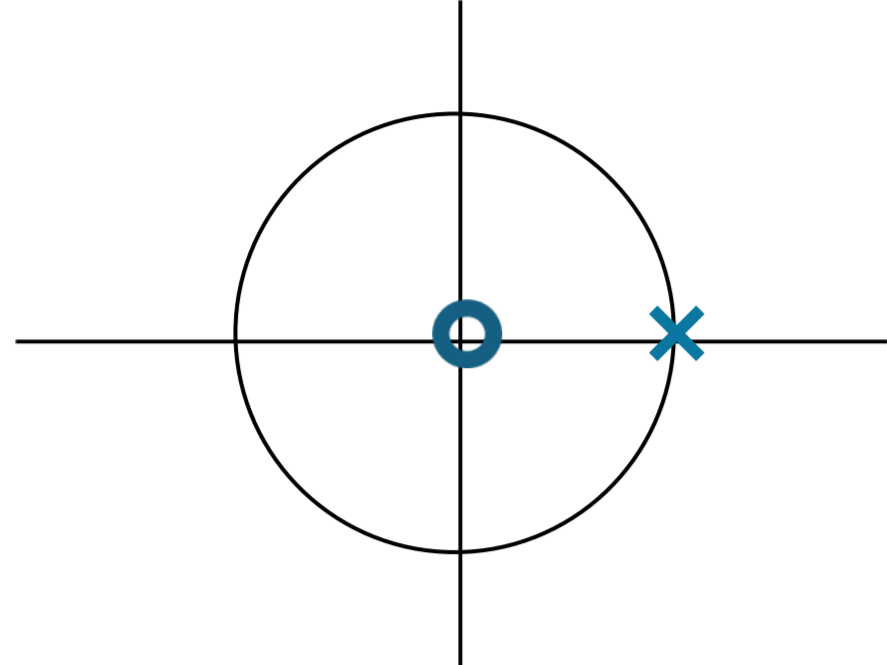
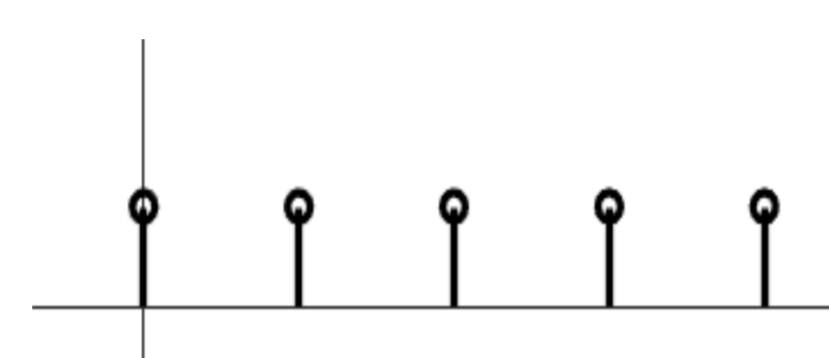
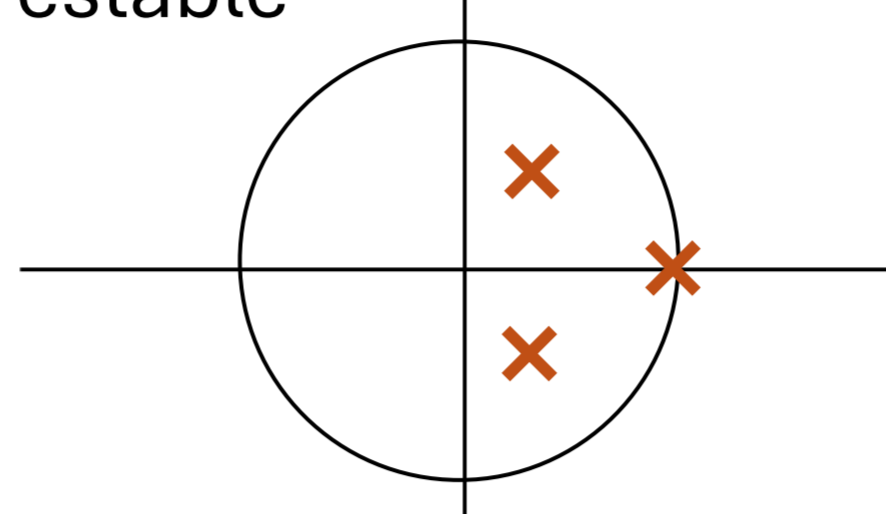
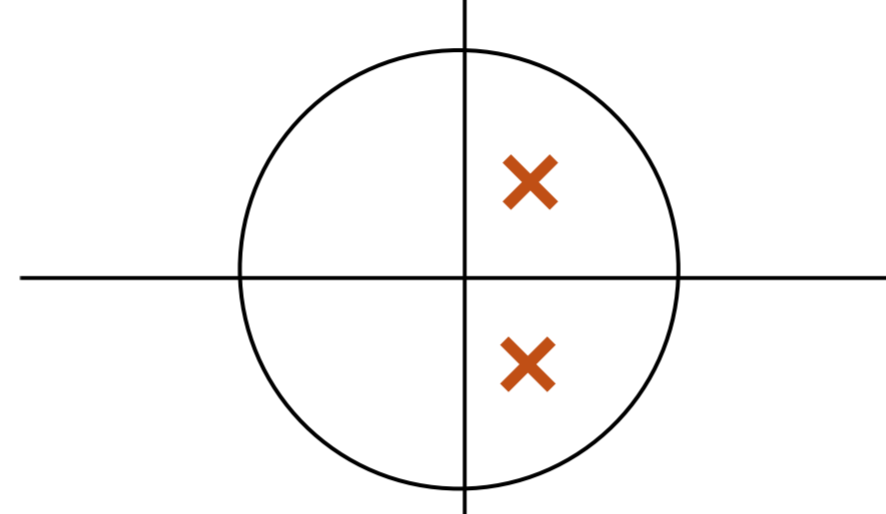
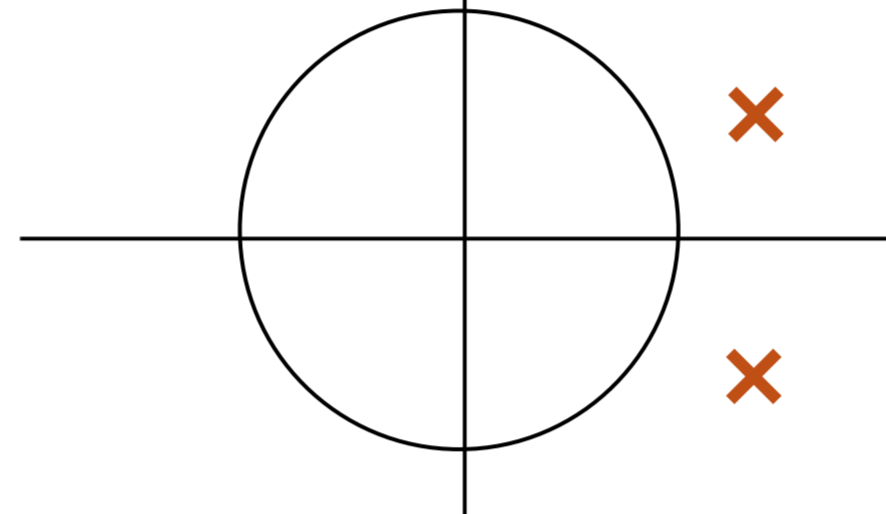
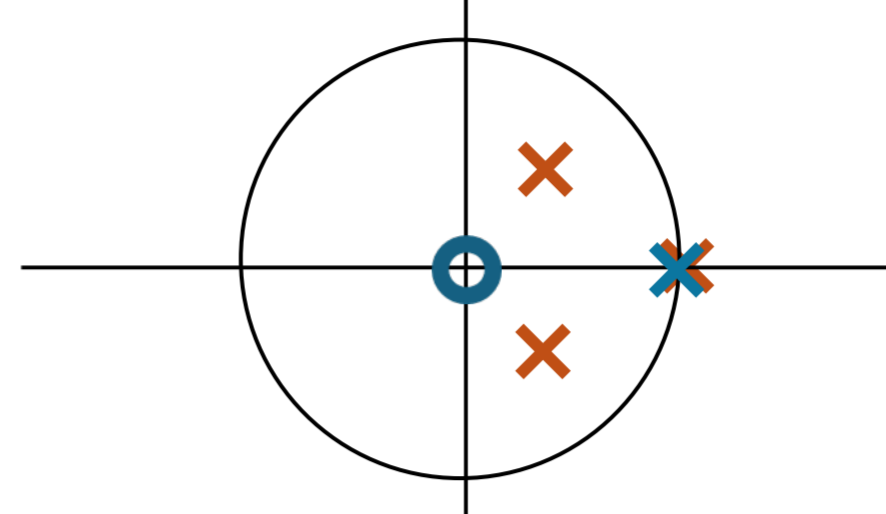
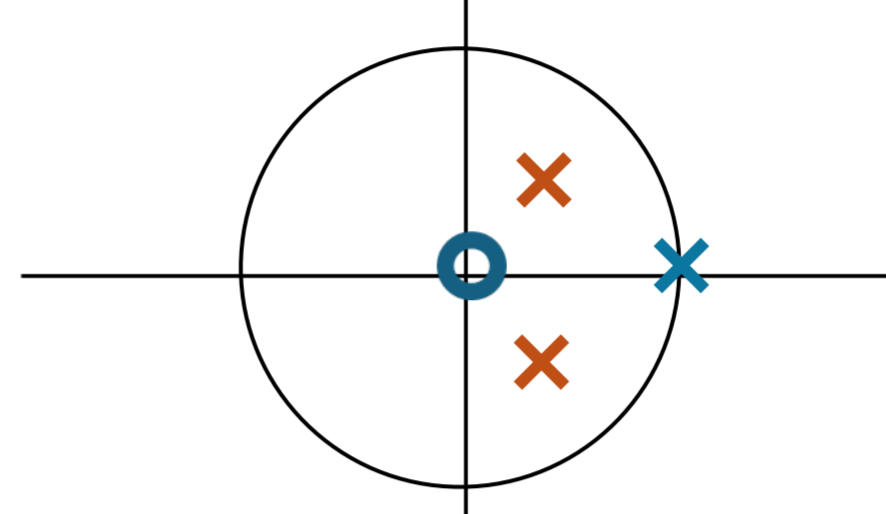
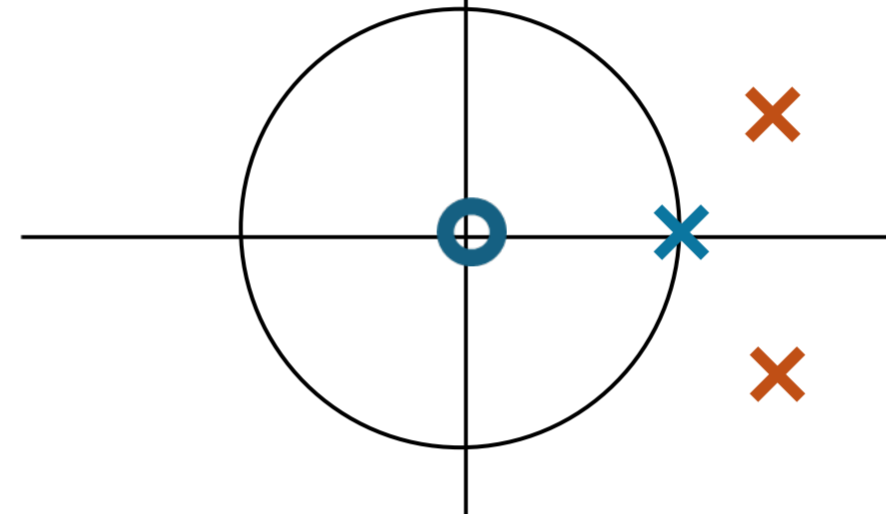
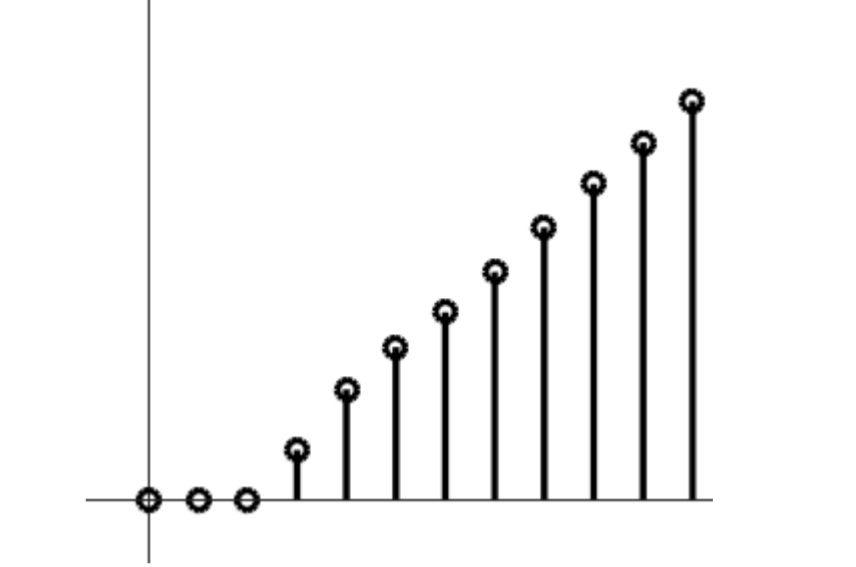
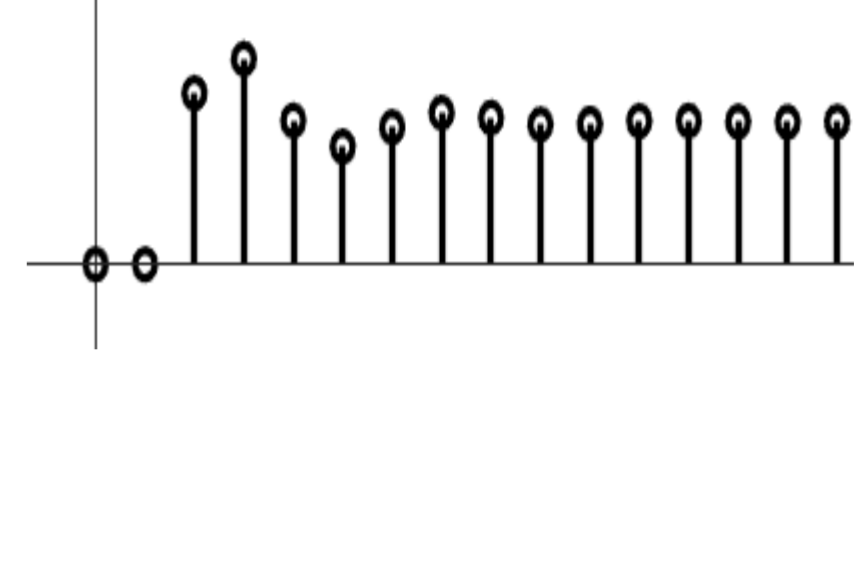
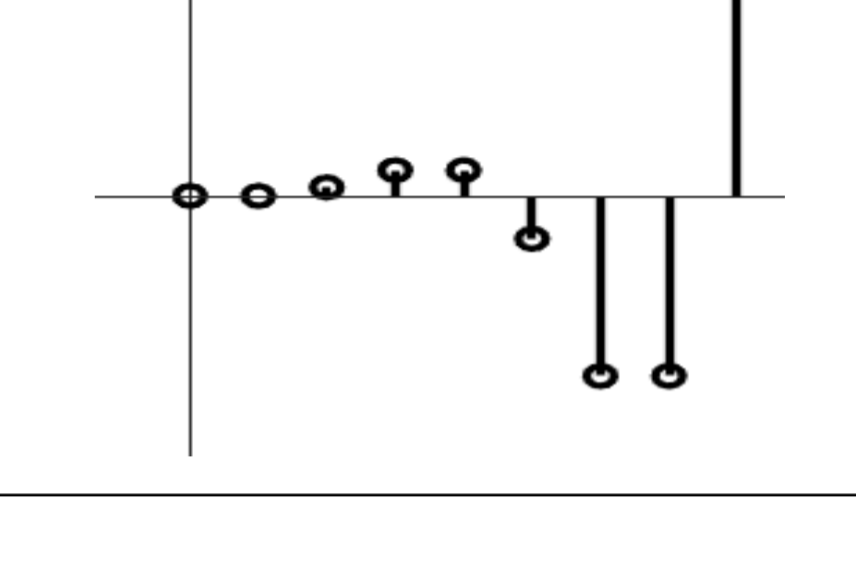
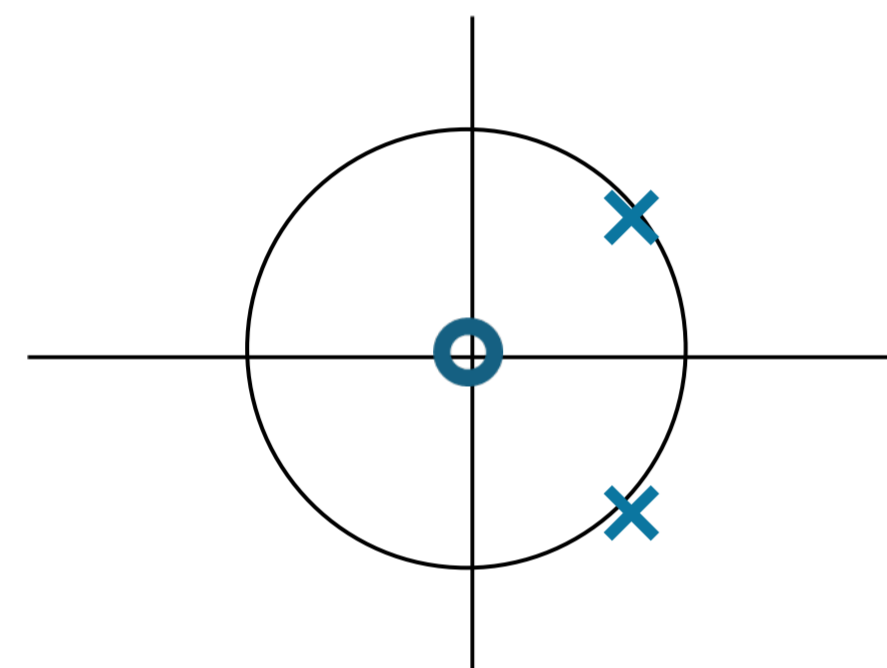
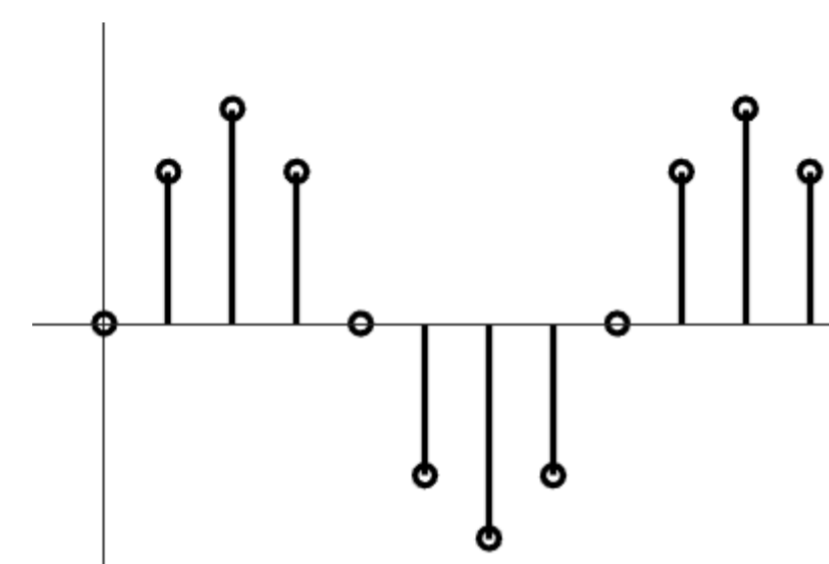
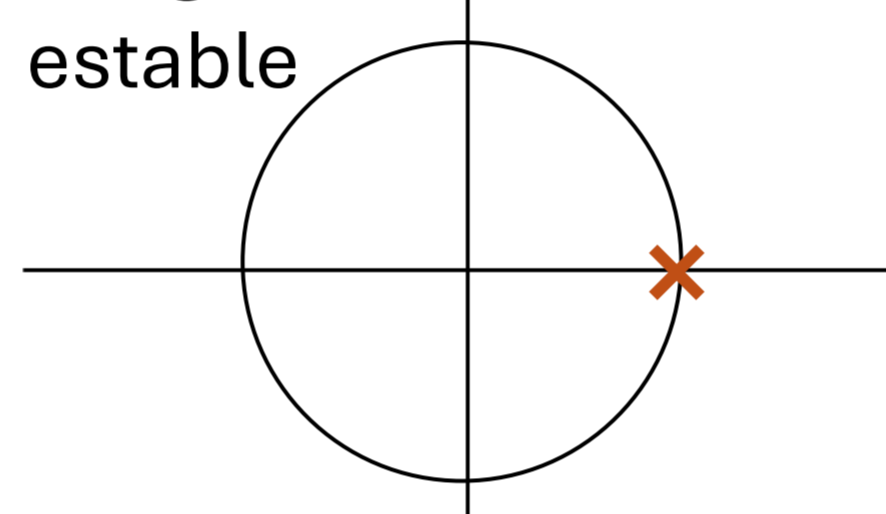
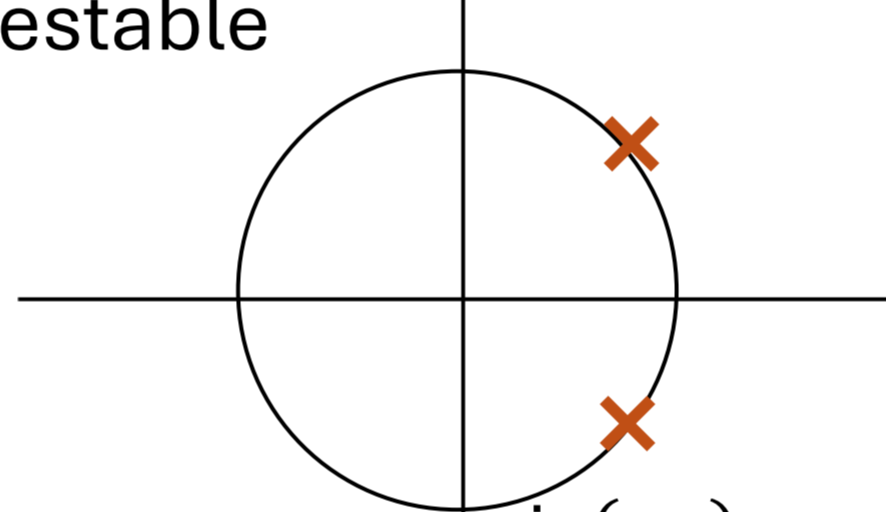
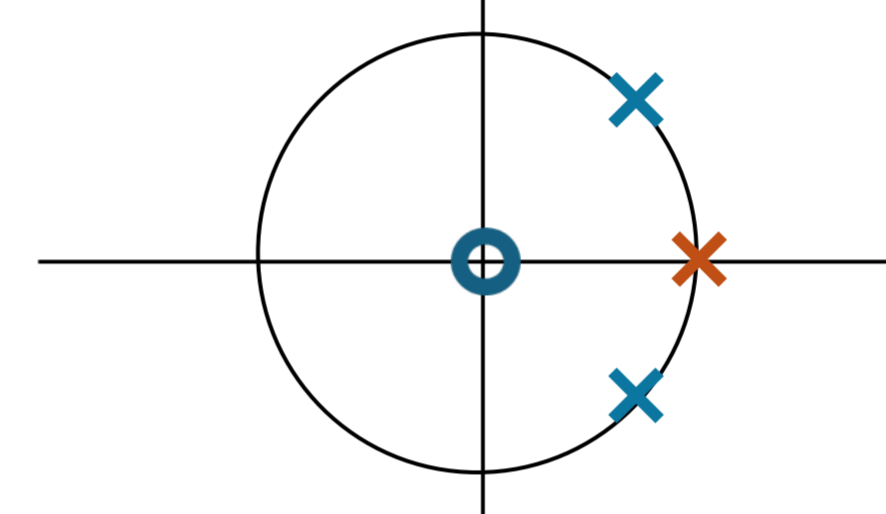
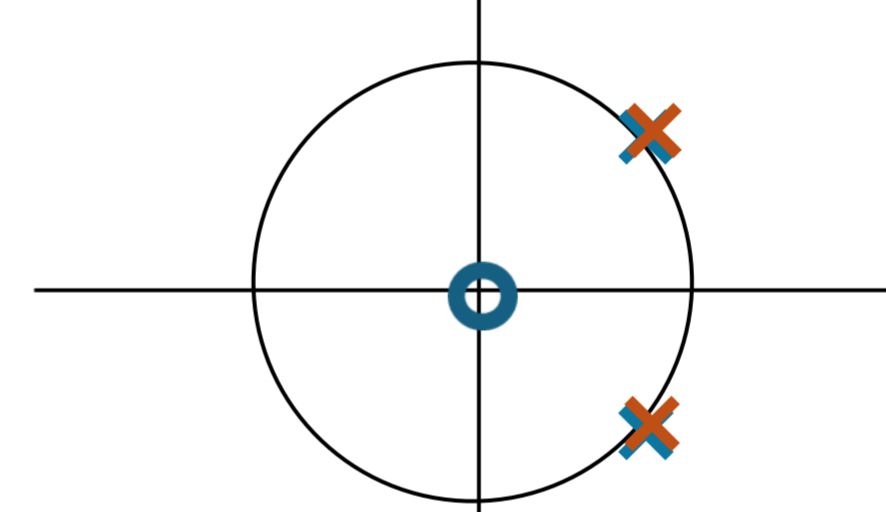
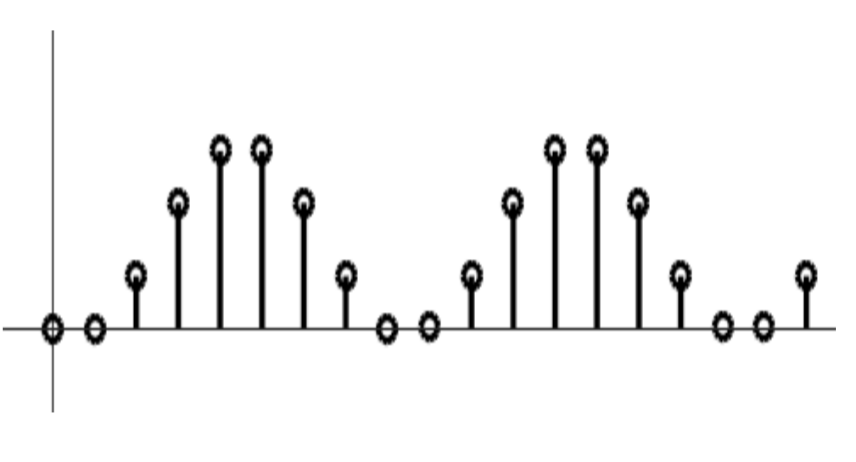
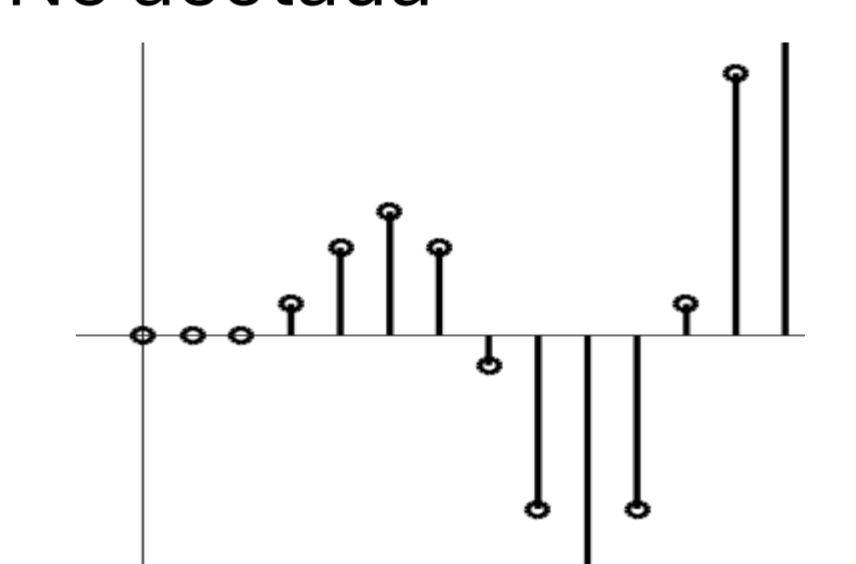
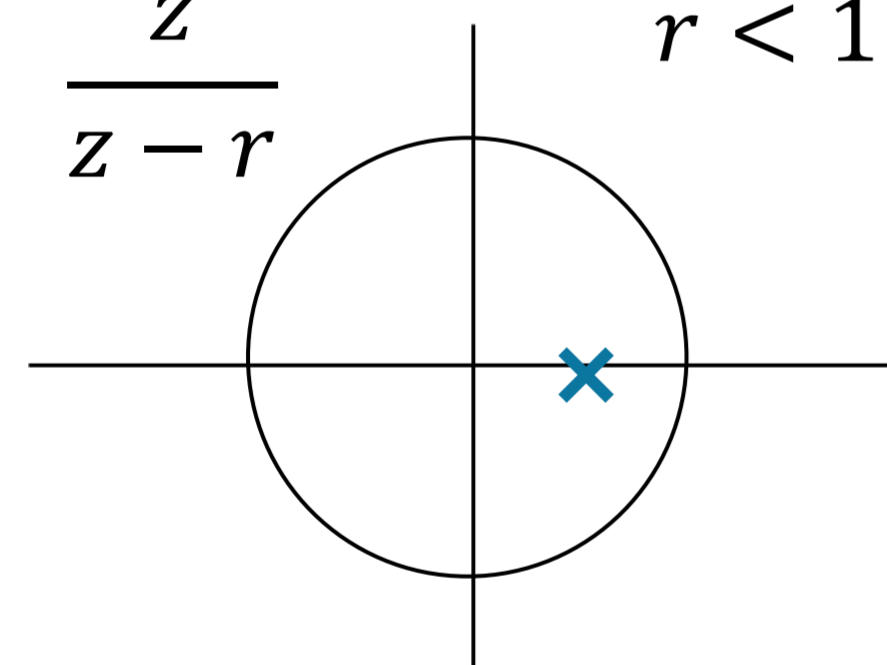
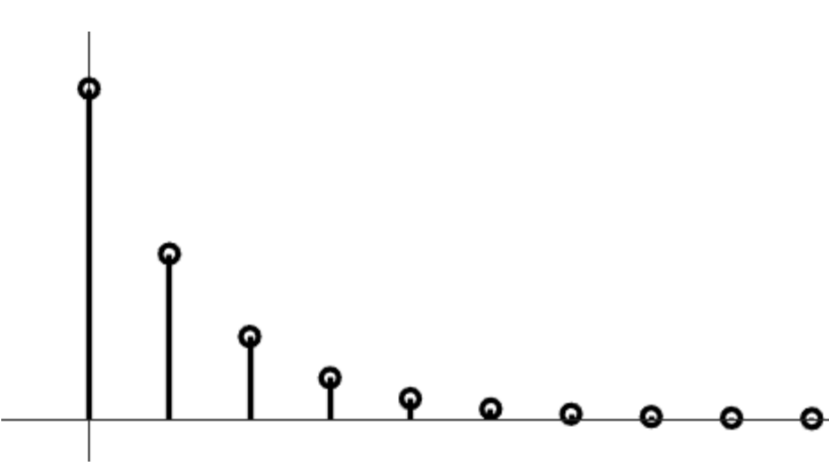
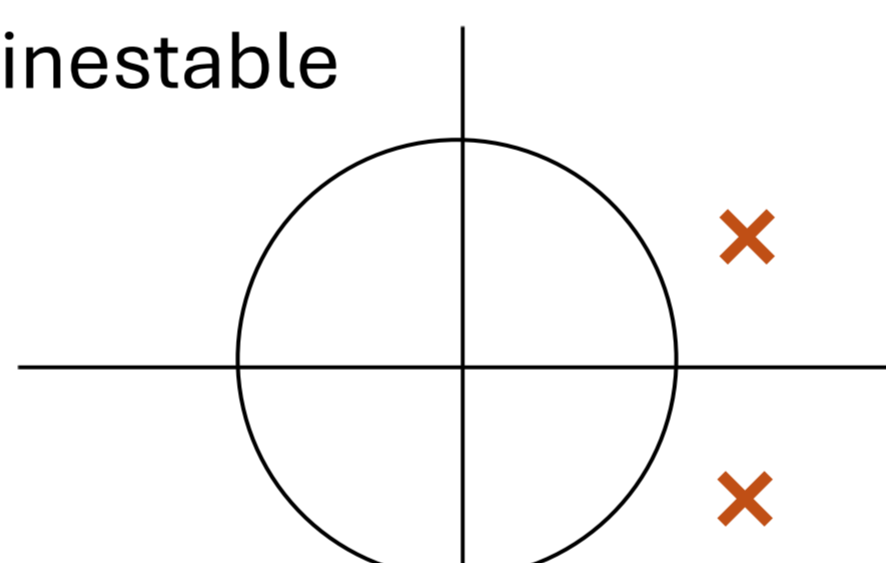
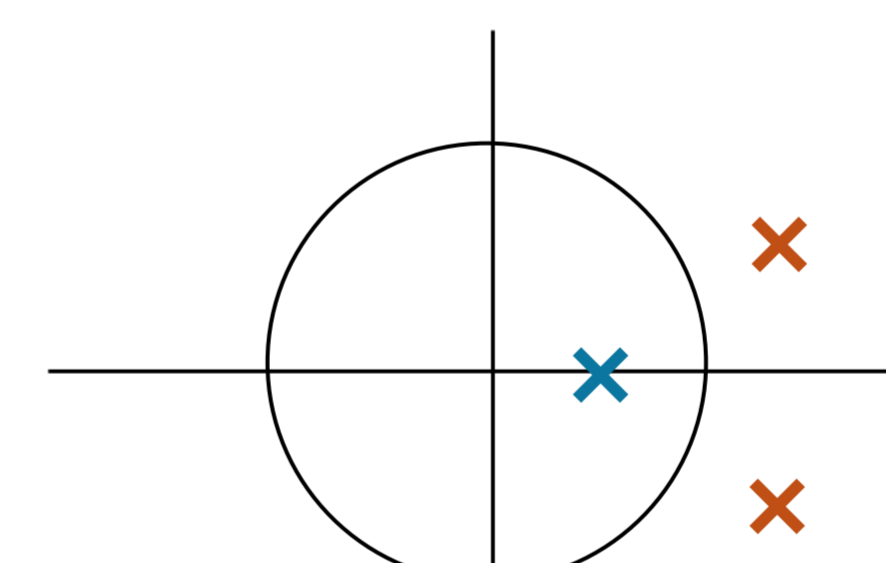
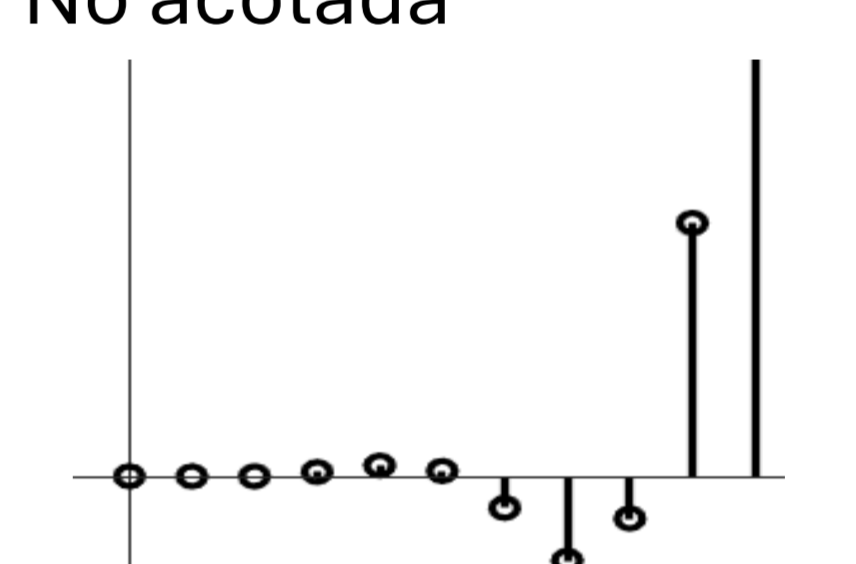
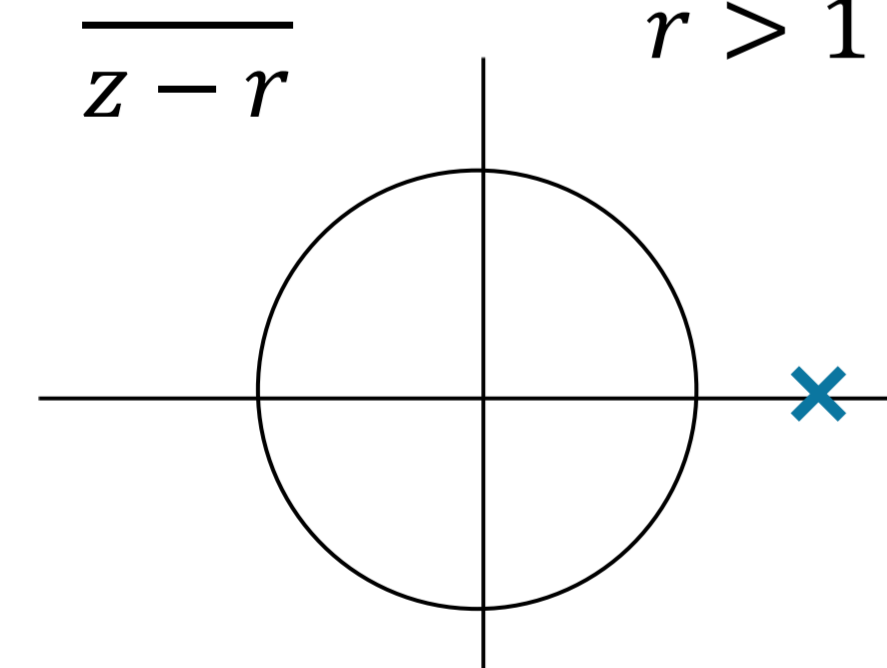
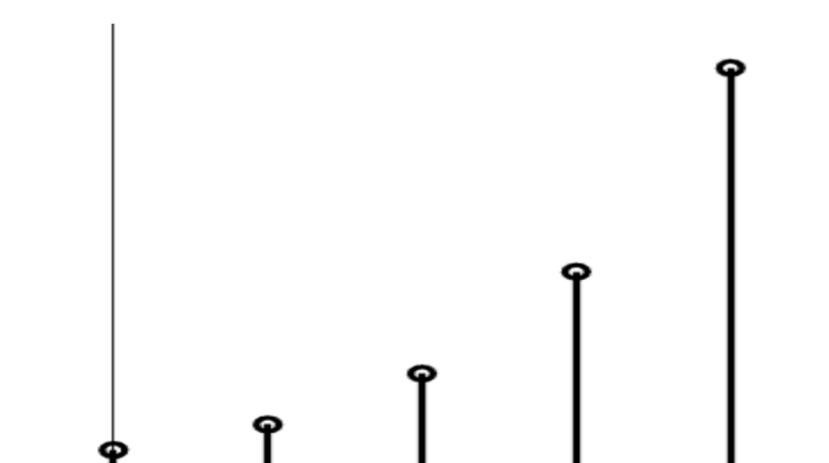
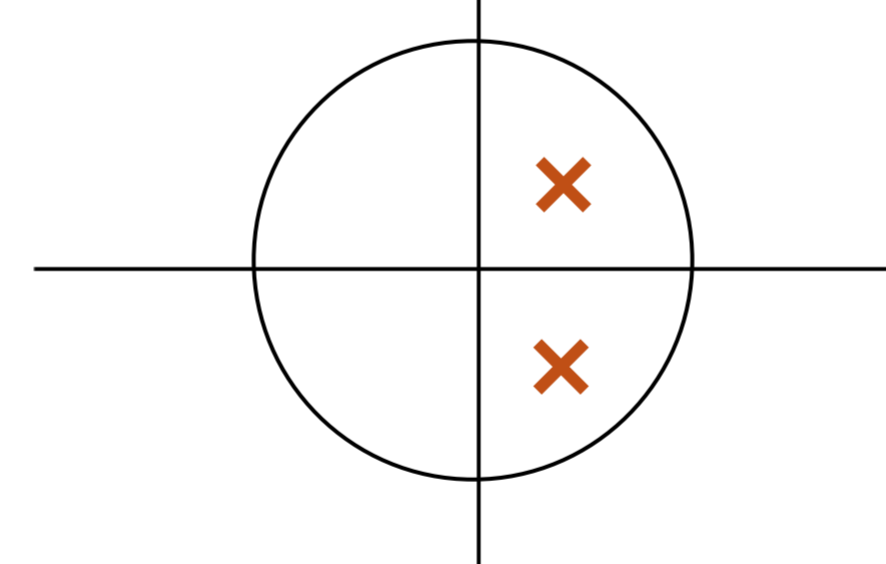
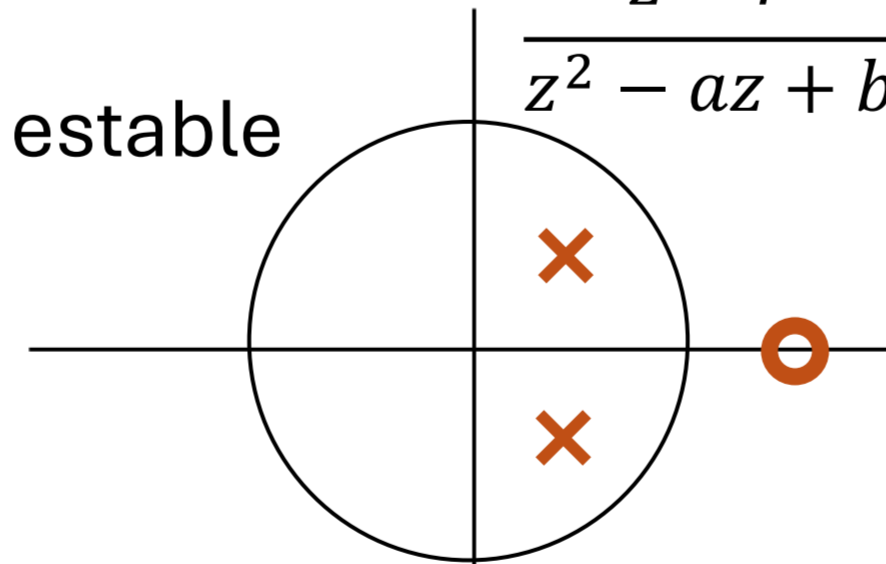
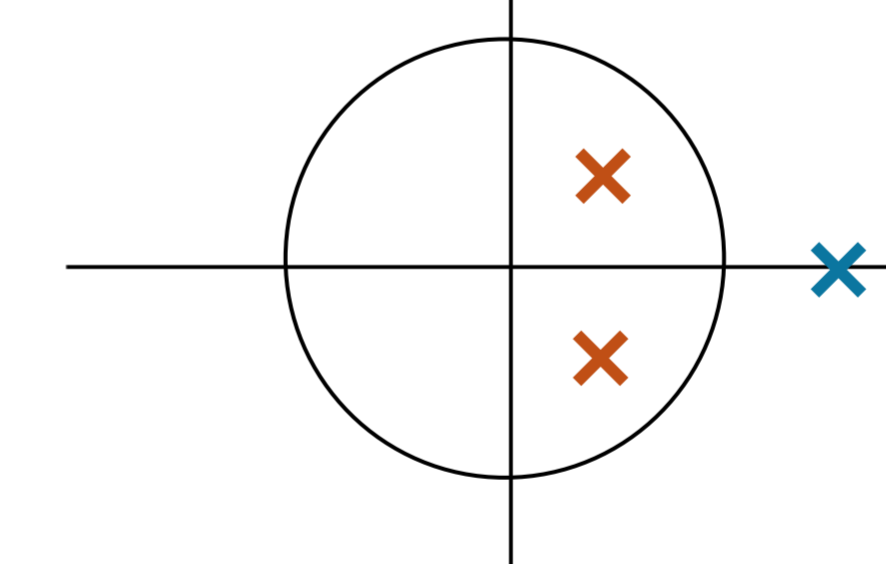
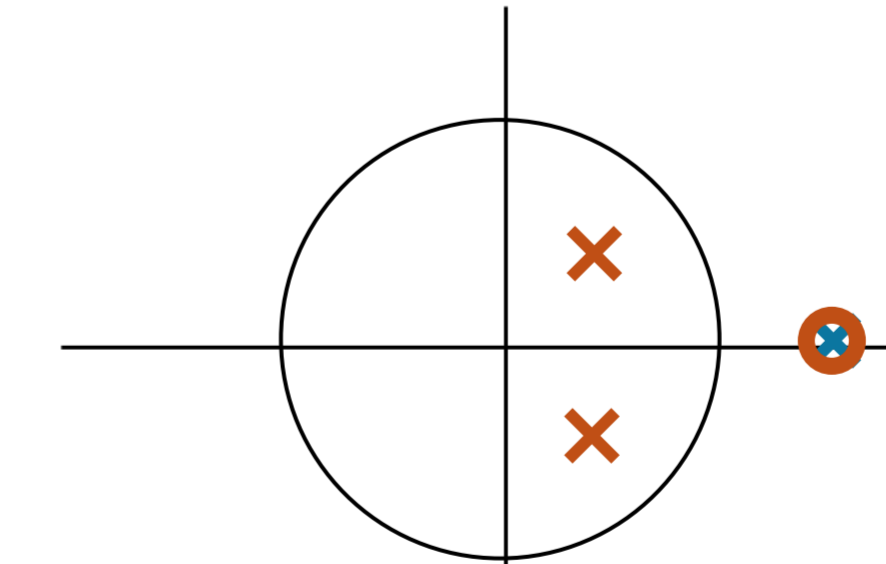
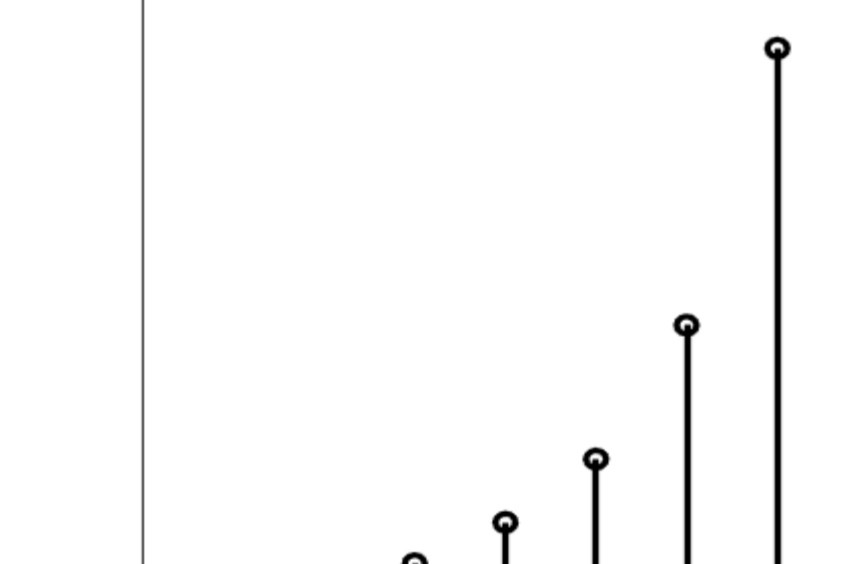
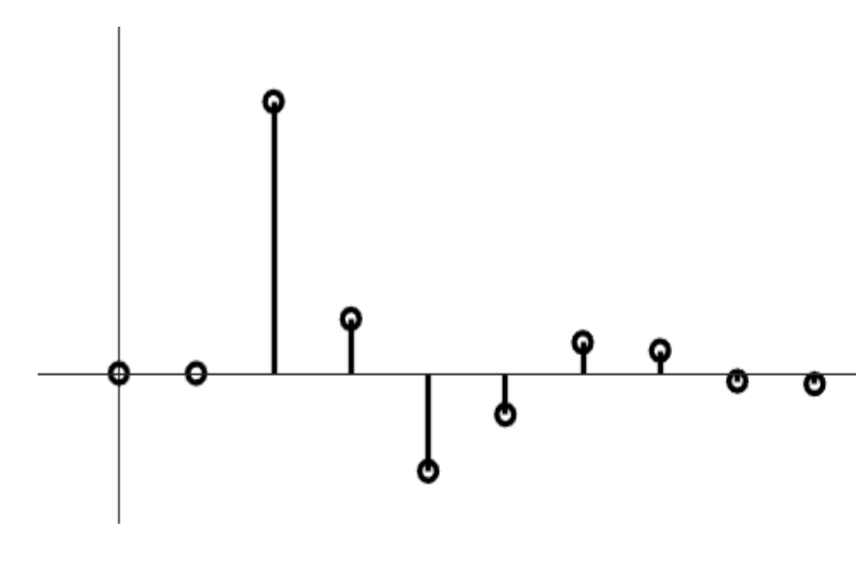
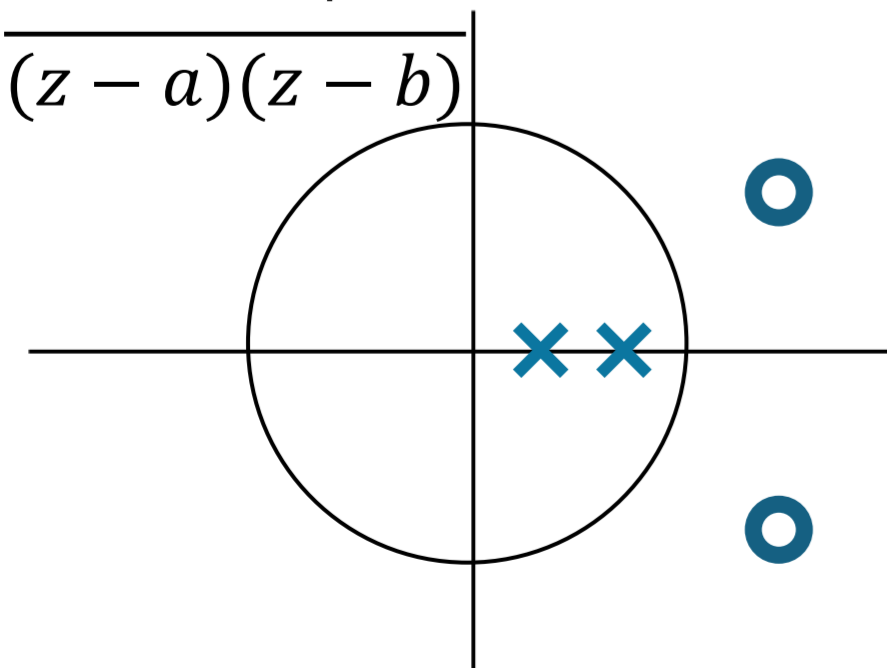
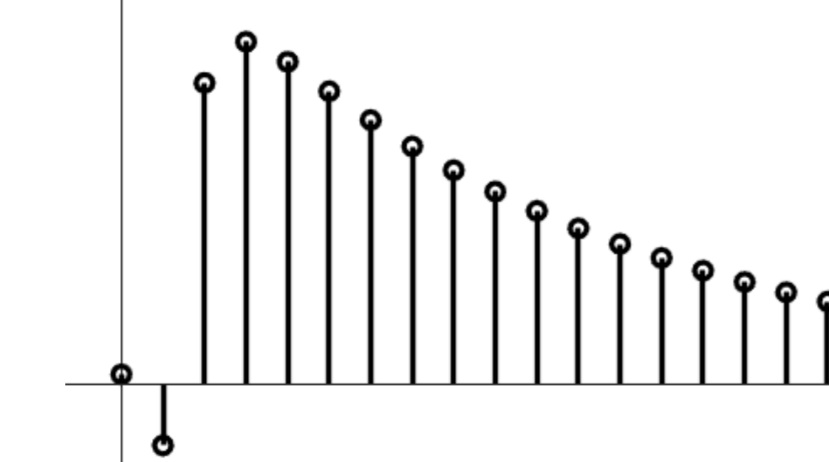
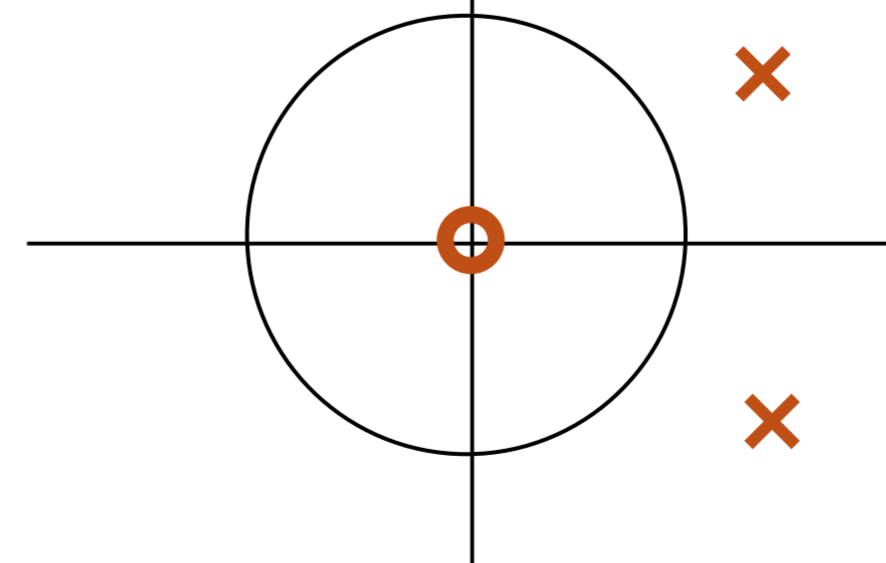
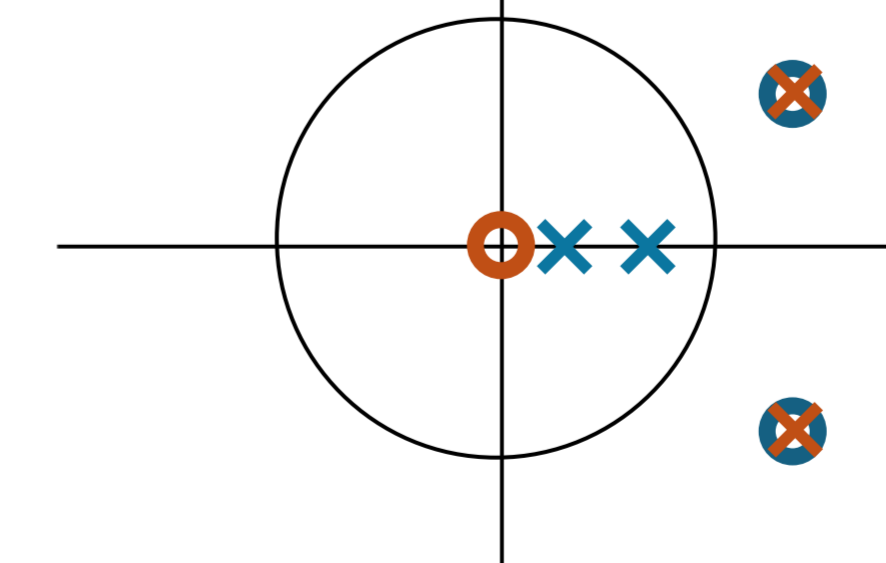
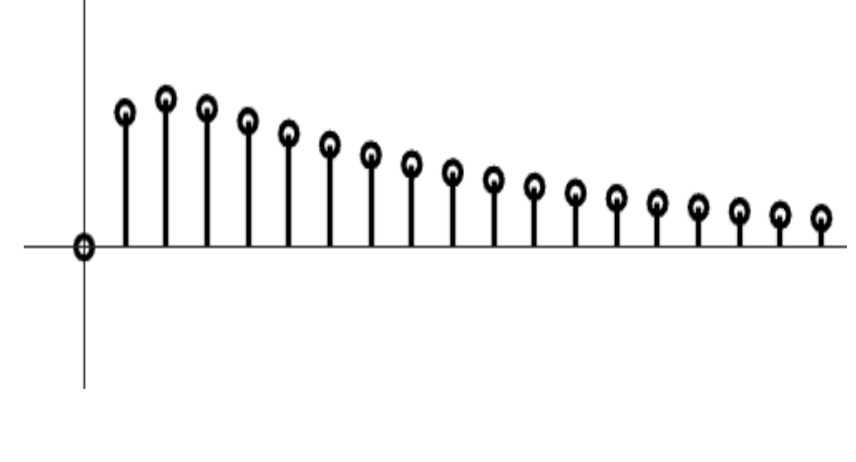
Tipo de polos de X(z)	La transformada Z inversa de X(z) es x(n)	Comportamiento de x(n)		
Simple (z = r)	$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{bz}{z-r}\right) = b(r)^n$	Exponencial	Si r < 1 → tiende a cero	1
			Si r = 1 → se mantiene constante	2
			Si r > 1 → tiende a alejarse de cero	3
Doble	$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{bz}{(z-r)^2}\right) = \frac{b \cdot n \cdot (r)^n}{r}$	Exponencial por rampa .	Si r < 1 → tiende a cero (predomina la exponencial)	4
			Si r = 1 → tiende a alejarse de cero (predomina la rampa)	5
			Si r > 1 → tiende a alejarse de cero (predomina la exponencial)	6
Imaginarios conjugados (z = ±rj = re ^{±π/2j})	$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{zr}{z^2+r^2}\right) = r^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$	Exponencial por sinusoidal	Si r < 1 → oscilación cuya amplitud tiende a cero	7
			Si r = 1 → oscilación cuya amplitud se mantiene constante	8
			Si r > 1 → oscilación cuya amplitud tiende a crecer	9
Imaginarios conjugados dobles	$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{rz(r^2-z^2)}{(z^2+r^2)^2}\right) = r^n \cdot n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$	Exponencial por rampa por sinusoidal	Si r < 1 → oscilación cuya amplitud tiende a cero	10
			Si r = 1 → oscilación cuya amplitud tiende a crecer (predomina la rampa)	11
			Si r > 1 → oscilación cuya amplitud tiende a crecer	12
Complejos conjugados (z = re ^{±ω₀j})	$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{r \cdot z \cdot \sin(\omega_0)}{z^2 + 2r \cdot \cos(\omega_0)z + r^2}\right) = r^n \sin(\omega_0 n)$	Exponencial por sinusoidal	Si r < 1 → oscilación cuya amplitud tiende a cero	13
			Si r = 1 → oscilación cuya amplitud se mantiene constante	14
			Si r > 1 → oscilación cuya amplitud tiende a crecer	15
Complejos conjugados dobles	$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{r \cdot z \cdot \sin(\omega_0) \cdot (r^2 - z^2)}{(z^2 + 2r \cdot \cos(\omega_0)z + r^2)^2}\right) = r^n \cdot n \cdot \sin(\omega_0 n)$	Exponencial por rampa por sinusoidal	Si r < 1 → oscilación cuya amplitud tiende a cero	16
			Si r = 1 → oscilación cuya amplitud tiende a crecer (predomina la rampa)	17
			Si r > 1 → oscilación cuya amplitud tiende a crecer	18
Polos en el semiplano izquierdo (z = (-1) ⁿ re ^{±ω₀j})	Señal x(n) similar a los casos anteriores, pero con (-r) ⁿ	Alternancia de signo	Al comportamiento que tendría la señal si los polos estuviesen en el semiplano derecho hay que añadirle una aparente oscilación por la alternancia de signo	*



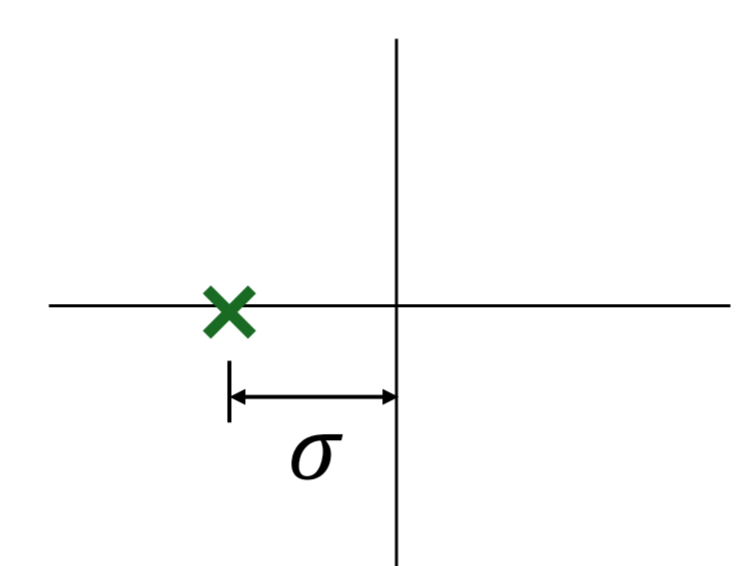
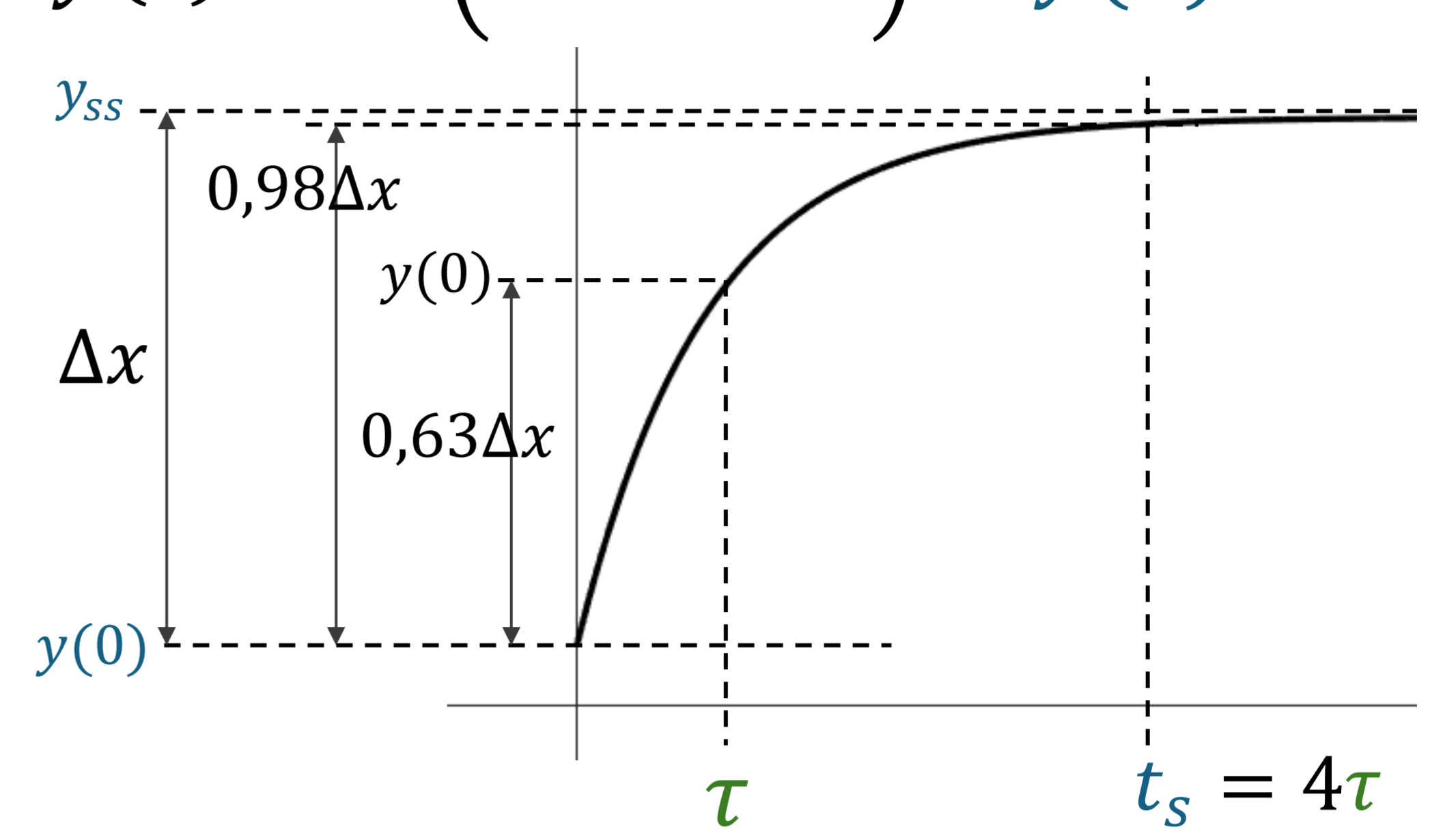
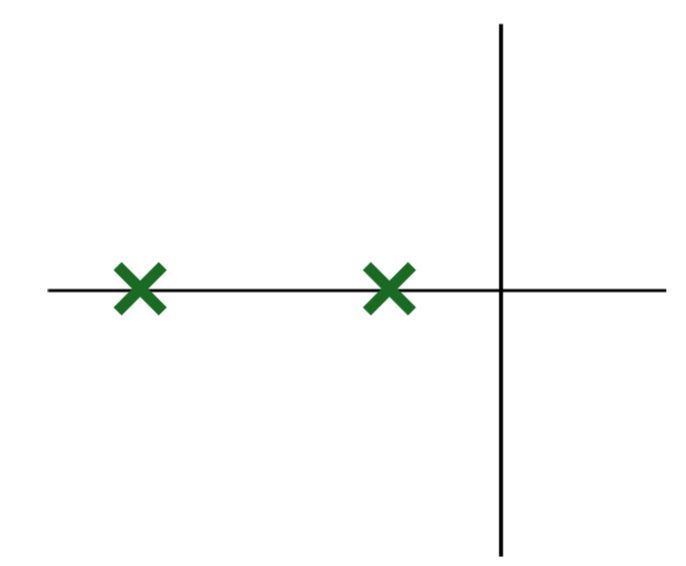
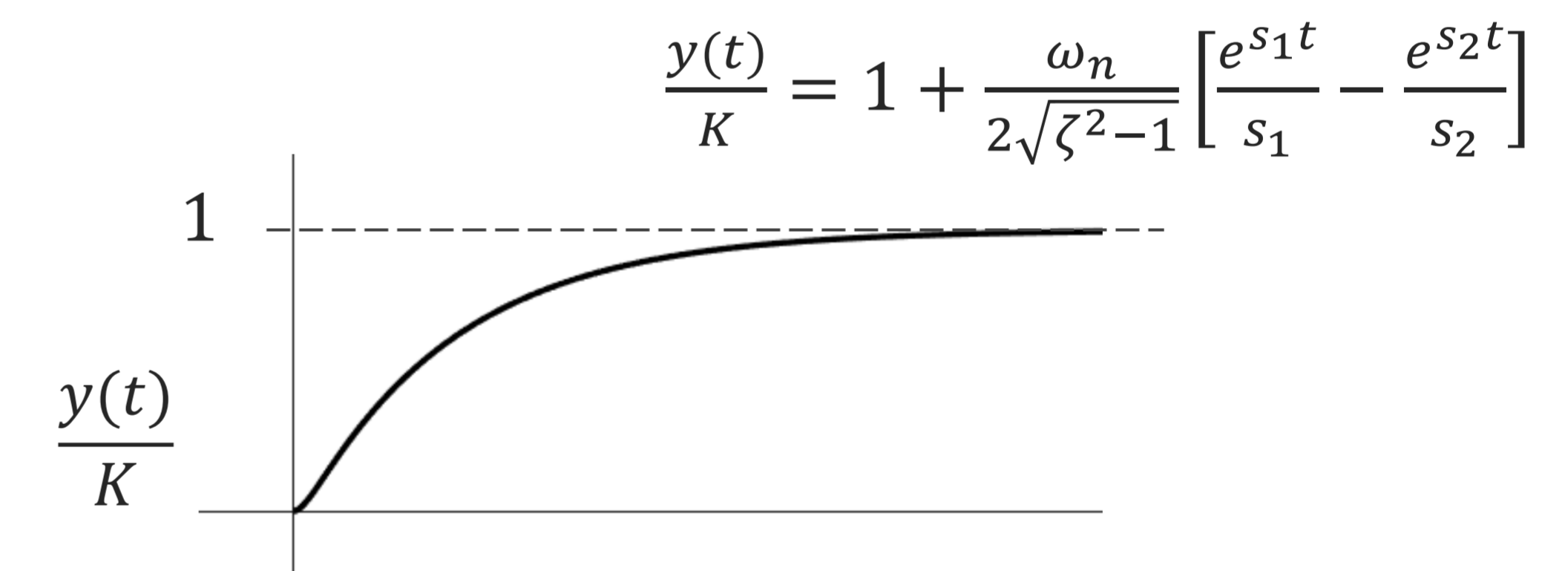
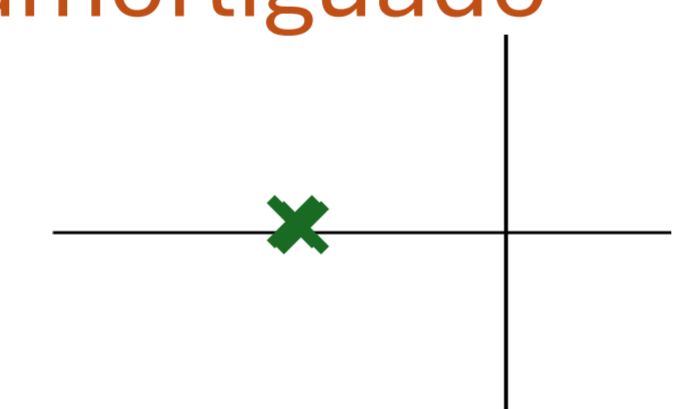
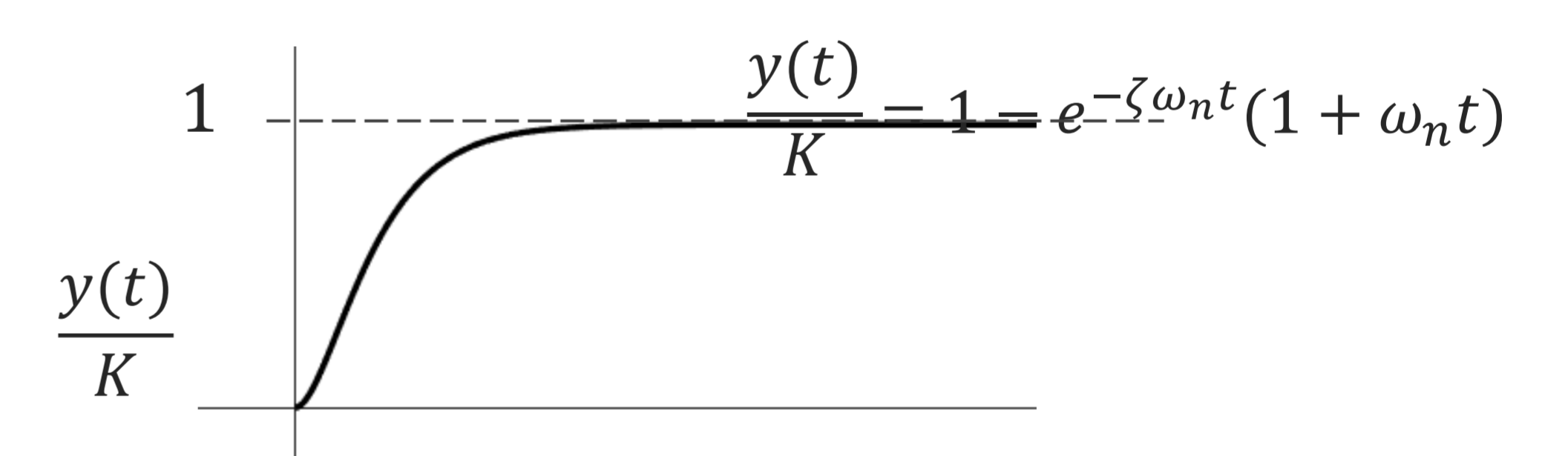
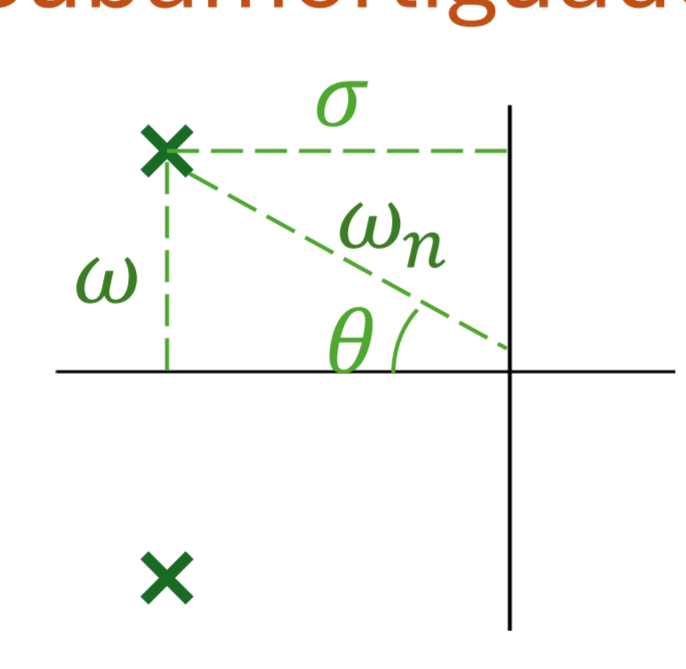
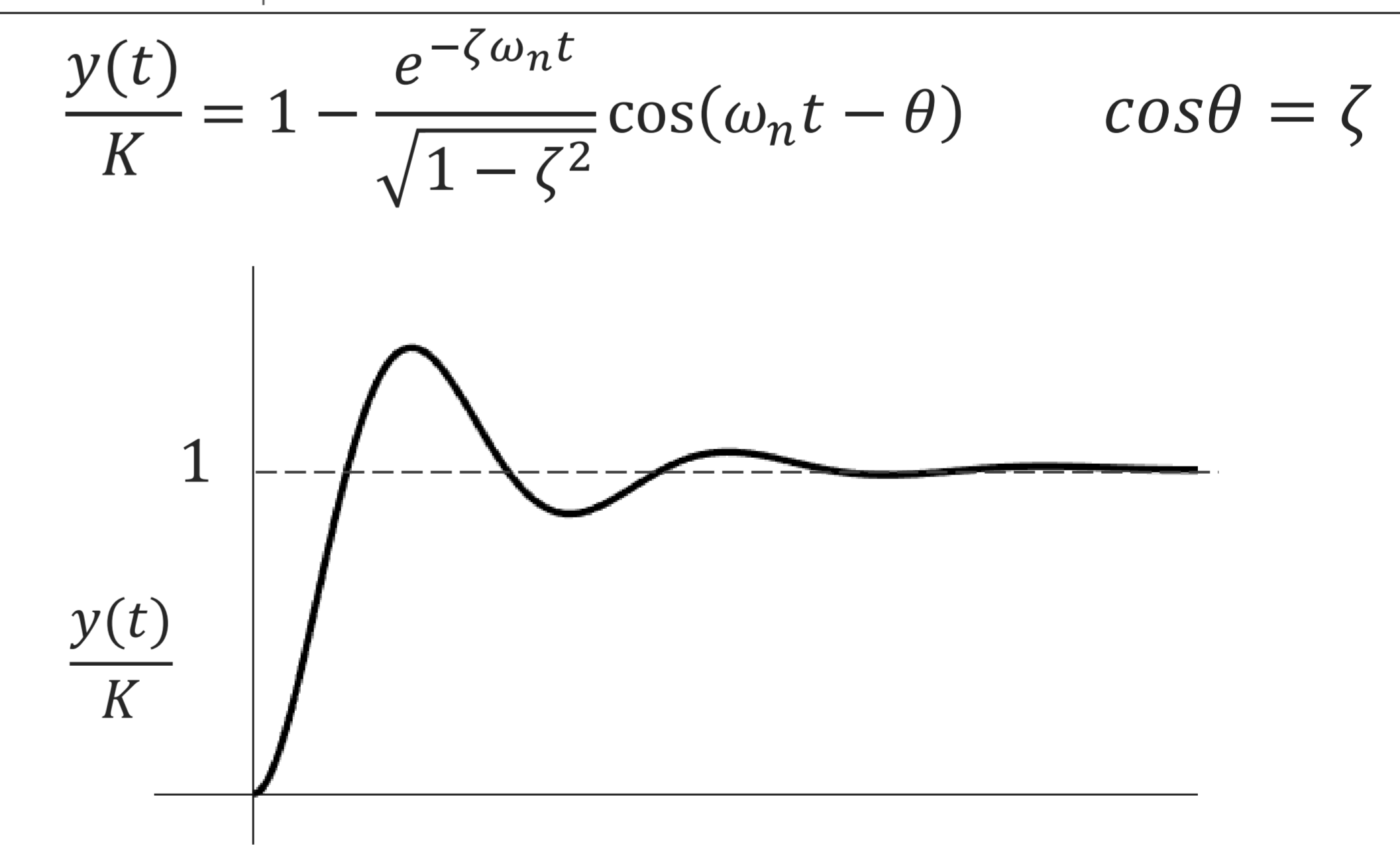
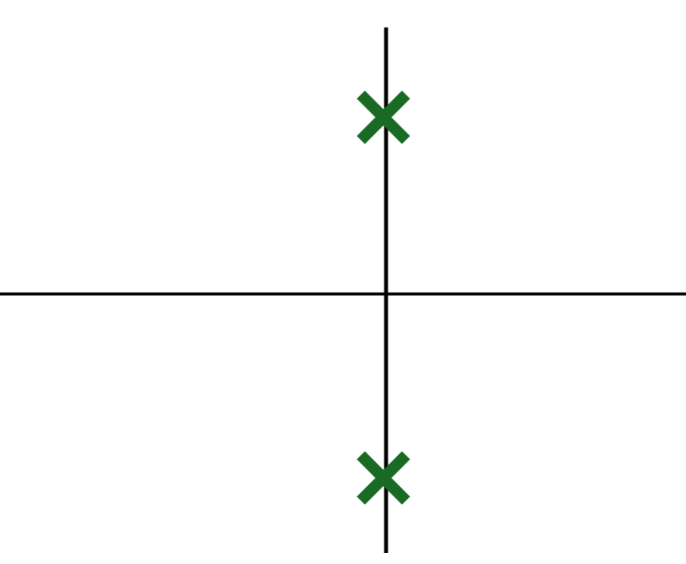
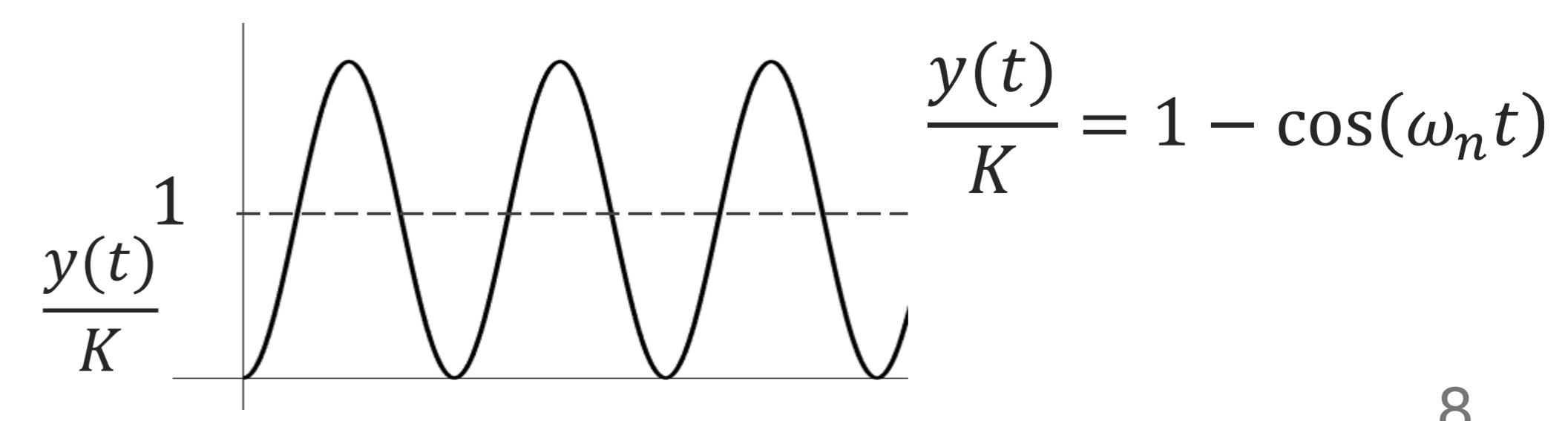
COMPORTAMIENTO DE LA SALIDA (ACOTADA O NO) DE UN SISTEMA CONTINUO EN FUNCIÓN DE LOS POLOS DE LA ENTRADA Y DEL SISTEMA (ESTABLE/INESTABLE/MARGINALMENTE ESTABLE)

Entrada		Sistema $G(s)$	Salida	
$X(s)$	$x(t)$		$Y(s)$	$y(t)$
$\frac{1}{s}$ 	 acotada	Marginalmente estable $\frac{1}{s(s+a)}$ 		No acotada 
		Marginalmente estable $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ 		acotada 
		estable $\frac{1}{(s+a)(s^2+bs+c)}$ 		acotada 
		inestable $\frac{1}{(s^2-as+b)}$ 		No acotada 
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ 	 acotada	Marginalmente estable $\frac{1}{s(s+a)}$ 		acotada 
		Marginalmente estable $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ 		No acotada 
$\frac{1}{s+a}$ 	 acotada	inestable $\frac{1}{(s^2-bs+c)}$ 		No acotada 
$\frac{1}{s-a}$ 	 No acotada	estable $\frac{1}{(s^2+bs+c)}$ 		No acotada 
		estable $\frac{s-a}{s^2+bs+c}$ 		acotada 
$\frac{s^2 - cs + d}{(s+a)(s+b)}$ 	 acotada	inestable $\frac{1}{s^2 - cs + d}$ 		acotada 

COMPORTAMIENTO DE LA SALIDA (ACOTADA O NO) DE UN SISTEMA DISCRETO EN FUNCIÓN DE LOS POLOS DE LA ENTRADA Y DEL SISTEMA (ESTABLE/INESTABLE/MARGINALMENTE ESTABLE)

Entrada		Sistema $G(z)$	Salida	
$X(z)$	$x(n)$		$Y(z)$	$y(n)$
$\frac{z}{z-1}$ 	 acotada	Marginalmente estable  estable  inestable 	  	No acotada  acotada  No acotada 
$\frac{z \cdot \sin(\omega_0)}{z^2 - 2 \cos(\omega_0) z + 1}$ 	 acotada	Marginalmente estable  Marginalmente estable  $\frac{z \cdot \sin(\omega_0)}{z^2 - 2 \cos(\omega_0) z + 1}$	 	acotada  No acotada 
$\frac{z}{z-r} \quad r < 1$ 	 acotada	inestable 		No acotada 
$\frac{z}{z-r} \quad r > 1$ 	 No acotada	estable  estable $\frac{z-r}{z^2 - az + b}$ 	 	No acotada  acotada 
$\frac{z^2 - cz + d}{(z-a)(z-b)}$ 	 acotada	inestable $\frac{z}{z^2 - cz + d}$ 		acotada 

ANÁLISIS TEMPORAL DE LA RESPUESTA AL ESCALÓN DE SISTEMAS CONTINUOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

Entrada $u(t)$	Sistema $G(s)$	Salida $y(t)$
$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$	$G(s)$	$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$
Escalón $U(s) = \frac{1}{s}$	Primer orden $G(s) = \frac{b}{s + \sigma} = \frac{K}{\tau s + 1}$ <div style="text-align: right; margin-right: 50px;"> K Modelo patrón </div> Parámetros: <ul style="list-style-type: none"> • τ, constante de tiempo, $\tau = \frac{1}{\sigma}$ • K, ganancia, $K = G(0) = \frac{b}{\sigma}$ Polo: $s = -\sigma = -\frac{1}{\tau}$ 	$y(t) = K \left(1 - e^{-t/\tau} \right) + y(0)e^{-t/\tau}$  Especificaciones: <ul style="list-style-type: none"> • y_{ss}, valor final, $y_{ss} = K$ • $y(0)$, valor inicial, condición inicial • t_s, tiempo de asentamiento
	Segundo orden $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ <div style="text-align: right; margin-right: 50px;"> $K\omega_n^2$ Modelo patrón </div> Parámetros: <ul style="list-style-type: none"> • ω_n, frecuencia natural • ζ, coeficiente de amortiguamiento • K, ganancia, $K = G(0)$ Polos: $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$	
	Sobreamortiguado $\zeta > 1$  Polos: $s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ $s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$	$\frac{y(t)}{K} = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right]$ 
	Críticamente amortiguado $\zeta = 1$  Polos: $s = -\omega_n$	$\frac{y(t)}{K} = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} (1 + \omega_n t)$ 
	Subamortiguado $0 < \zeta < 1$  Polos: $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ $s = -\sigma \pm j\omega$ Parámetros extra: <ul style="list-style-type: none"> • ω, frecuencia amortiguada • σ, margen de estabilidad • θ, ángulo relacionado con el coeficiente de amortiguación 	$\frac{y(t)}{K} = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_n t - \theta) \quad \cos\theta = \zeta$  Especificaciones: <ul style="list-style-type: none"> • tiempo de asentamiento, $t_{s1\%} = \frac{5}{\sigma}$, $t_{s2\%} = \frac{4}{\sigma}$, $t_{s5\%} = \frac{3}{\sigma}$ • sobreelongación, $M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\pi/\text{tg}\theta}$ • tiempo de pico, $t_p = \frac{\pi}{\omega}$ • tiempo de subida, $t_{r(10-90)} = \frac{1+1,1\zeta+1,4\zeta^2}{\omega_n}$
No amortiguado $\zeta = 0$ Críticamente estable  Polos: $s = \pm j\omega_n = \pm j\omega$	$\frac{y(t)}{K} = 1 - \cos(\omega_n t)$ 	

FORMULACIÓN de la serie y transformada de Fourier para **señales CONTINUAS**

	SERIE DE FOURIER	TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO CONTINUO
	Variable independiente: TIEMPO	Variable independiente: FRECUENCIA
	Ecuación de SÍNTESIS <i>Otra forma de definir la señal en el tiempo, como un sumatorio de exponenciales complejas (forma exponencial) o un sumatorio de senos y cosenos (forma trigonométrica)</i>	Ecuación de SÍNTESIS <i>Antitransformada de Fourier</i> $X(j\omega) \rightarrow x(t)$
	Ecuación de ANÁLISIS <i>Valor de coeficientes c_k</i>	Ecuación de ANÁLISIS <i>Transformada de Fourier</i> $x(t) \rightarrow X(j\omega)$
Representación: secuencia discreta de valores de c_k	Representación: función continua (ω)	
Señales complejas y reales (t)	Forma exponencial	
	<ul style="list-style-type: none"> Ecuación de SÍNTESIS $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$ con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ Ecuación de ANÁLISIS $c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j\omega_0 kt} dt$ 	<ul style="list-style-type: none"> Ecuación de SÍNTESIS $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ Ecuación de ANÁLISIS $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
Sólo señales reales (t)	Forma trigonométrica	
	<ul style="list-style-type: none"> Ecuación de SÍNTESIS $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k \sin(\omega_0 kt))$ con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ Ecuación de ANÁLISIS $a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(\omega_0 kt) dt$ $b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(\omega_0 kt) dt$ 	<ul style="list-style-type: none"> Ecuación de ANÁLISIS $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$

APLICACIÓN de la serie y transformada de Fourier para **señales CONTINUAS**

	SERIE DE FOURIER	TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO CONTINUO
	Variable independiente: TIEMPO	Variable independiente: FRECUENCIA
Señales periódicas (t) $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	MÉTODOS: <ul style="list-style-type: none"> Por equivalencia/comparación con la ecuación de síntesis. Por cálculo de la ecuación de análisis 	MÉTODOS: <ul style="list-style-type: none"> A partir de la Serie de Fourier: tren de impulsos (ω) desplazados $k\omega_0$ y de amplitud $2\pi c_k$ Tablas y propiedades.
Señales no periódicas (t)	<i>No hay ω_0, y por tanto tampoco c_k.</i> <i>No hay desarrollo en serie de Fourier (ni exponencial, ni trigonométrica)</i>	MÉTODOS: <ul style="list-style-type: none"> Tablas y propiedades. Calculo de la ecuación de análisis. Comando fourier (Matlab) A partir de la Transformada de Laplace, sólo si la señal es causal (t)

FORMULACIÓN de la serie y transformada de Fourier para **señales DISCRETAS**

	SERIE DE FOURIER	TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO
	Variable independiente: TIEMPO	Variable independiente: FRECUENCIA
	Ecuación de SÍNTESIS <i>Otra forma de definir la señal en el tiempo, como un sumatorio de exponenciales complejas (forma exponencial) o un sumatorio de senos y cosenos (forma trigonométrica)</i>	Ecuación de SÍNTESIS <i>Antitransformada de Fourier</i> $X(e^{j\omega}) \rightarrow x(n)$
	Ecuación de ANÁLISIS <i>Valor de coeficientes c_k</i>	Ecuación de ANÁLISIS <i>Transformada de Fourier</i> $x(n) \rightarrow X(e^{j\omega})$
	Representación: secuencia discreta y PERIÓDICA de valores de c_k	Representación: función continua (ω) y PERIÓDICA
Señales complejas y reales (n)	Forma exponencial	
	<ul style="list-style-type: none"> Ecuación de SÍNTESIS $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\omega_0 kn}$ con $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ Ecuación de ANÁLISIS $c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega_0 kn}$ 	<ul style="list-style-type: none"> Ecuación de SÍNTESIS $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ Ecuación de ANÁLISIS $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$
Sólo señales reales (n)	Forma trigonométrica	
	<ul style="list-style-type: none"> Ecuación de SÍNTESIS N es impar, $L = \frac{N-1}{2}$: $x(n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^L (a_k \cos(\omega_0 kn) + b_k \sin(\omega_0 kn))$ N es par, $L = \frac{N}{2}$: $x(n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{L-1} (a_k \cos(\omega_0 kn) + b_k \sin(\omega_0 kn)) + \frac{a_L}{2} \cos(\omega_0 Ln)$ Ecuación de ANÁLISIS $a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos(\omega_0 kn)$ $b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin(\omega_0 kn)$ 	<ul style="list-style-type: none"> Ecuación de ANÁLISIS $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cos(\omega n) - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \sin(\omega n)$

APLICACIÓN de la serie y transformada de Fourier para **señales DISCRETAS**

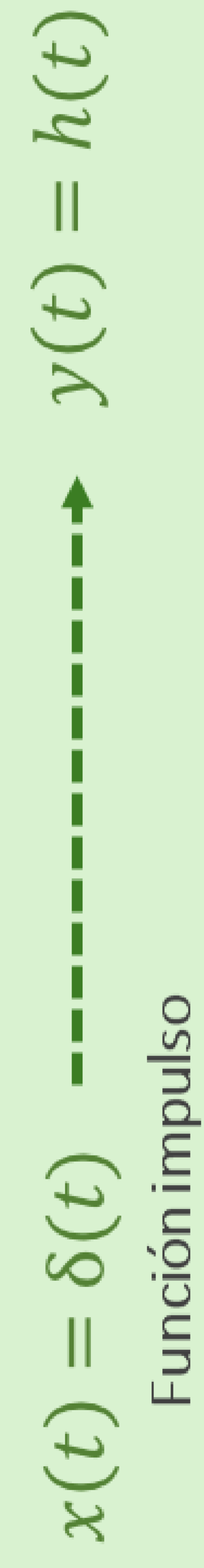
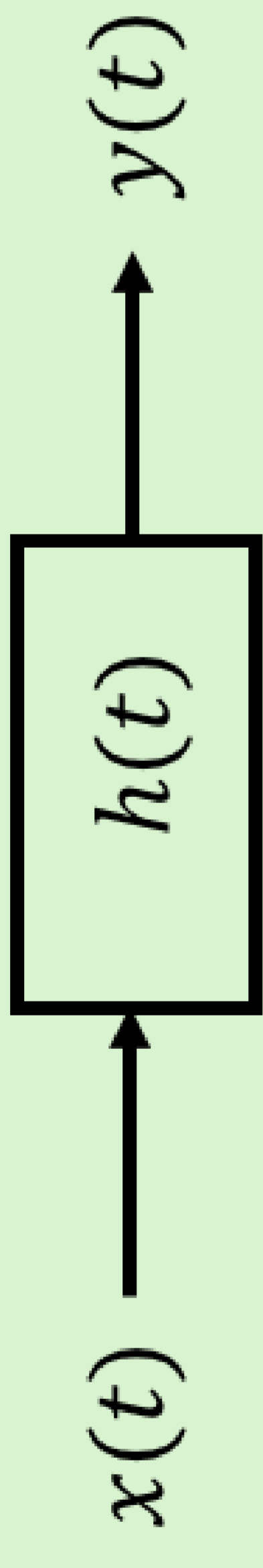
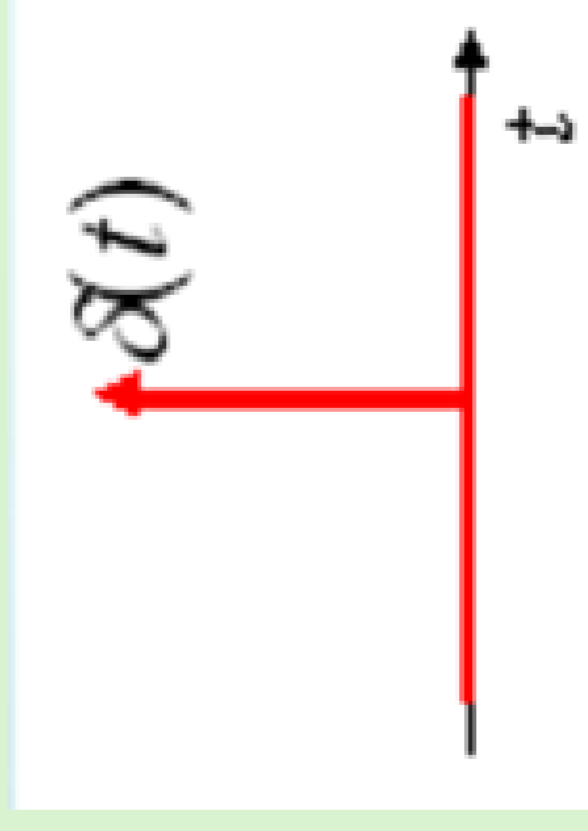
	SERIE DE FOURIER	TRANSFORMADA DE FOURIER EN TIEMPO CONTINUO
	Variable independiente: TIEMPO	Variable independiente: FRECUENCIA
Señales periódicas (n) $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	MÉTODOS: <ul style="list-style-type: none"> Por equivalencia/comparación con la ecuación de síntesis. Por cálculo de la ecuación de análisis 	MÉTODOS: <ul style="list-style-type: none"> A partir de la Serie de Fourier: tren de impulsos (ω) desplazados $k\omega_0$ y de amplitud $2\pi c_k$ Tablas y propiedades.
Señales no periódicas (n)	<i>No hay ω_0, y por tanto tampoco c_k.</i> <i>No hay desarrollo en serie de Fourier (ni exponencial, ni trigonométrica)</i>	MÉTODOS: <ul style="list-style-type: none"> Tablas y propiedades. Calculo de la ecuación de análisis. <li style="text-align: center;">NO funciona fourier A partir de la Transformada Z, sólo si la señal es causal (n)

Cálculo de la RESPUESTA PERMANENTE $y_{per}(t)$

Método	Consideraciones	Formulación para sistemas CONTINUOS	Formulación para sistemas DISCRETOS
TEOREMA DEL VALOR FINAL	Sólo da el valor al que tiende la señal en estado estacionario, y_{ss} , no la expresión analítica de $y_{per}(t)$	$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$	$y_{ss} = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)Y(z)$
CONVOLUCIÓN	No devuelve $y_{per}(t)$ directamente. Devuelve la respuesta total $y(t)$ con régimen transitorio y permanente. Hay que analizar qué elementos de $y(t)$ permanecen en $y_{per}(t)$	$y(t) = x(t) * g(t)$	$y(n) = x(n) * g(n)$
LAPLACE		$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\underbrace{\mathcal{L}(x(t))}_{X(s)} \cdot \underbrace{\mathcal{L}(g(t))}_{G(s)} \right)$	$y(n) = Z^{-1} \left(\underbrace{Z(x(n))}_{X(z)} \cdot \underbrace{Z(g(n))}_{G(z)} \right)$
FOURIER	Sólo aplicable a sistemas estrictamente estables (no marginalmente estables)		
<ul style="list-style-type: none"> Entrada genérica $x(t) / x(n)$ 	<p>fourier e ifourier NO funcionan en tiempo discreto</p> <p>fft NO calcula la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto sino la Transformada Discreta de Fourier</p>	$y_{per}(t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\underbrace{\mathcal{F}(x(t))}_{X(j\omega)} \cdot \underbrace{\mathcal{F}(g(t))}_{G(j\omega)} \right)$	$y_{per}(n) = \mathcal{F}^{-1} \left(\underbrace{\mathcal{F}(x(n))}_{X(e^{j\omega})} \cdot \underbrace{\mathcal{F}(g(n))}_{G(e^{j\omega})} \right)$
<ul style="list-style-type: none"> Entrada exponencial compleja $e^{j(\omega t + \phi)} / e^{j(\omega n + \phi)}$ 		$y_{per}(t) = G(j\omega) e^{j(\omega t + \phi + \arg(G(j\omega)))}$	$y_{per}(n) = G(e^{j\omega}) e^{j(\omega n + \phi + \arg(G(e^{j\omega})))}$
<ul style="list-style-type: none"> Entrada sinusoidal $\cos(\omega t + \phi) / \cos(\omega n + \phi)$ 		$y_{per}(t) = G(j\omega) \cos(\omega t + \phi + \arg(G(j\omega)))$	$y_{per}(n) = G(e^{j\omega}) \cos(\omega n + \phi + \arg(G(e^{j\omega})))$
<ul style="list-style-type: none"> Entrada periódica $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k t}$ $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{N-1} c_k e^{j\omega_0 k n}$ 		$y_{per}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k G(j\omega_0 k) e^{j(\omega_0 k t + \arg(G(j\omega_0 k)))}$	$y_{per}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k G(e^{j\omega_0 k}) e^{j(\omega_0 k n + \arg(G(e^{j\omega_0 k})))}$

CONCEPTOS BÁSICOS DEL ANÁLISIS TEMPORAL Y FRECUENCIAL DE SISTEMAS CONTINUOS

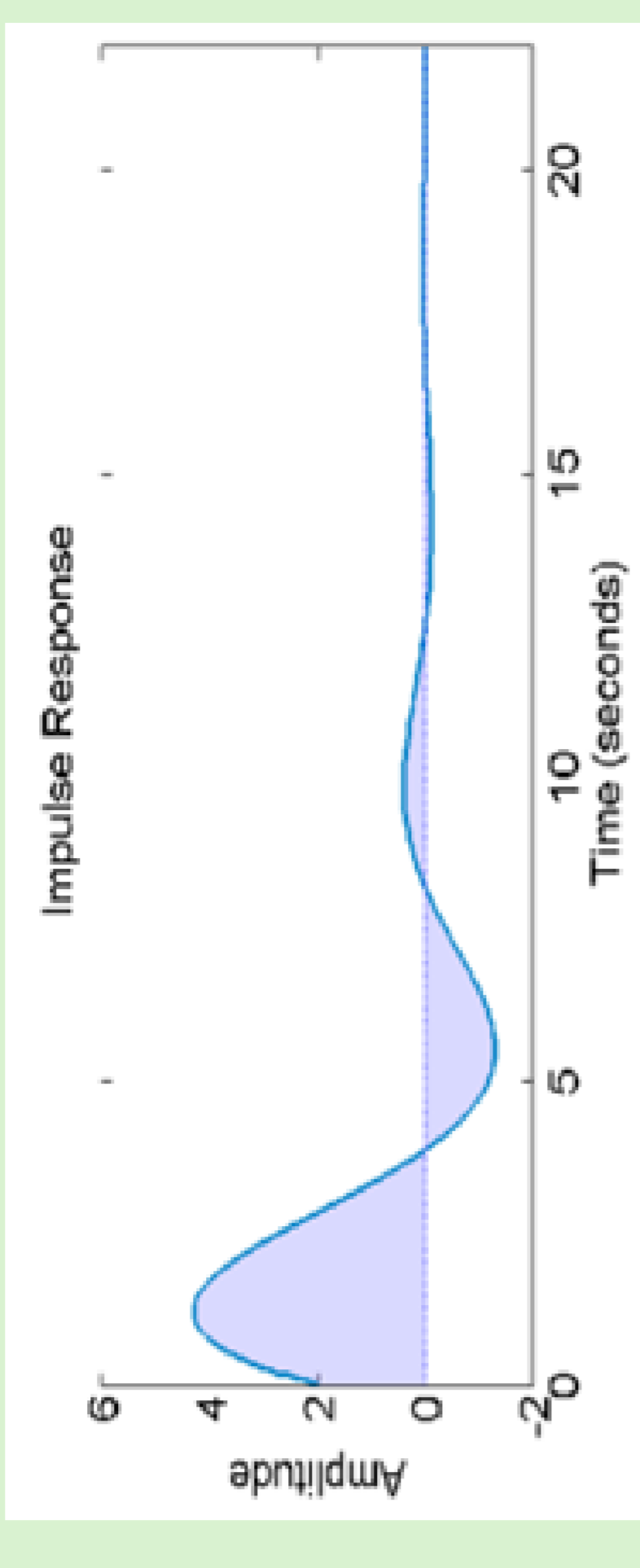
Dominio temporal



$h(t)$

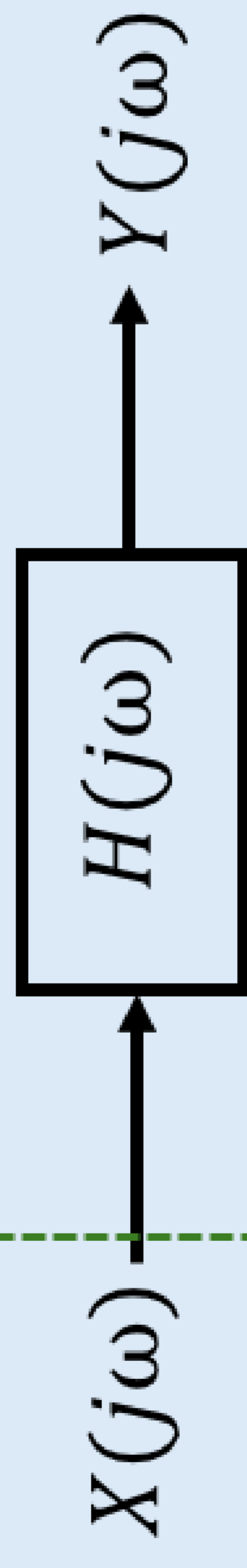
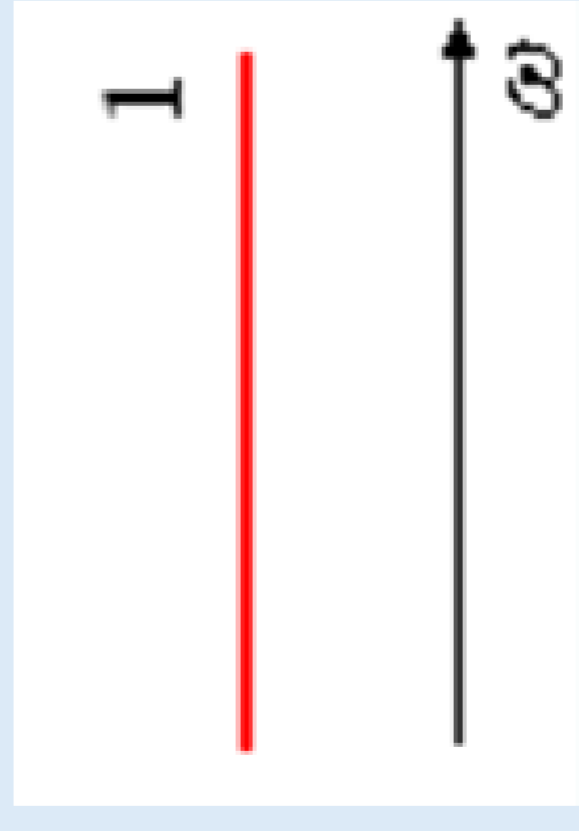
Respuesta al impulso
Función ponderatriz
Kernel de convolución

$$y(t) = h(t) * x(t)$$



Dominio de la frecuencia

- Transformada de Fourier:

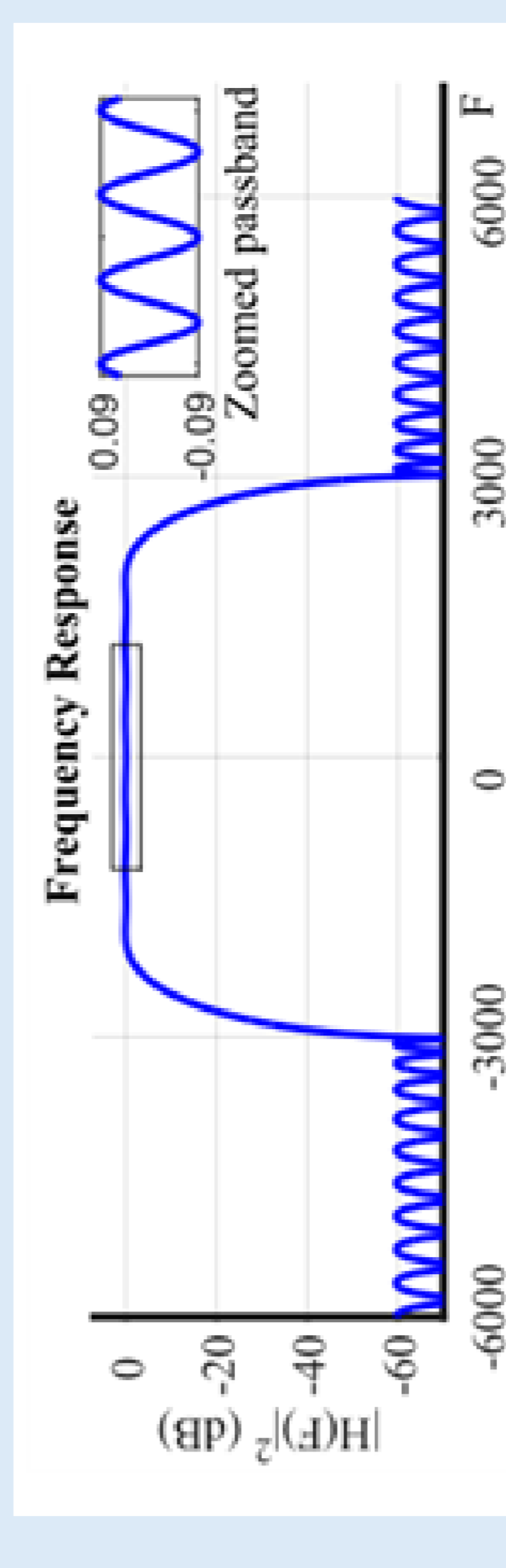


$$Y(j\omega) = H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = FT(h(t))$$

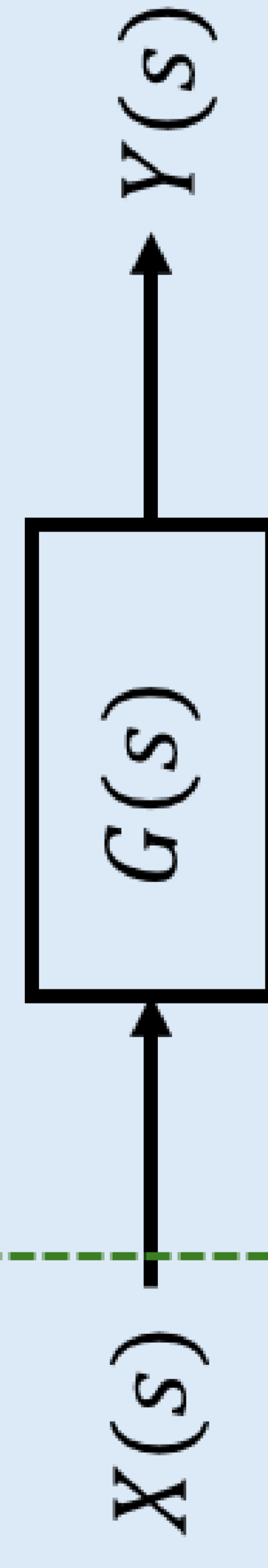
$H(j\omega)$

Respuesta en frecuencia



$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

- Transformada de Laplace:



$$G(s) = Y(s)$$

$G(s)$

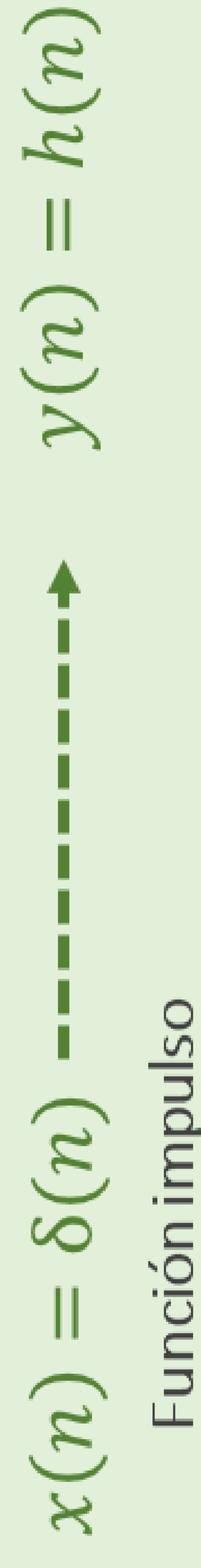
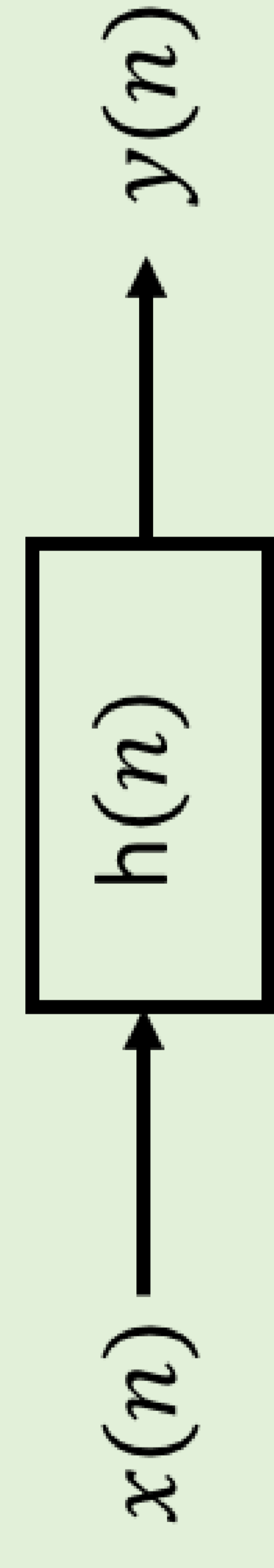
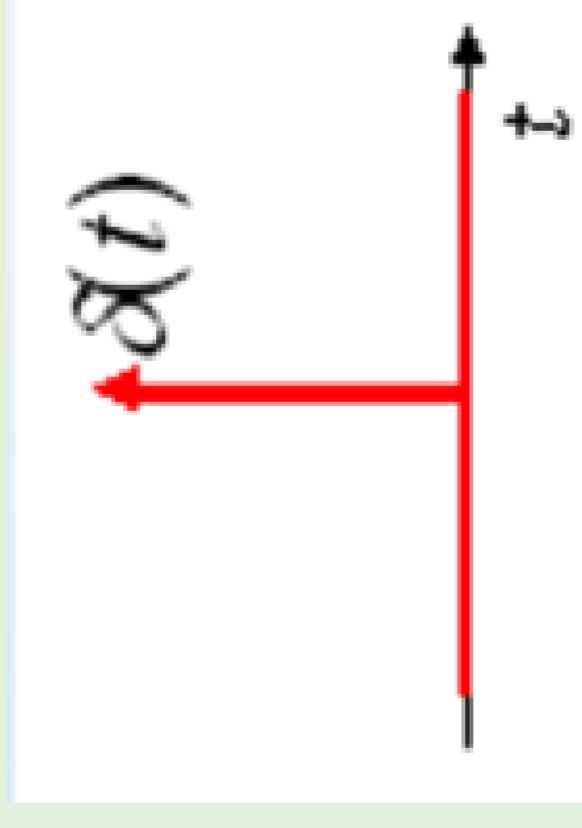
Función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$H(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$

CONCEPTOS BÁSICOS DEL ANÁLISIS TEMPORAL Y FRECUENCIAL DE SISTEMAS DISCRETOS

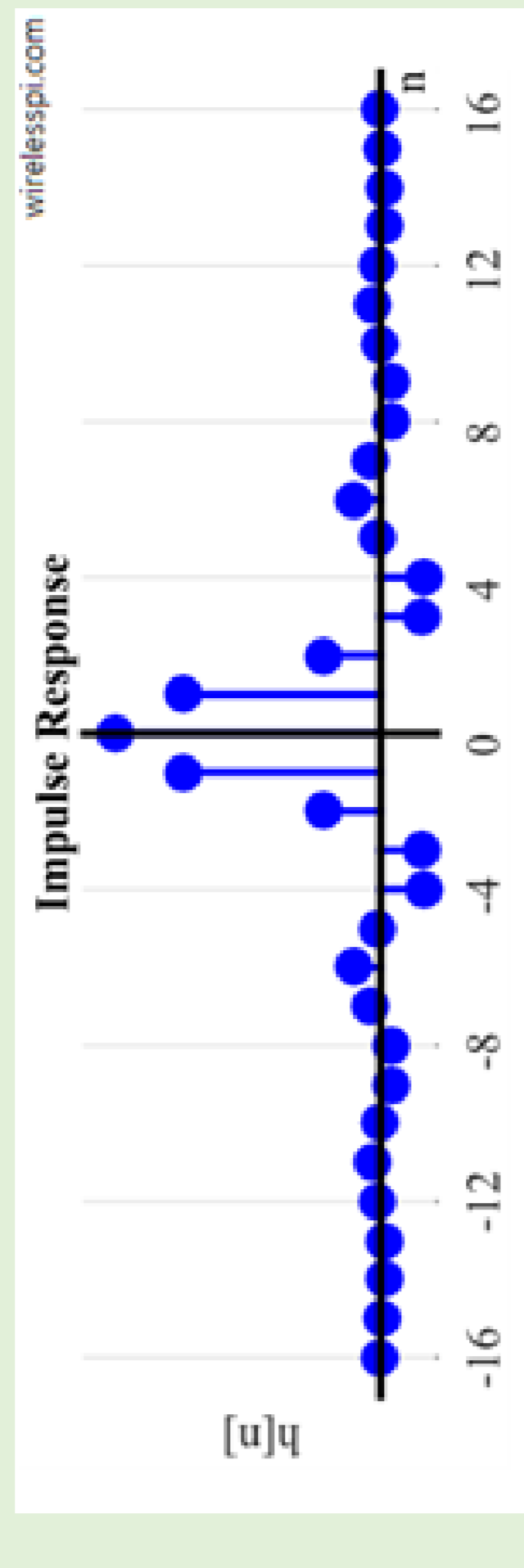
Dominio temporal



$$y(t) = h(t) * x(t)$$

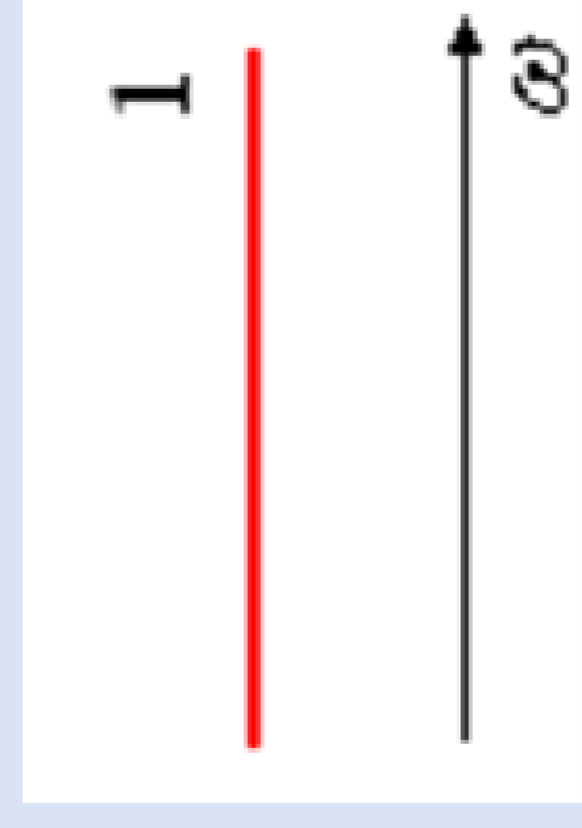
$h(n)$

Respuesta al impulso
Función ponderatriz
Kernel de convolución



Dominio de la frecuencia

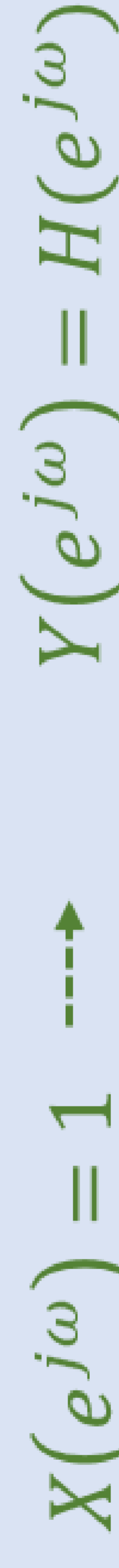
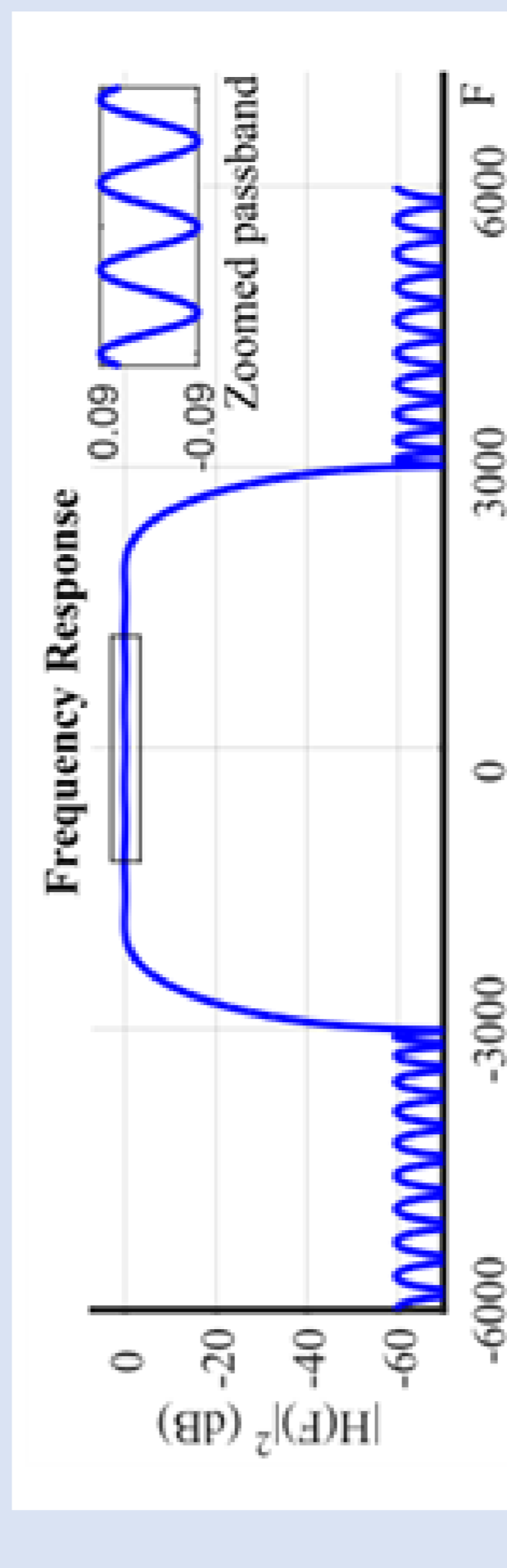
- Transformada de Fourier:



$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

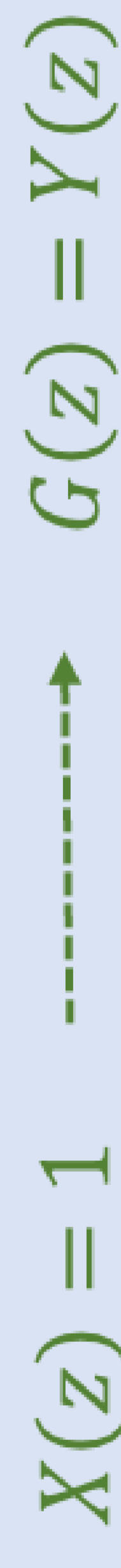
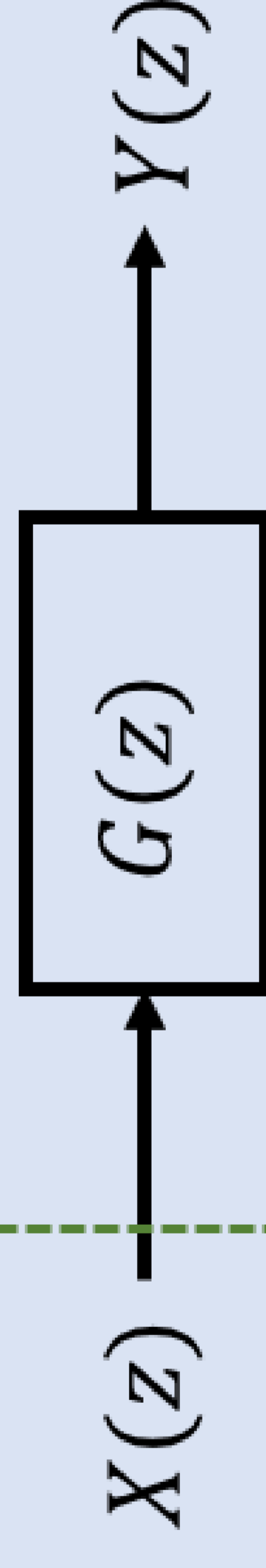
$H(e^{j\omega})$

Respuesta en frecuencia



$$H(e^{j\omega}) = FT(h(n))$$

- Transformada de Laplace:



$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$G(z)$

Función de transferencia

$$H(e^{j\omega}) = G(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

Diagrama de BODE ASINTÓTICO para cada tipo de factor de la Función de Transferencia de sistemas CONTINUOS

FACTOR	PZMAP	L_ω	ϕ_ω	EJEMPLO ($n=1$)	
				L_ω $\left[\frac{20dB}{dec} \right]$	ϕ_ω $\left[\frac{90^\circ}{dec} \right]$
K		$20 \log(K)$	$si K > 0, \quad 0^\circ$ $si K < 0, \quad 180^\circ$		
s^n	⊕	$n \cdot 20 \frac{dB}{dec}$	$n \cdot 90^\circ$		
$\frac{1}{s^n}$	⊗	$n \cdot \left(-20 \frac{dB}{dec} \right)$	$n \cdot (-90^\circ)$		
$(\tau s + 1)^n$	⊖	$si \omega < \sigma, \quad 0 dB$ $si \omega > \sigma, \quad n \cdot 20 \frac{dB}{dec}$	$si \omega < \frac{\sigma}{10}, \quad 0^\circ$ $si \omega > 10\sigma, \quad n \cdot 90^\circ$		
$\frac{1}{(\tau s + 1)^n}$	⊗	$si \omega < \sigma, \quad 0 dB$ $si \omega > \sigma, \quad n \cdot \left(-20 \frac{dB}{dec} \right)$	$si \omega < \frac{\sigma}{10}, \quad 0^\circ$ $si \omega > 10\sigma, \quad n \cdot (-90^\circ)$		
$(\tau s - 1)^n$	⊖	$si \omega < \sigma, \quad 0 dB$ $si \omega > \sigma, \quad n \cdot 20 \frac{dB}{dec}$	$si \omega < \frac{\sigma}{10}, \quad n \cdot 180^\circ$ $si \omega > 10\sigma, \quad n \cdot 90^\circ$		
$\frac{1}{(\tau s - 1)^n}$	⊗	$si \omega < \sigma, \quad 0 dB$ $si \omega > \sigma, \quad n \cdot \left(-20 \frac{dB}{dec} \right)$	$si \omega < \frac{\sigma}{10}, \quad n \cdot (-180^\circ)$ $si \omega > 10\sigma, \quad n \cdot (-90^\circ)$		
$\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right)^n$	⊙ ⊙	$si \omega < \omega_n, \quad 0 dB$ $si \omega > \omega_n, \quad n \cdot 40 \frac{dB}{dec}$	$si \omega < \frac{\omega_n}{10}, \quad 0^\circ$ $si \omega > 10\omega_n, \quad n \cdot 180^\circ$		
$\frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right)^n}$	⊗ ⊗	$si \omega < \omega_n, \quad 0 dB$ $si \omega > \omega_n, \quad n \cdot \left(-40 \frac{dB}{dec} \right)$	$si \omega < \frac{\omega_n}{10}, \quad 0^\circ$ $si \omega > 10\omega_n, \quad n \cdot (-180^\circ)$		
$\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} - \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right)^n$	⊙ ⊙	$si \omega < \omega_n, \quad 0 dB$ $si \omega > \omega_n, \quad n \cdot 40 \frac{dB}{dec}$	$si \omega < \frac{\omega_n}{10}, \quad n \cdot 360^\circ$ $si \omega > 10\omega_n, \quad n \cdot 180^\circ$		
$\frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2} - \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1 \right)^n}$	⊗ ⊗	$si \omega < \omega_n, \quad 0 dB$ $si \omega > \omega_n, \quad n \cdot \left(-40 \frac{dB}{dec} \right)$	$si \omega < \frac{\omega_n}{10}, \quad n \cdot (-360^\circ)$ $si \omega > 10\omega_n, \quad n \cdot (-180^\circ)$		

L_ω , magnitud en decibelios

ϕ , fase en grados

n , número de raíces (polos o ceros)

CAMBIOS DE UNIDADES HABITUALES EN ANÁLISIS FRECUENCIAL

