

# Simulación del acoplamiento de dos cuerdas vibrantes

María Gamboa Pérez  
mgamboa@ucm.es  
Facultad de Estudios Estadísticos



Septiembre 2023

# Índice general

<b>I El modelo continuo</b>	<b>7</b>
<b>1. Vibraciones libres</b>	<b>9</b>
1.1. Vibraciones libres . . . . .	9
1.2. Conservación de la energía. Unicidad . . . . .	9
1.3. Existencia de soluciones. Método de separación de variables . . . . .	10
1.3.1. Problema de Sturm–Liouville. Ortogonalidad . . . . .	11
1.3.2. El perfil temporal . . . . .	13
1.3.3. El problema de la convergencia a soluciones clásicas . . . . .	15
1.3.4. Fórmulas de representación continua . . . . .	19
<b>2. Vibraciones forzadas en el contorno</b>	<b>23</b>
2.1. Vibraciones forzadas . . . . .	23
2.2. Dos ejemplos ilustrativos . . . . .	27
2.2.1. Forzamiento parabólico . . . . .	27
2.2.2. Forzamiento armónico. Resonancia en frecuencia . . . . .	27
<b>II El modelo discreto</b>	<b>29</b>
<b>3. El modelo discreto</b>	<b>31</b>
3.1. Discretización. Consistencia . . . . .	31
3.2. Convergencia del problema de valor inicial . . . . .	32
3.3. Análisis de von Neumann . . . . .	34
3.4. El problema mixto de contorno y valor inicial . . . . .	39
3.5. Implementación numérica . . . . .	41
3.5.1. Forzamiento parabólico . . . . .	41
3.5.2. Forzamiento armónico . . . . .	43
<b>Apéndices</b>	<b>47</b>
<b>A. Desarrollos en senos y cosenos</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

# RESUMEN

La motivación de este trabajo ha partido de un hecho experimental, acoplamiento de la vibración de una cuerda de guitarra en otra anudada a la anterior. Se trata de un modelo delicado que involucra la Teoría de Elasticidad y las Ecuaciones Variacionales. Para este primer acercamiento se han considerado únicamente las vibraciones de una cuerda que parte del reposo mecánico y es forzada únicamente en un extremo. No se ha encontrado en la literatura una presentación del problema que nos ocupa, por lo que nos hemos detenido en el estudio de sus soluciones. El trabajo se divide en dos partes en las que respectivamente se abordan los problemas continuos y discretos. No se ha buscado el marco funcional más amplio, salvo en contados comentarios, limitando esencialmente a la obtención de soluciones clásicas. En el estudio del modelo continuo de evolución se obtiene un Principio de Conservación de la Energía, del que deducimos, entre otras consecuencias, la unicidad de soluciones con energía finita. Un marco funcional más amplio hubiera permitido la resolución de un problema abstracto de Cauchy mediante una variante del Teorema de Hille-Yosida. En su lugar, se maneja el constructivo método de separación de variables. Se ha comenzado con un estudio detallado del modelo sin forzamiento o de vibraciones libres, deteniéndonos en la obtención de soluciones clásicas hasta la frontera o en cualquier subconjunto compacto interior. En el siguiente capítulo se han estudiado las vibraciones producidas por un único forzamiento en el extremo derecho de la cuerda, partiendo de un estado inicial nulo. Mediante un cambio de variables se ha pasado el forzamiento a la ecuación. Al tratarse de un problema no homogéneo, se ha usado el Principio de Duhamel para abordarlo mediante la acumulación de familia de soluciones de problemas homogéneos, vibraciones libres. Se ha ilustrado esta aproximación con dos tipos de forzamientos: parabólicos y armónicos en las que la eventual coincidencia de su frecuencia con las naturales de vibración pueden producir el efecto de resonancia en frecuencia. El tratamiento numérico del modelo de evolución se ha basado en el estudio detallado del esquema centrado en diferencias finitas en el que intervienen operadores de segundo orden tanto temporal como espacial, lo que lleva a considerar, en primer lugar, solo al problema de valor inicial, despreocupándonos, de momento, de las condiciones de contorno. Para este esquema se ha usado el método de reducción de etapa sobre el que se presenta la versión adecuada del Teorema de Equivalencia y la noción ajustada de consistencia y estabilidad. Para esta última, por su profundidad, se ha usado el Análisis de von Neumann. El marco funcional empleado es el de las sucesiones de cuadrado sumable  $l_2$ . Un fino uso de este tipo de sucesiones permite incluir la clase que comprende la consideración del comportamiento asociado a las condiciones de forzamiento. Sobre dicha clase se obtiene la representación vectorial, en dimensión finita, del esquema que tiene en cuenta no solo a la ecuación en derivadas parciales sino también a las condiciones de contorno asociadas. Además, sirve la restricción de estabilidad

obtenida para el problema de valor inicial. Realizamos la simulación numérica y animación gráfica de vibraciones bajo forzamientos parabólicos y armónicos mediante sencillos scripts de Matlab. Finalmente, se ha incluido un apéndice en el que se han recogido algunos resultados usados cuya lectura separada no detiene la exposición del trabajo. También se incorpora una pequeña bibliografía contemplada

## **Palabras Clave**

Ecuaciones diferenciales, Simulación, armónicos



## **Parte I**

# **El modelo continuo**



# Capítulo 1

## Vibraciones libres

### 1.1. Vibraciones libres

El problema que nos ocupa en este capítulo es de contorno y valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } ]0, 1[ \times ]0, \infty[, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, u_t(\cdot, 0) = u_1 & \text{en } [0, 1], \end{cases} \quad (1.1)$$

sobre el que suponemos las condiciones de compatibilidad

$$\begin{cases} u_0(0) = u(0, 0) = 0, u_0(1) = u(1, 0) = 0, \\ u_1(0) = u_t(0, 0) = 0, u_1(1) = u_t(1, 0) = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

al buscar soluciones continuas hasta el borde.

Se trata del modelo matemático sin ninguna acción ajena al intrínseco fenómeno de propagación, más allá del estado inicial con el que parte la cuerda vibrante. Tal fenómeno de propagación suele ser calificado como *vibraciones libres*.

Existen varios métodos para estudiar el problema desde el punto de vista teórico. Por la naturaleza de este trabajo, nos limitaremos al estudio de soluciones clásicas. Comenzamos obteniendo unicidad en la clase de soluciones que tienen energía finita. Manteniéndonos en ella, la existencia se puede acometer de varias formas. Aquí usaremos el conocido método de separación de variables.

### 1.2. Conservación de la energía. Unicidad

Detengámonos, por un momento, en una función  $w \in \mathcal{C}^2(]0, 1[ \times ]0, \infty[) \cup \mathcal{C}([0, 1] \times ]0, \infty[)$  satisfaciendo las condiciones homogéneas de contorno

$$w(0, t) = 0 = w(1, t), \quad t \geq 0.$$

Se verificará también  $w_t(0, t) = 0 = w_t(1, t)$ ,  $t \geq 0$  y con ello

$$\int_0^1 w_{xx} w_t dx = \overbrace{w_x w_t|_{x=0}^1}^{=0} - \int_0^1 w_x w_{tx} dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (w_x)^2 dx$$

deduciéndose

$$\int_0^1 (w_{tt} - w_{xx}) w_t dx = \frac{d}{dt} \left( \overbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 (w_t)^2 dx}^{\text{energía cinética}} + \overbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 (w_x)^2 dx}^{\text{energía potencial}} \right).$$

**Teorema 1.1 (Conservación de la energía)** Para cualquier función regular verificando

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0 & \text{en } ]0, 1[ \times ]0, \infty[, \\ w(0, t) = 0 = w(1, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

la energía mecánica

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (w_t(x, t))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (w_x(x, t))^2 dx$$

permanece constante. Por tanto, satisface en cualquier instante  $t \geq 0$  la igualdad

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (w_t(x, t))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (w_x(x, t))^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (w_t(x, 0))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (w_x(x, 0))^2 dx.$$

□

**Corolario 1.1** En la clase de funciones con energía finita, el problema de contorno y valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f & \text{en } ]0, 1[ \times ]0, \infty[, \\ u(0, t) = \alpha(t), u(1, t) = \beta(t), & t \geq 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, u_t(\cdot, 0) = u_1 & \text{(estado inicial)}. \end{cases}$$

admite a lo sumo una única solución.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $u_1$  y  $u_2$  dos eventuales soluciones. Entonces por el Teorema 1.1, la función  $w = u_1 - u_2$  verifica, para cada  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (w_t(x, t))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (w_x(x, t))^2 dx = 0$$

de donde las condiciones de contorno y valor inicial llevan a

$$0 \equiv w(x, t) = (u_1 - u_2)(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0.$$

□

### 1.3. Existencia de soluciones. Método de separación de variables

Fijemos ahora la atención en la búsqueda de soluciones clásicas del problema de las vibraciones libres (1.1), sujetas a la condición de compatibilidad (1.2).

La geometría del dominio de evolución,  $[0, 1] \times [0, \infty[$ , permite razonar con el método de separación de variables a partir de funciones de la forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . En concreto,

$$u(x, t) = X(x)T(t) \xrightarrow{\text{EDP}} XT'' - X''T = 0 \Rightarrow \frac{T''}{T} = \overbrace{-\lambda}^{\text{constante}} = \frac{X''}{X}.$$

De donde,

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < 1 & \text{(perfil espacial),} \\ T''(t) + \lambda T(t) = 0, & t > 0 & \text{(perfil temporal).} \end{cases}$$

Nótese que ambas están gobernados por la ecuación del oscilador armónico.

### 1.3.1. Problema de Sturm–Liouville. Ortogonalidad

Se puede definir el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) &\rightarrow \mathcal{C}(0, 1) \\ v &\mapsto -v'' \end{aligned}$$

limitado a

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{v \in \mathcal{C}^2(0, 1) \text{ y } v(0) = 0 = v(1)\}.$$

Para objetivos más ambiciosos que los que nos ocupan, se puede extender el operado a un comportamiento variacional sobre el espacio de Sobolev,  $\mathbb{H}_0^1(0, 1)$ , relativo a  $\mathbb{L}^2(0, 1)$ . En ocasiones, manejaremos la notación

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad \text{y} \quad \|f\|^2 = \langle f, f \rangle.$$

**Proposición 1.1** Para  $u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$  se verifican las propiedades

$$\begin{cases} \langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}v \rangle = \int_0^1 u'v' dx, \\ \langle \mathcal{L}v, v \rangle \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle \mathcal{L}v, v \rangle = 0 \text{ sí y sólo si } v \equiv 0. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Como  $u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ , basta integrar por partes

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = - \int_0^1 u''v dx = - \overbrace{u'v}^{=0} \Big|_{x=0}^1 + \int_0^1 u'v' dx = \langle u', v' \rangle. \quad \square$$

**Observación 1.1** Por la primera propiedad se dice que  $\mathcal{L}$  es un operador *autoadjunto* y por la segunda que es *monótono*. □

Nos ocupamos entonces de estudiar el espectro  $\sigma(\mathcal{L})$  del operador  $\mathcal{L}$  definido anteriormente. Es decir, de resolver problema de contorno

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < 1, \\ X(0) = 0 = X(1) & X \not\equiv 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

La *igualdad de la energía*

$$\lambda \|X\|^2 = \langle \mathcal{L}X, X \rangle > 0, \quad X \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \setminus \{0\}, \quad (1.4)$$

y con ella el *cociente de Rayleigh*

$$\lambda = \frac{\langle \mathcal{L}X, X \rangle}{\|X\|^2}, \quad X \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \setminus \{0\},$$

muestran que la constante  $\lambda$  sólo puede ser positiva. El polinomio característico de la EDO de (1.3) admite la factorización

$$\mathcal{P}(\mu) = (\mu - i\sqrt{\lambda})(\mu + i\sqrt{\lambda})$$

luego

$$\mathcal{B} = \{e^{ix\sqrt{\lambda}}, e^{-ix\sqrt{\lambda}}\}$$

es una base del espacio, complejo, de soluciones. Mediante el automorfismo asociado a la fórmula de Euler, se obtiene la base real del mismo espacio

$$\widehat{\mathcal{B}} = \{\cos x\sqrt{\lambda}, \text{sen } x\sqrt{\lambda}\}.$$

Por tanto, la solución *general real* es

$$X(x) = C_1 \cos x\sqrt{\lambda} + C_2 \operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

para  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Para el comportamiento en los extremos

$$\begin{cases} X(0) = C_1, \\ X(1) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}, \end{cases}$$

las condiciones de contorno llevan al sistema lineal homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ \cos \sqrt{\lambda} & \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

del que nos interesa

$$X \neq 0 \Leftrightarrow (C_1, C_2) \neq (0, 0),$$

lo que requiere

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \\ \cos \sqrt{\lambda} & \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} \Leftrightarrow \lambda_n = n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Para esas raíces el rango de matriz del sistema (1.5) es 1, obteniéndose

$$X_n(x) = C \operatorname{sen} x\sqrt{\lambda_n}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Por cálculos directos deducimos

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2 n\pi x = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2n\pi x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n\pi} \operatorname{sen} 2n\pi x \Big|_{x=0}^1 \right) = \frac{1}{2},$$

de modo que en todo lo que sigue sólo consideraremos las *autofunciones*,  $C_0^\infty([0, 1])$ , *normalizadas* en  $\mathbb{L}^2(0, 1)$

$$X_n(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen} x\sqrt{\lambda_n}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.7)$$

Dichas autofunciones verifican la propiedad

$$\lambda_n \langle X_n, X_m \rangle = \langle \mathcal{L}X_n, X_m \rangle = \langle X_n, \mathcal{L}X_m \rangle = \lambda_m \langle X_n, X_m \rangle$$

que determina la relación de ortogonalidad

$$(\lambda_n - \lambda_m) \langle X_n, X_m \rangle = 0. \quad (1.8)$$

Nótese que, por tanto, *a autovalores distintos le corresponden autofunciones ortogonales*.

**Observación 1.2** Las autofunciones son conocidas en elasticidad como los *modos propios de vibración*. Por otra parte, la *masa modal*

$$\|X_n\|^2 = \int_0^1 X_n^2 dx = m_n \equiv 1$$

y la *rigidez modal*

$$\langle \mathcal{L}X_n, X_n \rangle = \int_0^1 (X_n')^2 dx = k_n = n^2 \pi^2$$

verifican

$$\lambda_n = \frac{k_n}{m_n} \quad (\text{cocientes de Rayleigh}).$$

□

### 1.3.2. El perfil temporal

Cada autovalor  $\lambda_n$  determina el perfil temporal libre (sin forzamiento)

$$\underbrace{T_n'' + \lambda_n T_n = 0}_{\text{oscilador armónico}} \stackrel{\mathcal{P}(\mu)=\mu^2+\lambda_n}{\Leftrightarrow} T_n(t) = C_1 \cos t\sqrt{\lambda_n} + C_2 \operatorname{sen} t\sqrt{\lambda_n}.$$

Ahora

$$0 = (T_n'' + \lambda_n T_n)T_n' = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \overbrace{((T_n')^2 + \lambda_n T_n^2)}^{e_n(t)},$$

Es decir, la energía mecánica *puntual* de cada oscilador

$$e_n(t) = \frac{1}{2} ((T_n')^2 + \lambda_n T_n^2)$$

permanece constante.

**Observación 1.3** Las frecuencias naturales de vibración de los efectos oscilatorios son

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\frac{k_n}{m_n}}$$

Para un problema sobre un intervalo  $[0, L]$  las frecuencias naturales de vibración

$$\omega_n(L) = n \frac{\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

que muestran cómo una reducción de longitud determina un aumento de frecuencia.  $\square$

En el estudio teórico del modelo ningún modo propio de vibración debe descartarse, lo que lleva a la conjetura formal

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} u_n(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x),$$

que verifica

$$u(0, t) = 0 = u(1, t), \quad t \geq 0.$$

Razonemos de momento sobre las igualdades formales

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x) = \sum_{n \geq 1} B_n(u_0)X_n(x) \Rightarrow \langle u_0, X_m \rangle = \langle \sum_{n \geq 1} B_n(u_0)X_n, X_m \rangle = \sum_{n \geq 1} B_n(u_0)\delta_{n,m} = B_m(u_0), \\ \sum_{n \geq 1} B_n(u_0)X_n(x) = u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n \geq 1} T_n(0)X_n(x), \end{array} \right.$$

luego requerimos  $T_n(0) = B_n(u_0)$ .

Puesto  $\mathcal{C}_0^\infty([0, 1])$  es denso en  $\mathbb{L}^2(0, 1)$ , el Teorema de Stone-Weierstrass permite mostrar que las autofunciones de  $\mathcal{L}$  constituyen una base hilbertiana. Sobre la posición inicial supondremos, por ahora, la condición  $u_0 \in \mathbb{L}^2(0, 1)$  que implica la correspondiente *identidad de Parseval*

$$\|u_0\|^2 = \sum_{n \geq 1} (B_n(u_0))^2$$

y la representación

$$u_0 = \sum_{n \geq 1} B_n(u_0)X_n \quad \text{en } \mathbb{L}^2(0, 1).$$

Para la velocidad inicial supondremos, de momento, la condición mas general  $u_1 \in \mathbb{H}^{-1}(0, 1)$  determinada por la existencia de unas constantes  $\{\widehat{B}_n(u_1)\}_n$  tales que

$$\sum_{n \geq 1} \left( \frac{\widehat{B}_n(u_1)}{\omega_n} \right)^2 < \infty,$$

y la representación

$$u_1 = \sum_{n \geq 1} \widehat{B}_n(u_1) X_n \quad \text{en } \mathbb{L}^2(0, 1).$$

**Observación 1.4** Como se ha comentado, nuestra presentación no llega a la teoría variacional, de modo que aquí  $\mathbb{H}^{-1}(0, 1)$  es sólo una notación.  $\square$

Procediendo formalmente con  $u_1 \in \mathbb{H}^{-1}(0, 1)$ , se tiene

$$\sum_{n \geq 1} \widehat{B}_n(u_1) X_n(x) = u_1(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n \geq 1} T'_n(0) X_n(x), \quad \text{supuesto } T'_n(0) = \widehat{B}_n(u_1).$$

Por tanto, el perfil temporal libre

$$\underbrace{T''_n + \lambda_n T_n = 0}_{\text{oscilador armónico}} \quad \overset{T_n(0)=B_n(u_0), T'_n(0)=\widehat{B}_n(u_1)}{\Rightarrow} \quad T_n(t) = B_n(u_0) \cos t\omega_n + \frac{\widehat{B}_n(u_1)}{\omega_n} \text{sen } t\omega_n, \quad t \geq 0,$$

determina la energía mecánica *puntual conservada*

$$e_n(t) = e_n(0) = \frac{1}{2} \left( (T'_n(0))^2 + \lambda_n (T_n(0))^2 \right) = \frac{1}{2} \left( |B_n(u_0)|^2 + \lambda_n |\widehat{B}_n(u_1)|^2 \right)$$

y el aproximante de Fourier

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x), \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0. \quad (1.9)$$

Con ello, podemos obtener las estimaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 (u_n(x, t))^2 dx \leq \max_{t \geq 0} |T_n(t)|^2 \|X_n\|^2 \leq \left( (B_n(u_0))^2 + \left( \frac{\widehat{B}_n(u_1)}{\omega_n} \right)^2 \right), \\ \sum_{n=m_1}^{m_2} \int_0^1 (u_n(x, t))^2 dx \leq \sum_{n=m_1}^{m_2} \left[ (B_n(u_0))^2 + \left( \frac{\widehat{B}_n(u_1)}{\omega_n} \right)^2 \right], \end{array} \right.$$

y concluir

**Teorema 1.2** Supuesto  $u_0 \in \mathbb{L}^2(0, 1)$  y  $u_1 \in \mathbb{H}^{-1}(0, 1)$ , para cada  $t \in ]0, \infty[$ , los aproximantes de Fourier,  $u_n$ , dados por (1.9) convergen en  $\mathbb{L}^2(0, 1)$  a una función

$$u = \sum_{n \geq 1} u_n \quad \text{en } [0, 1] \times \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (1.10)$$

Además,

$$\|u(\cdot, t) - \sum_{m=1}^n u_m(\cdot, t)\|^2 \leq \sum_{m \geq n+1} \left[ (B_m(u_0))^2 + \left( \frac{\widehat{B}_m(u_1)}{\omega_m} \right)^2 \right] \quad \text{para cada } t \in ]0, \infty[. \quad (1.11) \quad \square$$

**Observación 1.5** Cuando  $u_1 \in \mathbb{L}^2(0, 1)$ , lo que no es restrictivo, se verifica la correspondiente *identidad de Parseval*

$$\|u_1\|^2 = \sum_{n \geq 1} (B_n(u_1))^2$$

y la representación

$$u_1 = \sum_{n \geq 1} B_n(u_1) X_n \quad \text{en } \mathbb{L}^2(0, 1).$$

Por tanto,

$$\sum_{n \geq 1} \left( \frac{B_n(u_1)}{\omega_n} \right)^2 < \frac{\|u_1\|^2}{\omega_1} < \infty,$$

con lo que  $u_1 \in \mathbb{H}^{-1}(0, 1)$ , satisfaciéndose el Teorema 1.2. Ahora, la estimación (1.11) lleva a

$$\|u(\cdot, t) - \sum_{m=1}^n u_m(\cdot, t)\|^2 \leq \left[ \left( \sum_{m \geq n+1} (B_n(u_0))^2 \right) + \frac{\|u_1\|^2}{\omega_{n+1}} \right] \quad \text{para cada } t \in ]0, \infty[. \quad (1.12)$$

□

### 1.3.3. El problema de la convergencia a soluciones clásicas

Recuérdese que para obtener soluciones clásicas requerimos las condiciones de compatibilidad (1.2). Con todo ello, el resultado más importante es

**Teorema 1.3 (Soluciones clásicas hasta el borde)** Sean  $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$  con  $u_0'''$  continua a trozos en  $[0, 1]$  y cada  $u_1 \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  con  $u_1''$  continua a trozos en  $[0, 1]$ , verificando las propiedades de compatibilidad (1.2)

$$\begin{cases} u_0(0) = 0 = u_0(1) & (\text{continuidad hasta el borde}), \\ u_1(0) = 0 = u_1(1) & (\text{continuidad de la derivada temporal hasta el borde}), \end{cases}$$

así como

$$u_0''(0) = 0 = u_0''(1) \quad (\text{continuidad de las segundas derivadas hasta el borde}). \quad (1.13)$$

Entonces la función definida por

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \left[ \overbrace{B_n(u_0) \cos(t\omega_n) + \frac{B_n(u_1)}{\omega_n} \text{sen}(t\omega_n)}^{T_n(t)} \right] \overbrace{\sqrt{2} \text{sen } x\omega_n}^{X_n(x)}, \quad (x, t) \in [0, 1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$$

pertenece al espacio  $\mathcal{C}_{x,t}^{1,1}([0, 1] \times [0, \infty[) \cap \mathcal{C}_{x,t}^{2,2}([0, 1] \times [0, \infty[)$  y verifica el problema mixto de contorno y valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, \infty[, \\ u(0, t) = 0 = u(1, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Además, es la única solución en el espacio de energía asociado.

DEMOSTRACIÓN. La prueba usa reiteradamente el criterio de Weierstrass de la convergencia uniforme y la Proposición A.3. Consideremos la serie formal

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{n \geq 1} \left[ B_n(u_0) \cos(t\omega_n) + \frac{B_n(u_1)}{\omega_n} \operatorname{sen}(t\omega_n) \right] \operatorname{sen} x\omega_n, \quad (x, t) \in [0, 1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n u_k(x, t) \right| &\leq \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \left[ |B_k(u_0)| + \frac{1}{\omega_k} |B_k(u_1)| \right] \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \left[ (\omega_k |B_k(u_0)| + |B_k(u_1)|) \frac{1}{\omega_k} \right] \\ &\leq \sqrt{2} \left[ \left( \sum_{k=1}^n \omega_k^2 |B_k(u_0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k=1}^n |B_k(u_1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Como  $u_0 \in \mathbb{L}^2(0, 1)$ , la condición de compatibilidad  $u_0(0) = 0 = u_0(1)$  lleva a

$$A_k(u'_0) = \omega_k B_k(u_0) \quad (1.14)$$

(ver la Proposición A.3), de donde

$$\left| \sum_{k=1}^n u_k(x, t) \right| \leq \sqrt{2} \left[ \left( \sum_{k=1}^n |A_k(u'_0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k=1}^n |B_k(u_1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

que muestra que la serie converge uniformemente a una función  $u(x, t)$  continua en  $[0, 1] \times [0, T]$ , para cada  $T > 0$ , pues  $u'_0 \in \mathbb{L}^2(0, 1)$ . Además,

$$u(0, t) = 0 = u(1, t), \quad t \geq 0,$$

y

$$u(x, 0) = \sqrt{2} \sum_{n \geq 1} B_n(u_0) \operatorname{sen}(x\omega_n) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

por el Teorema A.2.

Consideremos ahora la serie formal

$$u_t(x, t) = \sum_{n \geq 1} (u_t)_n(x, t) = \sqrt{2} \sum_{n \geq 1} [-\omega_n B_n(u_0) \operatorname{sen}(t\omega_n) + B_n(u_1) \cos(t\omega_n)] \operatorname{sen}(x\omega_n),$$

para la que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n (u_t)_k(x, t) \right| &\leq \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \left[ \omega_k |B_k(u_0)| + |B_k(u_1)| \right] \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \left[ (\omega_k^2 |B_k(u_0)| + |B_k(u_1)|) \frac{1}{\omega_k} \right] \\ &\leq \sqrt{2} \left[ \left( \sum_{k=1}^n \omega_k^4 |B_k(u_0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k=1}^n \omega_k^2 |B_k(u_1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ahora, la condición de compatibilidad  $u_1(0) = 0 = u_1(1)$  permite las relaciones

$$\begin{cases} B_k(u''_0) = -\omega_k A_k(u'_0) = -\omega_k^2 B_k(u_0) & \text{(ver (1.14)),} \\ A_k(u'_1) = \omega_k B_k(u_1) \end{cases} \quad (1.15)$$

(ver de nuevo la Proposición A.3) que llevan a

$$\left| \sum_{k=1}^n (u_t)_k(x, t) \right| \leq \sqrt{2} \left[ \left( \sum_{k=1}^n |B_k(u_0'')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k=1}^n |A_k(u_1')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

de donde la serie converge uniformemente a una función continua en  $[0, 1] \times [0, T]$ , para cada  $T > 0$ , pues  $u_0'', u_1' \in \mathbb{L}^2(0, 1)$ , que coincide con  $u_t(x, t)$ . Además,

$$u_t(x, 0) = \sqrt{2} \sum_{n \geq 1} B_n(u_1) \operatorname{sen}(x\omega_n) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

por el Teorema A.2. Análogamente, la serie formal

$$u_x(x, t) = \sum_{n \geq 1} (u_x)_n(x, t) = \sqrt{2} \sum_{n \geq 1} [\omega_n B_n(u_0) \cos(t\omega_n) + B_n(u_1) \operatorname{sen}(t\omega_n)] \cos(x\omega_n),$$

verifica, por los resultados anteriores,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n (u_x)_k(x, t) \right| &\leq \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \left[ \omega_k |B_k(u_0)| + B_k(u_1) \right] \\ &\leq \sqrt{2} \left[ \left( \sum_{k=1}^n |B_k(u_0'')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k=1}^n |A_k(u_1')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

de donde la serie converge uniformemente a una función continua en  $[0, 1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$  que coincide con  $u_x(x, t)$ .

Finalmente, consideremos las series formales

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = -\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} [\omega_n^2 B_n(u_0) \cos(t\omega_n) + \omega_n B_n(u_1) \operatorname{sen}(t\omega_n)] \operatorname{sen}(x\omega_n), \\ u_{xx}(x, t) = -\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} [\omega_n^2 B_n(u_0) \cos(t\omega_n) + \omega_n B_n(u_1) \operatorname{sen}(t\omega_n)] \operatorname{sen}(x\omega_n), \end{cases}$$

*i.e.*

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty[,$$

para las que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n (u_{tt})_k(x, t) \right| &\leq \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \left[ \omega_k^2 |B_k(u_0)| + \omega_k |B_k(u_1)| \right] \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \left[ (\omega_k^3 |B_k(u_0)| + \omega_k^2 |B_k(u_1)|) \frac{1}{\omega_k} \right] \\ &\leq \sqrt{2} \left[ \left( \sum_{k=1}^n \omega_k^6 |B_k(u_0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k=1}^n \omega_k^4 |B_k(u_1)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La condición de compatibilidad  $u_0''(0) = 0 = u_0''(1)$  permite las relaciones

$$\begin{cases} A_k(u_0''') = \omega_k B_k(u_0'') = -\omega_k^3 B_k(u_0), \\ B_k(u_1'') = -\omega_k A_k(u_1') = -\omega_k^2 B_k(u_1), \end{cases} \quad (1.16)$$

(ver (1.15) y una vez más la Proposición A.3) que llevan a

$$\left| \sum_{k=1}^n (u_{tt})_k(x, t) \right| \leq \sqrt{2} \left[ \left( \sum_{k=1}^n |A_k(u_0''')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{k=1}^n |B_k(u_1'')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

y así, la serie converge uniformemente a una función continua en  $[0, 1] \times [0, T]$ , para cada  $T > 0$ , pues  $u_0''', u_1'' \in \mathbb{L}^2(0, 1)$ , que coincide con  $u_{tt}(x, t)$  y, por construcción, con  $u_{xx}(x, t)$ . Nótese que también se verifica, por el Teorema A.2,

$$u_{xx}(x, 0) = u_{tt}(x, 0) = \sqrt{2} \sum_{n \geq 1} \omega_n^2 B_n(u_1) \operatorname{sen}(x\omega_n) = u_0''(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \square$$

Las condiciones de compatibilidad (1.2)

$$\begin{cases} u_0(0) = 0 = u_0(1) & \text{(continuidad de la solución hasta el borde),} \\ u_1(0) = 0 = u_1(1) & \text{(continuidad de la derivada temporal de la solución hasta el borde).} \end{cases}$$

parecen razonables con el modelo físico, pues si la cuerda va a permanecer fija en sus extremos la velocidad en dichos puntos será nula. No ocurre lo mismo con la condición (1.13)

$$u_0''(0) = 0 = u_0''(1) \quad \text{(continuidad de las segundas derivadas de la solución hasta el borde)}$$

que es una restricción innecesaria incluso para obtener soluciones clásicas en el interior, que es donde las vibraciones son desconocida. Adaptando la prueba del Teorema 1.3, tal como se hace en los razonamientos del Teorema A.2 y del Corolario A.2, se obtiene

**Corolario 1.2 (Soluciones clásicas interiores)** Sean  $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, 1])$  con  $u_0'''$  continua a trozos en  $[0, 1]$  y cada  $u_1 \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  con  $u_1''$  continua a trozos en  $[0, 1]$ , verificando las propiedades de compatibilidad (1.2). Entonces la función definida por

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \left[ \overbrace{B_n(u_0) \cos(t\omega_n) + \frac{B_n(u_1)}{\omega_n} \operatorname{sen}(t\omega_n)}^{T_n(t)} \right] \overbrace{\sqrt{2} \operatorname{sen} x\omega_n}^{X_n(x)}, \quad (x, t) \in [0, 1] \times \overline{\mathbb{R}}_+$$

pertenece al espacio  $\mathcal{C}_{x,t}^{1,1}([0, 1] \times [0, \infty[) \cap \mathcal{C}_{x,t}^{2,2}([0, 1[ \times ]0, \infty[)$  y verifica el problema mixto de contorno y valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, \infty[, \\ u(0, t) = 0 = u(1, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Además, es la única solución en el espacio de energía asociado.

**Observación 1.6** La convergencia uniforme en  $[0, 1]$

$$\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} \left[ B_n(u_0) \cos(t\omega_n) + \frac{B_n(u_1)}{\omega_n} \operatorname{sen}(t\omega_n) \right] \operatorname{sen}(x\omega_n) \rightarrow u(x, t)$$

sirve como aproximación de la solución, cuyo error

$$\varepsilon_n(x) = u(x, t) - \sqrt{2} \sum_{k=1}^n \left[ B_k(u_0) \cos(t\omega_k) + \frac{B_k(u_1)}{\omega_k} \operatorname{sen}(t\omega_k) \right] \operatorname{sen}(x\omega_k)$$

puede ser estimado mediante la desigualdad

$$\begin{aligned} \max_{[0,1]} |\varepsilon_n(x)| &\leq \sqrt{2} \sum_{k \geq n+1} \left[ |B_k(u_0)| + \frac{|B_k(u_1)|}{\omega_k} \right] \\ &\leq \sqrt{2} \sum_{k \geq n+1} \frac{|A_k(u_0''')|}{\omega_k^2} \frac{1}{\omega_k} + \sum_{k \geq n+1} \frac{|B_k(u_1'')|}{\omega_k^2} \frac{1}{\omega_k} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{\omega_{n+1}^2} \left[ \left( \sum_{n \geq 1} |A_n(u_0''')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{n \geq 1} |B_n(u_1'')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\omega_n^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

**Observación 1.7** Si suponemos  $u_1 \in \mathcal{C}([0, 1])$  verificando  $u_1(0) = u_1(1) = 0$ , con  $u_1'$  continua a trozos en  $[0, 1]$ , se satisface la igualdad de Parseval

$$\int_0^1 |u_1(x)|^2 dx = \sum_{n \geq 1} |B_n(u_1)|^2 < \infty.$$

Por otro lado, bajo el supuesto  $u_0 \in \mathcal{C}^1([0, 1])$  verificando  $u_0(0) = u_0(1) = 0$ , con  $u_0'$  continua a trozos en  $[0, 1]$ , se obtiene, a partir de la igualdad de Parseval para  $u_0'$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u_0'(x)|^2 dx &= \left[ \frac{A_0(u_0')}{2} + \sum_{n \geq 1} |A_n(u_0')|^2 \right] \\ &= \sum_{n \geq 1} \omega_n |B_n(u_0)|^2 < \infty, \end{aligned}$$

sin más que utilizar la Proposición A.3,  $u_0(0) = u_0(1)$  y

$$A_0(u_0') = \int_0^L u_0'(x) dx = 0.$$

En esas condiciones, la energía acumulada en  $[0, 1]$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ (u_t(x, t))^2 + (u_x(x, t))^2 \right] dx, \quad t \geq 0,$$

que es conservada por la igualdad

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0), \quad t \geq 0,$$

puede ser expresada en la forma

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ (u_1(x))^2 + (u_0'(x))^2 \right] dx = \frac{1}{2} \left( \sum_{n \geq 1} |B_n(u_1)|^2 + \omega_n^2 |B_n(u_0)|^2 \right), \quad t \geq 0.$$

Nótese la relación

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{n \geq 1} e_n(t), \quad t \geq 0,$$

que expresa la energía acumulada en  $[0, 1]$  a partir de la de cada partícula.  $\square$

### 1.3.4. Fórmulas de representación continua

La obtención de soluciones clásicas por el método de separación de variables ha usado restricciones matemáticas no requeridas en la explicación del modelo físico. En efecto, si nos fijamos en el problema (1.1) parece razonable buscar soluciones continuas, lo que requiere las condiciones de compatibilidad (1.2). Sin embargo, la exigencia de derivabilidad elimina una gran cantidad de aplicaciones incluso de la vida ordinaria como tocar una guitarra.

Las relaciones trigonométricas

$$\begin{cases} \cos(t\omega_n) \operatorname{sen}(x\omega_n) = \frac{\operatorname{sen}((x+t)\omega_n) + \operatorname{sen}((x-t)\omega_n)}{2}, \\ \operatorname{sen}(t\omega_n) \operatorname{sen}(x\omega_n) = -\frac{\cos((x+t)\omega_n) - \cos((x-t)\omega_n)}{2} = \frac{\omega_n}{2} \int_{x-t}^{x+t} \operatorname{sen} s \omega_n ds \end{cases}$$

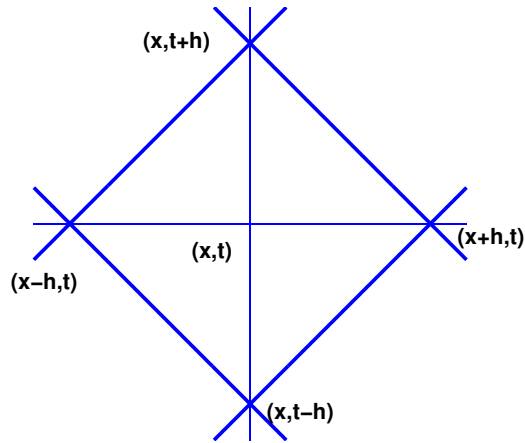
llevan a la expresión

$$u_n(x, t) = \left[ B_n(u_0) \frac{X_n(x+t) + X_n(x-t)}{2} + \frac{B_n(u_1)}{2} \int_0^1 X_n(s) ds \right], \quad (1.17)$$

supuesto  $0 \leq x-t \leq x+t \leq 1$ . Un uso adecuado lleva a

**Teorema 1.4 (Regla del Paralelogramo)** Para cada  $h > 0$  tal que  $(x \pm h, t \pm h) \in ]0, 1[ \times ]0, \infty[$  se verifica la propiedad interior

$$u_n(x, t + h) + u_n(x, t - h) = u_n(x + h, t) + u_n(x - h, t). \quad (1.18)$$



Bajo las condiciones de convergencia uniforme  $u_0 \in \mathcal{C}([0, 1])$ ,  $u_0(0) = 0 = u_0(1)$ , con  $u_0'$  continua a trozos en  $[0, 1]$ , y  $u_1 \in \mathbb{L}^2(0, 1)$ , la función continua

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} u_n(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty[$$

también verifica la regla (1.18). □

### Observación 1.8

- En sus coordenadas característica, la ecuación de ondas queda en la forma

$$\omega_{\xi\eta} = 0, \quad \xi = x + t, \quad \eta = x - t, \quad \omega(\xi, \eta) \doteq u(x, t),$$

de donde se deduce fácilmente

$$\omega(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

es decir,

$$u_n(x, t) = F_n(x + t) + G_n(x - t).$$

Por tanto,  $u_n$  es suma de de dos ondas que se propagan con la misma velocidad en direcciones opuestas. La propiedad (1.18) es ahora inmediata. De nuevo esta duplicidad de propagación se puede extender a la función  $u$  bajo las condiciones de convergencia uniforme.

- La Regla del Paralelogramo se usa para introducir una noción débil de solución continua. Esta regla es cercana al esquema centrado de segundo orden

$$\frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{k^2} - \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{k^2} = 0.$$

□

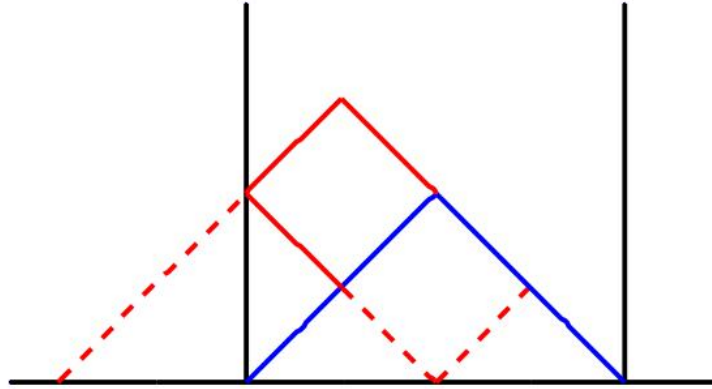
Usando, un vez más, las condiciones de convergencia uniforme podemos escribir

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n \geq 1} \left[ B_n(u_0) \frac{X_n(x+t) + X_n(x-t)}{2} + \frac{B_n(u_1)}{2} \int_0^1 X_n(s) ds \right] \\ &= \frac{u_0(x+t) + u_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s) ds, \end{aligned}$$

supuesto,

$$0 \leq x - t \leq x + t \leq 1.$$

que recupera la *Fórmula de d'Alembert* sobre el cono de dependencia maximal. Para el resto de puntos  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty[$  se obtiene la misma *Fórmula de d'Alembert* cuando las funciones  $u_0$  y  $u_1$  son reemplazadas por extensiones impares.  $\square$





## Capítulo 2

# Vibraciones forzadas en el contorno

### 2.1. Vibraciones forzadas

Nos ocupamos en la propagación de las vibraciones *forzadas exclusivamente* en el extremo derecha de la cuerda

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } ]0, 1[ \times ]0, \infty[, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = \beta(t), & t \geq 0, \\ u(\cdot, 0) = u_t(\cdot, 0) \equiv 0, & \text{en } [0, 1], \end{cases} \quad (2.1)$$

con las *condiciones de compatibilidad*

$$0 = u(1, 0) = \beta(0), 0 = u_t(1, 0) = \beta'(0), \quad (2.2)$$

para buscar soluciones continuas hasta la frontera. En todo lo que sigue supondremos  $\beta \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}_+)$  verificando  $\beta(0) = \beta'(0) = 0$ .

El Teorema 1.1, referente a la conservación de la energía mecánica, permite, aquí también, obtener unicidad de soluciones en la clase de las funciones con energía finita. Por tanto, limitaremos este capítulo al estudio de la existencia de soluciones en esa clase funcional.

Aunque existen otros métodos, usaremos el de separación de variables mostrado en el capítulo anterior. El cambio de variables

$$v(x, t) = u(x, t) - g(x)\beta(t), \quad g(x) = x,$$

permite formar el problema equivalente

$$\begin{cases} v_{tt}(x, t) - v_{xx}(x, t) = -g(x)\beta''(t) & (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, \infty[, \\ v(0, t) = 0 = v(1, t), & t \geq 0, \\ v(x, 0) = -x\beta(0) \equiv 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ v_t(x, 0) = -x\beta'(0) \equiv 0, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2.3)$$

que satisface las condiciones de compatibilidad para obtener soluciones continuas hasta la frontera.

Podemos usar el clásico Principio de Duhamel para abordar el estudio de la vibración forzada  $v(x, t)$ . Concretamente, usaremos la acumulación

$$v(x, t) = \int_0^t w(x, t; s) ds, \quad (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \quad (2.4)$$

de vibraciones no forzadas (vibraciones libres)

$$\begin{cases} D_2^2 w(x, \tau; s) - D_1^2 w(x, \tau; s) = 0 & (x, \tau) \in ]0, 1[ \times ]s, \infty[, \\ w(0, \tau; s) = 0 = w(1, \tau; s) & \tau \geq s, \\ w(x, s; s) = 0 & 0 \leq x \leq 1, \\ D_2^1 w(x, s; s) = -g(x)\beta''(s) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

con  $s \in [0, t]$ , para la notación diferencial de Schwartz. En efecto, cálculos directos sobre (2.4) muestran

$$\begin{cases} v_t(x, t) = w(x, t; t) + \int_0^t D_2^1 w(x, t; s) ds = \int_0^t D_2^1 w(x, t; s) ds, \\ v_{tt}(x, t) = D_2^1 w(x, t; t) + \int_0^t D_2^2 w(x, t; s) ds \\ \quad = -g(x)\beta''(t) + \int_0^t D_1^2 w(x, t; s) ds = -g(x)\beta''(t) + v_{xx}(x, t). \end{cases}$$

La comprobación de las condiciones iniciales y de contorno, y su compatibilidad, resultan evidentes.

Usando, como en el capítulo anterior, el método de separación de variables obtenemos

$$w(x, t; s) = \sum_{n \geq 1} w_n(x, t; s), \quad w_n(x, t; s) = T_n(t)X_n(x)$$

para los *modos propios de vibración*

$$X_n(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen} x\omega_n, \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

y los *perfiles temporales*

$$\underbrace{T_n'' + \lambda_n T_n = 0}_{\text{oscilador armónico}} \quad \begin{matrix} T_n(s)=0, \\ T_n'(s)=-\beta''(s)B_n(g) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad T_n(t; s) = -\frac{B_n(g)}{\omega_n} \beta''(s) \operatorname{sen}((t-s)\omega_n), \quad t \geq s.$$

De esta forma,

$$v(x, t; s) = \sum_{n \geq 1} v_n(x, t), \quad v_n(x, t) = \left( \int_0^t T_n(t; s) ds \right) X_n(x), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty[$$

con

$$\begin{aligned} \int_0^t T_n(t; s) ds &= -\frac{B_n(g)}{\omega_n} \int_0^t \beta''(s) \operatorname{sen}((t-s)\omega_n) ds \\ &= -B_n(g) \int_0^t \beta'(s) \cos((t-s)\omega_n) ds. \end{aligned}$$

Recuérdese los coeficientes del desarrollo en senos de la función  $g(x) = x$

$$B_n(g) = \sqrt{2} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega_n} \quad (\text{ver (A.15)}).$$

Por tanto, la función candidata a ser solución del problema (2.1) será la expresión formal

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g(x)\beta(t) + v(x, t) \\ &= g(x)\beta(t) - \sum_{n \geq 1} B_n(g)X_n(x) \int_0^t \beta'(s) \cos((t-s)\omega_n) ds, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty[ \end{aligned}$$

Desde luego se verifican las igualdades numéricas

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, & u(1, t) = \beta(t) & \text{para } t \geq 0, \\ u(x, 0) \equiv 0 & & \text{en } [0, 1]. \end{cases}$$

Por otra parte, los razonamientos de la prueba del Lemma A.1 llevan, como en (A.16), a la acotación

$$\left| \sum_{k=1}^n B_k(g)X_k(x) \int_0^t \beta'(s) \cos((t-s)\omega_k) ds \right| \leq \frac{2}{\pi \cos 2^{-1}\pi\tau} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 + k} + \frac{1}{n} \right) \int_0^T |\beta'(s)| ds \quad (2.6)$$

para  $0 \leq x \leq \tau < 1$  y  $0 \leq t \leq T$ , lo que prueba la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \int_0^t \beta'(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \quad \text{uniformemente en } [0, \tau] \times [0, T]$$

para cada  $\tau \in ]0, 1[$  y  $T > 0$ . Es decir, la expresión  $u$  es una función continua en  $]0, 1[ \times [0, \infty[$ . De hecho, por construcción, es continua en  $[0, 1] \times [0, \infty[$ .

Para las derivadas parciales de  $u$  procedemos en forma análoga. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t T_n(t; s) ds &= B_n(g) \left( -\beta'(t) + \int_0^t \beta'(s) \overbrace{\omega_n \operatorname{sen}((t-s)\omega_n)}^{\frac{d}{ds} \cos(t-s)\omega_n} ds \right) \\ &= -B_n(g) \int_0^t \beta''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds. \end{aligned}$$

Como en (2.6) obtenemos

$$\left| \sum_{k=1}^n B_k(g) X_k(x) \int_0^t \beta''(s) \cos((t-s)\omega_k) ds \right| \leq \frac{2}{\pi \cos 2^{-1} \pi \tau} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 + k} + \frac{1}{n} \right) \int_0^T |\beta''(s)| ds \quad (2.7)$$

para  $0 \leq x \leq \tau < 1$  y  $0 \leq t \leq T$ , lo que prueba la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \int_0^t \beta''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \quad \text{uniformemente en } [0, \tau] \times [0, T]$$

para cada  $\tau \in ]0, 1[$  y  $T > 0$ . Es decir, la expresión

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= g(x) \beta'(t) + v_t(x, t) \\ &= g(x) \beta'(t) - \sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \int_0^t \beta''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \end{aligned}$$

es una función continua en  $]0, 1[ \times [0, \infty[$ . De modo que  $u_t(x, 0) = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

Además,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t T_n(t; s) ds &= B_n(g) \left( -\beta''(t) + \int_0^t \beta''(s) \overbrace{\omega_n \operatorname{sen}((t-s)\omega_n)}^{\frac{d}{ds} \cos(t-s)\omega_n} ds \right) \\ &= -B_n(g) \int_0^t \beta'''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds. \end{aligned}$$

Ahora obtenemos

$$\left| \sum_{k=1}^n B_k(g) X_k(x) \int_0^t \beta'''(s) \cos((t-s)\omega_k) ds \right| \leq \frac{2}{\pi \cos 2^{-1} \pi \tau} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 + k} + \frac{1}{n} \right) \int_0^T |\beta'''(s)| ds \quad (2.8)$$

para  $0 \leq x \leq \tau < 1$  y  $0 \leq t \leq T$ , lo que prueba la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \int_0^t \beta'''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \quad \text{uniformemente en } [0, \tau] \times [0, T]$$

para cada  $\tau \in ]0, 1[$  y  $T > 0$ . Es decir, la expresión

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= g(x) \beta''(t) + v_{tt}(x, t) \\ &= g(x) \beta''(t) - \sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \int_0^t \beta'''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \end{aligned} \quad (2.9)$$

es una función continua en  $]0, 1[ \times ]0, \infty[$ . Las derivadas respecto de  $x$  se estudian igualmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} X_n(x) \int_0^t \beta'(s) \cos((t-s)\omega_n) ds &= \left( \int_0^t \beta'(s) \overbrace{\omega_n \operatorname{sen}((t-s)\omega_n)}^{-\frac{d}{ds} \cos(t-s)\omega_n} ds \right) \overbrace{\sqrt{2} \cos x \omega_n}^{\widehat{X}_n(x)} \\ &= \left( -\beta'(t) + \int_0^t \beta''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \right) \widehat{X}_n(x). \end{aligned}$$

Razonado como en (A.16) y (2.7) (ver (A.20) en Lema A.2) se obtiene la acotación

$$\left| \sum_{k=1}^n B_k(g) \widehat{X}_k(x) \int_0^t \beta''(s) \cos((t-s)\omega_k) ds \right| \leq \frac{2}{\pi \cos 2^{-1} \pi \tau} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 + k} + \frac{1}{n} \right) \int_0^T |\beta''(s)| ds \quad (2.10)$$

para  $0 \leq x \leq \tau < 1$  y  $0 \leq t \leq T$ , lo que prueba la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} B_n(g) \widehat{X}_n(x) \left( \beta'(t) + \int_0^t \beta''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \right) \quad \text{uniformemente en } [0, \tau] \times [0, T]$$

para cada  $\tau \in ]0, 1[$  y  $T > 0$ . Es decir, la expresión

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= g'(x) \beta(t) + v_x(x, t) \\ &= g'(x) \beta(t) + \sum_{n \geq 1} B_n(g) \widehat{X}_n(x) \left( -\beta'(t) + \int_0^t \beta''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \right) \end{aligned}$$

es una función continua en  $]0, 1[ \times ]0, \infty[$ . Por último

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X_n(x) \left( -\beta'(t) + \int_0^t \beta'(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \right) &= \left( \int_0^t \beta''(s) \overbrace{\omega_n \operatorname{sen}((t-s)\omega_n)}^{\frac{d}{ds} \cos(t-s)\omega_n} ds \right) X_n(x) \\ &= \left( \beta''(t) - \int_0^t \beta'''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \right) X_n(x). \end{aligned}$$

La estimación (2.8) prueba la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \left( \beta''(t) - \int_0^t \beta'''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \right) \quad \text{uniformemente en } [0, \tau] \times [0, T]$$

para cada  $\tau \in ]0, 1[$  y  $T > 0$ . Es decir, la expresión

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= v_{xx}(x, t) \\ &= \sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \left( \beta''(t) - \int_0^t \beta'''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \right) \\ &= g(x) \beta''(t) - \sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \int_0^t \beta'''(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \\ &= u_{tt}(x, t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

es una función continua en  $]0, 1[ \times ]0, \infty[$ .

De esta forma, se ha probado

**Teorema 2.1 (Existencia y unicidad)** *Para cada función  $\beta \in C^3(\mathbb{R}_+)$ , con  $\beta(0) = \beta'(0) = 0$ , el desarrollo*

$$u(x, t) = x\beta(t) - \sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \int_0^t \beta'(s) \cos((t-s)\omega_n) ds \quad (2.12)$$

denota una función en la clase  $\mathcal{C}([0, 1] \times [0, \infty]) \cap \mathcal{C}^2(]0, 1[ \times ]0, \infty[)$  que verifica el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{en } ]0, 1[ \times ]0, \infty[, \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = \beta(t), & t \geq 0, \\ u(\cdot, 0) = u_t(\cdot, 0) \equiv 0 & \text{en } [0, 1]. \end{cases}$$

Además, es la única solución en la clase de las funciones con energía finita.  $\square$

## 2.2. Dos ejemplos ilustrativos

### 2.2.1. Forzamiento parabólico

Al forzamiento parabólico en el extremo derecho

$$\beta(t) = t^2,$$

le corresponde la vibración no acotada

$$\begin{aligned} u(x, t) &= xt^2 - 2 \sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \int_0^t s \cos((t-s)\omega_n) ds \\ &= \underbrace{xt^2}_{\text{(no acotado)}} - \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{B_n(g)}{\omega_n^2} \operatorname{sen}^2 \frac{t\omega_n}{2} X_n(x)}_{\text{(acotado)}}, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty[. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En el siguiente capítulo se aborda su *simulación numérica*.

### 2.2.2. Forzamiento armónico. Resonancia en frecuencia

Cuando el forzamiento es armónico

$$\beta(t) = c_0(1 - \cos t\Omega)$$

pueden surgir fenómenos interesantes debido a la coexistencia de las diversas frecuencias de vibración que intervienen: la del forzamiento,  $\Omega$ , y las naturales de vibración de la cuerda,  $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ . Detengámonos en el cálculo

$$\begin{aligned} \int_0^t \operatorname{sen}(s\Omega) \cos((t-s)\omega_n) ds &= \frac{1}{2} \int_0^t [\operatorname{sen}(t\omega_n + s(\Omega - \omega_n)) - \operatorname{sen}(t\omega_n - s(\Omega + \omega_n))] ds \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\cos(t\omega_n + s(\Omega - \omega_n))}{\Omega - \omega_n} + \frac{\cos(t\omega_n - s(\Omega + \omega_n))}{\Omega + \omega_n} \right] \Big|_{s=0}^t \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\cos(t\Omega) - \cos(t\omega_n)}{\Omega - \omega_n} + \frac{\cos(t\Omega) - \cos(t\omega_n)}{\Omega + \omega_n} \right] \\ &= \Omega \frac{\cos(t\Omega) - \cos(t\omega_n)}{\omega_n^2 - \Omega^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, el  $n$ -ésimo perfil temporal interviene en la solución mediante

$$u(x, t) = c_0 x (1 - \cos t\Omega) - c_0 \sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \Omega^2 \frac{\cos(t\Omega) - \cos(t\omega_n)}{\omega_n^2 - \Omega^2}, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty[,$$

con la eventual singularidad  $\Omega = \omega_n$ , para algún  $n > 1$ . Aparece, por tanto, el fenómeno de la *resonancia en frecuencia*, cuando  $\Omega \rightarrow \omega_{n_0}$ . En ese caso, la Regla de L'Hôpital lleva a

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega_{n_0}} \Omega^2 \frac{\cos(t\Omega) - \cos(t\omega_{n_0})}{\omega_{n_0}^2 - \Omega^2} = \lim_{\Omega \rightarrow \omega_{n_0}} \frac{\cos(t\Omega) - \cos(t\omega_{n_0})}{\left(\frac{\omega_{n_0}}{\Omega}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2} t \omega_{n_0} \sin t \omega_{n_0}, \quad t \geq 0.$$

Es decir,

$$u(x, t) = \underbrace{c_0 x (1 - \cos t\Omega)}_{\text{(acotado)}} - \underbrace{\frac{c_0}{2} t \omega_{n_0} B_{n_0}(g) X_{n_0}(x) \sin t \omega_{n_0}}_{\text{(no acotado)}} - \underbrace{c_0 \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \neq n_0}} B_n(g) X_n(x) \Omega^2 \frac{\cos(t\Omega) - \cos(t\omega_n)}{\omega_n^2 - \Omega^2}}_{\text{(acotado)}}, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty[$$

A pesar de que el forzamiento puede ser pequeño,  $c_0 \ll 1$ , si es armónico con una frecuencia de vibración  $\Omega$  coincidente con una frecuencia natural de vibración de la cuerda,  $\omega_{n_0} = \sqrt{\lambda_{n_0}}$ , en el correspondiente perfil temporal se produce un aumento creciente en la magnitud de vibración con posibles resultados catastróficos.

En el siguiente capítulo se aborda su *simulación numérica*.

## **Parte II**

# **El modelo discreto**



# Capítulo 3

## El modelo discreto

Comenzamos por aproximar la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt} - u_{xx} = f, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, T[,$$

¿Qué aproximación usar? No existe una respuesta general a esta pregunta. Existen guías basadas en la consistencia, estabilidad y convergencia que pretenden razonar sobre aproximaciones de la ecuación cuyas soluciones converjan a la solución exacta.

### 3.1. Discretización. Consistencia

Consideremos la discretización de  $\mathbb{R} \times [0, T]$  dada por el mallado

$$\begin{cases} x_j = jh, & j \in \mathbb{Z}, h > 0, \\ t_n = nk, & n = 0, 1, \dots, N, \quad k = \frac{T}{N}, \end{cases}$$

en cuyos nodos interiores se realizará la aproximación.

**Proposición 3.1** *Para soluciones regulares se verifica*

$$u(x, t+k) - R^2 u(x+h, t) - 2(1-R^2)u(x, t) + R^2 u(x-h, t) + u(x, t-k) = k^2 (u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + O(k^2))$$

para el parámetro de Courant  $R = \frac{k}{h}$ . Es decir, el esquema centrado y simétrico en las variables temporal y espacial

$$U_j^{n+1} = R^2 U_{j+1}^n + 2(1-R^2)U_j^n + R^2 U_{j-1}^n - U_j^{n-1} + k^2 F_j^n, \quad F_j^n = f(x_j, t_n)$$

es consistente con la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt} - u_{xx} = f.$$

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier función regular,  $v(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , se verifica

$$v(z \pm \widehat{z}) = v(z) \pm v'(z)\widehat{z} + \frac{1}{2}v''(z)\widehat{z}^2 \pm v'''(z)\widehat{z} + O(\widehat{z}^4),$$

Por tanto,

$$v(z + \widehat{z}) - 2v(z) + v(z - \widehat{z}) = v''(z)\widehat{z}^2 + O(\widehat{z}^4).$$

Aplicando esta propiedad a una función regular  $u(x, t)$  se deduce

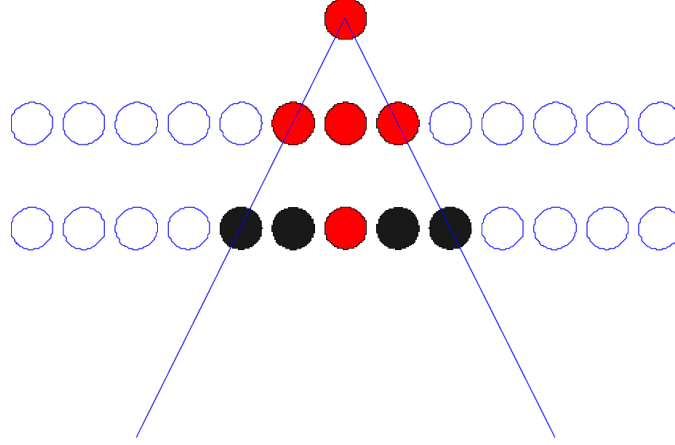
$$\begin{cases} u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t) = u_{xx}(x, t)h^2 + O(h^4), \\ u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k) = u_{tt}(x, t)k^2 + O(k^4). \end{cases}$$

De esta forma, para el parámetro  $R$ , se satisface

$$k^2 L(x, t) = k^2 (u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - f(x, t)) + k^2 O(k^2).$$

de donde se obtiene el resultado. □

**Observación 3.1** De la molécula computacional, deducimos el *dominio computacional*. □



### 3.2. Convergencia del problema de valor inicial

Funcionalmente, se trata de un esquema de dos etapas que, en el espacio de sucesiones reales  $\ell$ , puede expresarse en la forma

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathcal{A}\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1} + k^2 \mathbf{F}^n, \quad \mathbf{U}^n = \{U_j^n, j \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbf{F}^n = \{F_j^n, j \in \mathbb{Z}\},$$

con

$$(\mathcal{A}\mathbf{U})_j = R^2(U_{j+1} + U_{j-1}) + 2(1 - R^2)U_j.$$

Para los correspondientes valores de la solución exacta  $\mathbf{u}^n = \{u_j^n = u(x_j, t_n) : j \in \mathbb{Z}\}$ , se tendrá

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathcal{A}\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1} + k^2 \mathbf{F}^n + k^2 \overset{\text{truncamiento local}}{\mathbf{L}^n}, \quad \mathbf{L}^n = O(k^2)$$

**Definición 3.1** Se dice que el esquema es consistente si dado  $T > 0$

$$\max_{0 \leq n, k \leq T} \|\mathbf{L}^n\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } (h, k) \rightarrow (0, 0),$$

para alguna norma  $\|\cdot\|$  en  $\ell$ , supuesto  $R$  constante.

Nótese que en nuestro modelo el orden de precisión es  $p = 2$  pues

$$\mathbf{L}^n = O(k^2).$$

El error local  $\mathbf{E}^n = \mathbf{U}^n - \mathbf{u}^n$  satisface la aproximación en dos etapas

$$\mathbf{E}^{n+1} = \mathcal{A}\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1} - k^2 \mathbf{L}^n$$

La función nodal vectorial  $\vec{\mathbf{E}}_j^n = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_j^n \\ \mathbf{E}_j^{n-1} \end{pmatrix}$  satisface

$$\vec{\mathbf{E}}^{n+1} = \mathfrak{A} \vec{\mathbf{E}}^n - k^2 \vec{\mathbf{L}}^n \quad \text{en } \ell \times \ell, \quad \vec{\mathbf{L}}^n = \begin{pmatrix} O(k^2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

con

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \end{pmatrix}.$$

Obviamente, la convergencia del esquema involucra al error.

**Definición 3.2** Se dice que el esquema es convergente si para cada  $(x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, T[$  se verifica

$$\|\vec{\mathbf{E}}^n\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } (h, k) \rightarrow (0, 0),$$

supuesto  $(x_j, t_n) \rightarrow (x, t)$ , para cualquier estado inicial.

Los espacios de sucesiones más usuales son  $\ell_{p,h}$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $h > 0$ , asociados a las normas

$$\|\mathbf{U}\|_{p,h} = \begin{cases} \left( h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathbf{U}_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{j \in \mathbb{Z}} |\mathbf{U}_j|, & p = \infty. \end{cases}$$

Para funciones nodales vectoriales  $\vec{\mathbf{U}} \in \ell_{p,h} \times \ell_{p,h}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , se considerarán las normas productos

$$\|\vec{\mathbf{U}}\|_{p,h} = \begin{cases} \left( \|\mathbf{U}_1\|_{p,h}^p + \|\mathbf{U}_2\|_{p,h}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max \{ \|\mathbf{U}_1\|_{\infty,h}, \|\mathbf{U}_2\|_{\infty,h} \}, & p = \infty \end{cases} \quad \vec{\mathbf{U}} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \in \ell \times \ell.$$

Nótese que la norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  no depende del paso espacial  $h$ .

Regresemos al estudio de la convergencia mediante el esquema del error

$$\vec{\mathbf{E}}^{n+1} = \mathfrak{A} \vec{\mathbf{E}}^n - k^2 \vec{\mathbf{L}}^n = \mathfrak{A}^2 \vec{\mathbf{E}}^{n-1} - k^2 (\vec{\mathbf{L}}^n + \mathfrak{A}^2 \vec{\mathbf{L}}^{n-1}) = \dots = \mathfrak{A}^n \vec{\mathbf{E}}^1 - k^2 \sum_{q=1}^n \mathfrak{A}^{n-q} \vec{\mathbf{L}}^q$$

que no debe ampliarse excesivamente en las  $n - i$  etapas. Esta idea lleva a la noción de estabilidad referida a normas en el espacio de las sucesiones. Así en un espacio de sucesiones normado para  $\|\cdot\|$  se considerará la norma subordinada

$$\|\mathfrak{A}\| \doteq \sup_{\vec{\mathbf{U}} \neq \vec{\mathbf{0}}} \frac{\|\mathfrak{A} \vec{\mathbf{U}}\|}{\|\vec{\mathbf{U}}\|}.$$

**Definición 3.3** El esquema vectorial es estable funcionalmente, con orden de truncamiento 2, si para cada  $T > 0$  existe una constante positiva  $C_T$ , independiente de  $n$ , tal que

$$\|\mathfrak{A}^n\| \leq n^{2-1} C_T,$$

con  $0 \leq nk \leq T$ , siendo  $k$  el paso temporal del malla.

**Observación 3.2** Resulta igualmente útil la desigualdad de estabilidad según Lax-Friedrich

$$\|\mathfrak{A}^n \mathbf{U}\| \leq n^{2-1} C_T \|\mathbf{U}\|, \quad \mathbf{U} \neq \mathbf{0},$$

en la que se aprecia mejor que la noción de estabilidad es próxima a las denominadas desigualdades de la energía. Usualmente, la estabilidad requiere alguna restricción. Cuando ninguna restricción es requerida el esquema es incondicionalmente estable.  $\square$

**Teorema 3.1 (Teorema de Equivalencia de Lax–Richtmyer)** *Un esquema consistente es convergente sí y sólo sí es estable.*

**Prueba** Para simplificar, sólo veremos, de momento que la estabilidad es una condición suficiente para la convergencia. Tomando normas en la igualdad

$$\vec{\mathbf{E}}^{n+1} = \mathfrak{A}^n \vec{\mathbf{E}}^1 - k^2 \sum_{q=1}^n \mathfrak{A}^{n-q} \vec{\mathbf{L}}^q$$

se tiene

$$\|\vec{\mathbf{E}}^{n+1}\| \leq \|\mathfrak{A}^n\| \cdot \|\vec{\mathbf{E}}^1\| + k^2 \sum_{q=1}^n \|\mathfrak{A}^{n-q}\| \cdot \|\vec{\mathbf{L}}^q\|,$$

con lo que  $\|\mathfrak{A}^n\| \leq nC_T$  lleva a

$$\|\vec{\mathbf{E}}^{n+1}\| \leq C_T \left( n \|\vec{\mathbf{E}}^1\| + k^2 n^2 \max_{q=1, \dots, n} \|\vec{\mathbf{L}}^q\| \right),$$

de donde  $nk \leq T$  implica

$$\|\vec{\mathbf{E}}^{n+1}\| \leq C_T \left( n \|\vec{\mathbf{E}}^1\| + T^2 \max_{0 \leq qk \leq T} \|\vec{\mathbf{L}}^q\| \right)$$

Como  $0 \leq q \leq n$ , la consistencia permite

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \max_{0 \leq nk \leq T} \|\vec{\mathbf{L}}^n\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \|\vec{\mathbf{E}}^{n+1}\| = 0,$$

supuesto  $\lim_{n \rightarrow 0} n \|\vec{\mathbf{E}}^1\| = 0$ . □

En lo referente a las normas

$$\|\cdot\|_{p,h} = h^{\frac{1}{p}} \|\cdot\|_p, \quad 1 \leq p < \infty,$$

podemos prescindir del paso  $h$  en las desigualdades de la estabilidad y usar las normas  $\|\cdot\|_p$  propias de los espacios de sucesiones  $\ell_p$ . En efecto, se tendría

$$\|\mathfrak{A}\|_{p,h} \doteq \sup_{\vec{\mathbf{U}} \neq \vec{\mathbf{0}}} \frac{\|\mathfrak{A}\vec{\mathbf{U}}\|_{p,h}}{\|\vec{\mathbf{U}}\|_{p,h}} = \sup_{\vec{\mathbf{U}} \neq \vec{\mathbf{0}}} \frac{\|\mathfrak{A}\vec{\mathbf{U}}\|_p}{\|\vec{\mathbf{U}}\|_p} \doteq \|\mathfrak{A}\|_p.$$

Para obtener la convergencia debemos recuperar la estabilidad referida a las normas  $\|\cdot\|_{p,h}$  que incorporan el paso  $h$ .

### 3.3. Análisis de von Neumann

Como se ha comentado, en lo que sigue, mientras estudiemos la estabilidad, sólo consideremos el paso uniforme  $h = 1$ . Apliquemos las ideas anteriores a sucesiones  $\mathbf{U} = \{U_j\}_j \in \ell_1$ . Se define la *transformada discreta de Fourier* mediante la función

$$\widehat{\mathbf{U}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-i\xi j} U_j \in \mathbb{C}, \quad \xi \in ]-\pi, \pi].$$

Se obtiene

**Teorema 3.2** Para cada  $\mathbf{U} \in \ell_1$  su transformada verifica

$$U_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{e^{i\xi j} \widehat{\mathbf{U}}(\xi)}^{(\text{onda o modo discreto})} \underbrace{d\xi}_{(\text{magnitud})}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

y si  $\mathbf{U} \in \ell_1 \cap \ell_2$  se tiene igualdad de Parseval

$$\|\widehat{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{L}^2(-\pi, \pi)} = \|\mathbf{U}\|_{\ell_2}.$$

**Prueba** Para cada  $j \in \mathbb{Z}$  se verifica

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi j} \widehat{\mathbf{U}}(\xi) d\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-i\xi m} U_m d\xi = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} U_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi(j-m)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq j}} U_m \frac{e^{i\xi(j-m)}}{i(j-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} U_j \int_{-\pi}^{\pi} d\xi = U_j. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{L}^2(-\pi, \pi)}^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{\mathbf{U}}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{\mathbf{U}}(\xi) \overline{\widehat{\mathbf{U}}(\xi)} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j U_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\xi j} \overline{\widehat{\mathbf{U}}(\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j U_j \overline{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi j} \widehat{\mathbf{U}}(\xi) d\xi} = \sum_j U_j \overline{U_j} = \|\mathbf{U}\|_{\ell_2}^2. \quad \square \end{aligned}$$

**Observación 3.3** Ahora podemos considerar los operadores dados por las transformadas discreta de Fourier

$$\ell_2 \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{L}^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$$

$$\ell_2 \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} \mathbb{L}^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$$

Entonces la igualdad de Parseval determina

$$\|\mathcal{F}\mathbf{U}\|_{\mathbb{L}^2(-\pi, \pi)} = \|\mathbf{U}\|_{\ell_2}, \quad \|\mathcal{F}^{-1}\widehat{\mathbf{U}}\|_{\ell_2} = \|\widehat{\mathbf{U}}\|_{\mathbb{L}^2(-\pi, \pi)},$$

de donde

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathbb{L}^2(-\pi, \pi)} = \|\mathcal{F}^{-1}\|_{\ell_2} = 1. \quad \square$$

Regresemos al operador

$$(\mathcal{A}\mathbf{U})_j = \sum_{m=-1}^1 c_m U_{j+m}, \quad c_{-1} = c_1 = R^2, \quad c_0 = 2(1 - R^2).$$

De la definición obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi j} \widehat{\mathcal{A}\mathbf{U}}(\xi) d\xi = \overbrace{\sum_{m=-1}^1 c_m U_{j+m}}^{(\mathcal{A}\mathbf{U})_j} = \sum_{m=-1}^1 c_m \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi(j+m)} \widehat{\mathbf{U}}(\xi) d\xi \right]$$

es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi j} \left[ \widehat{\mathcal{A}\mathbf{U}}(\xi) - \left( \sum_{m=-1}^1 c_m e^{i\xi m} \right) \widehat{\mathbf{U}}(\xi) \right] d\xi = 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Entonces la unicidad de la transformada determina la función

$$\widehat{\mathcal{A}\mathbf{U}}(\xi) = g(\xi) \widehat{\mathbf{U}}(\xi), \quad \xi \in ]-\pi, \pi],$$

en la que se ha introducido el *factor de amplificación*

$$g(\xi) = 2(1 - R^2) + 2R^2 \cos \xi = 2 \left( 1 - 2R^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} \right), \quad -\pi < \xi \leq \pi,$$

analítica en  $]-\pi, \pi]$  con periodicidad  $g(-\pi) = g(\pi)$ .

Definiendo el funcional

$$\mathbb{L}^2(-\pi, \pi; \mathbb{C}) \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathbb{L}^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$$

mediante

$$(\mathcal{G}f)(\xi) = g(\xi)f(\xi),$$

se verifica la conmutación del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \ell_2 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathbb{L}^2(-\pi, \pi; \mathbb{C}) \\ \mathcal{A} \downarrow & & \downarrow \mathcal{G} \\ \ell_2 & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \mathbb{L}^2(-\pi, \pi; \mathbb{C}) \end{array}$$

es decir

$$\mathcal{A}^n = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{G}^n \mathcal{F} \quad \text{para cualquier } n \geq 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}^n\|_2 &\leq \|\mathcal{F}^{-1}\|_2 \|\mathcal{G}^n\|_2 \|\mathcal{F}\|_2 & \|\mathcal{F}\|_2 &= \underbrace{\|\mathcal{F}^{-1}\|_2}_{=1} = 1 & \|\mathcal{A}^n\|_2 &\leq \|\mathcal{G}^n\|_2, \\ \|\mathcal{G}^n\|_2 &\leq \|\mathcal{F}\|_2 \|\mathcal{A}^n\|_2 \|\mathcal{F}^{-1}\|_2 & & & & \Rightarrow \|\mathcal{A}^n\|_2 = \|\mathcal{G}^n\|_2. \end{aligned}$$

**Teorema 3.3** Para cada  $n \geq 1$ , se tiene

$$\|\mathcal{A}^n\|_2 = \|\mathcal{G}^n\|_2 = \max_{-\pi < \xi \leq \pi} |(g(\xi))^n| = \max_{-\pi \leq \xi \leq \pi} |(g(\xi))^n|.$$

**Prueba** Basta detenernos en el caso  $n = 1$ .

1. Para cada  $f \in \mathbb{L}^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$  se tiene

$$\|\mathcal{G}f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |(\mathcal{G}f)(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} |g(\xi)f(\xi)|^2 d\xi \leq \left( \max_{-\pi < \xi \leq \pi} |g(\xi)| \right)^2 \|f\|_2^2,$$

es decir,

$$\|\mathcal{G}\|_2 \leq \max_{-\pi < \xi \leq \pi} |g(\xi)|.$$

2. Supongamos  $\|\mathcal{G}\|_2 < \max_{-\pi < \xi \leq \pi} |g(\xi)|$ . Por continuidad existirá un subintervalo  $[a, b] \subset ]-\pi, \pi]$  tal que

$$|g(\xi)| > \|\mathcal{G}\|_2, \quad \xi \in [a, b].$$

Se define entonces

$$\tilde{f}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [a, b], \\ 0, & \xi \notin [a, b], \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{f}\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi = b - a,$$

con lo que se deduce la contradicción

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 \|\tilde{f}\|_2^2 \geq \|\mathcal{G}\tilde{f}\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |(\mathcal{G}\tilde{f})(\xi)|^2 d\xi = \int_a^b |g(\xi)|^2 d\xi > \|\mathcal{G}\|_2^2 (b - a) = \|\mathcal{G}\|_2^2 \|\tilde{f}\|_2^2. \quad \square$$

**Observación 3.4** Nótese que ahora se verifica la igualdad de amplificación

$$\widehat{\mathcal{A}^n \mathbf{U}}(\xi) = (\mathcal{G}^n \widehat{\mathbf{U}})(\xi) = (g(\xi))^n \widehat{\mathbf{U}}(\xi), \quad \xi \in ]-\pi, \pi]. \quad \square$$

Regresemos al operador vectorial

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \end{pmatrix}$$

que satisface la igualdad de amplificación

$$\widehat{\mathfrak{A}^n \vec{\mathbf{U}}}(\xi) = (\mathbf{G}(\xi))^n \widehat{\vec{\mathbf{U}}}(\xi) = (\mathfrak{G}^n \widehat{\vec{\mathbf{U}}})(\xi), \quad -\pi < \xi \leq \pi, \quad n \geq 1,$$

para

$$(\mathfrak{G} \vec{f})(\xi) = \mathbf{G}(\xi) \vec{f}(\xi), \quad \vec{f} \in (\mathbb{L}^2(-\pi, \pi : \mathbb{C}))^2,$$

con

$$\mathbf{G}(\xi) = \begin{pmatrix} g(\xi) & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad -\pi < \xi \leq \pi,$$

analítica en  $]-\pi, \pi]$  con periodicidad  $\mathbf{G}(-\pi) = \mathbf{G}(\pi)$ .

**Teorema 3.4** Para  $n \geq 1$ , se tiene

$$\|\mathfrak{A}^n\|_2 = \|\mathfrak{G}^n\|_2 = \max_{-\pi < \xi \leq \pi} |(\mathbf{G}(\xi))^n|_2 = \max_{-\pi < \xi \leq \pi} |(\mathbf{G}(\xi))^n|_2,$$

donde  $|\cdot|_2$  representa la norma euclídea en  $\mathbb{C}^2$ , para vectores o para matrices cuadradas de orden 2.

**Prueba** De nuevo, basta hacer el caso  $n = 1$ .

1. Para cada  $\vec{f} \in (\mathbb{L}^2(-\pi, \pi : \mathbb{C}))^2$  y cada  $-\pi < \xi \leq \pi$  se tiene

$$|(\mathfrak{G} \vec{f})(\xi)|_2 = |\mathbf{G}(\xi) \vec{f}(\xi)|_2 \leq |\mathbf{G}(\xi)|_2 |\vec{f}(\xi)|_2 \leq \left( \max_{-\pi < \xi \leq \pi} |\mathbf{G}(\xi)|_2 \right) |\vec{f}(\xi)|_2.$$

Integrando en  $]-\pi, \pi[$  se deduce

$$\|\mathfrak{G}\|_2 \leq \max_{-\pi < \xi \leq \pi} |\mathbf{G}(\xi)|_2.$$

2. Supongamos  $\|\mathfrak{G}\|_2 < \max_{-\pi < \xi \leq \pi} |\mathbf{G}(\xi)|_2$ . Puesto que  $\mathbf{G}(\xi)$  es continua en  $\xi \in [-\pi, \pi]$ , existe un intervalo acotado  $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ , en el que  $|\mathbf{G}(\xi)|_2$  alcanza su máximo y tal que

$$|\mathbf{G}(\xi)|_2 > \|\mathfrak{G}\|_2, \quad a \leq \xi \leq b.$$

La definición de norma de un operador en  $\mathbb{C}^2$  indica que para cada  $\xi \in [a, b]$ , existe un vector  $\vec{f}(\xi) \in \mathbb{C}^2$  tal que  $|\vec{f}(\xi)|_2 = 1$  y

$$|\mathbf{G}(\xi) \vec{f}(\xi)|_2 > \|\mathfrak{G}\|_2.$$

Se define entonces

$$\vec{f}^*(\xi) = \begin{cases} \vec{f}(\xi), & \xi \in [a, b], \\ 0, & \xi \notin [a, b], \end{cases}$$

que verifica

$$\begin{cases} \|\mathfrak{G} \vec{f}^*\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |(\mathfrak{G} \vec{f}^*)(\xi)|_2^2 d\xi = \int_a^b |\mathbf{G}(\xi) \vec{f}(\xi)|_2^2 d\xi > \|\mathfrak{G}\|_2^2 (b-a), \\ \|\vec{f}^*\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(\xi)|^2 d\xi = b-a, \end{cases}$$

es decir,

$$\|\mathfrak{G} \vec{f}^*\|_2^2 > \|\mathfrak{G}\|_2^2 \|\vec{f}^*\|_2^2 \Rightarrow \|\mathfrak{G}\|_2 > \|\mathfrak{G}\|_2. \quad \square$$

Podemos deducir la caracterización de estabilidad en  $\ell_2 \times \ell_2$ .

**Teorema 3.5 (Condición de von Neumann)** *Con la notación anterior una condición suficiente para la estabilidad, en  $\ell_2 \times \ell_2$ , del esquema es*

$$\varrho(\mathbf{G}(\xi)) \leq 1, \quad -\pi < \xi \leq \pi.$$

**Prueba** Ante todo,

$$\|\mathfrak{A}^n\|_2 = \|\mathfrak{G}^n\|_2 = \max_{-\pi < \xi \leq \pi} |\mathbf{G}(\xi)^n|_2,$$

donde  $|\cdot|_2$  es la norma 2 matricial. De la descomposición de Jordan

$$\mathbf{G}(\xi)^n = \mathbf{P}(\xi) \mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\xi)^n \mathbf{P}^{-1}(\xi)$$

lleva a la desigualdad

$$|(\mathbf{G}(\xi))^n|_2 \leq |\mathbf{P}(\xi)|_2 \cdot |\mathbf{P}^{-1}(\xi)|_2 \cdot \overbrace{|\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\xi)^n|_2}^{(\text{independiente de } n)} \leq |\mathbf{P}(\xi)|_2 \cdot |\mathbf{P}^{-1}(\xi)|_2 \cdot |\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\xi)|_2^n,$$

de modo que conviene estudiar la estimación

$$|\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\xi)|_2 \leq 1, \quad -\pi < \xi \leq \pi.$$

Nótese que la función matricial  $\xi \mapsto \mathbf{P}(\xi)$  es continua en  $[-\pi, \pi]$ .

Cuando  $\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\xi)$  es una matriz simétrica, y por tanto normal, con uno o dos autovalores distintos, se tendrá

$$|\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\xi)|_2 = \varrho(\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\xi)) = \varrho(\mathbf{G}(\xi)),$$

y bastará la condición

$$\varrho(\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\xi)) = \varrho(\mathbf{G}(\xi)) \leq 1, \quad -\pi < \xi \leq \pi.$$

Si  $\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\xi)$  no es una matriz simétrica se verificará

$$\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\xi) = \begin{pmatrix} \lambda(\xi) & 1 \\ & \lambda(\xi) \end{pmatrix}, \quad \sigma(\mathbf{J}_{\mathbf{G}}(\xi)) = \{\lambda(\xi)\}.$$

Cuando  $\lambda(\xi) = 0$  se obtendrá la estabilidad por tratarse de una matriz nilpotente. En otro caso, denotando  $\lambda(\xi) = \lambda \neq 0$ , podemos formar la representación

$$\mathbf{J}_{\mathbf{G}} = \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{G}} \mathbf{Q}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{G}} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \lambda \end{pmatrix},$$

donde no expresamos la dependencia en  $\xi$  para simplificar. Entonces se tendrá

$$\mathbf{G}^n = \lambda^n \mathbf{P} \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 & n \\ & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \quad \text{y} \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & n \\ & 1 \end{pmatrix} \right|_2^2 = \frac{n^2 + 2 + n\sqrt{n^2 + 4}}{2}.$$

es decir,

$$\mathbf{G}^n = O(n),$$

bajo el supuesto  $|\lambda| \leq 1$ . En ambos casos, la condición de von Neumann lleva a que, fijado  $T > 0$ , se verifique la estimación

$$\|\mathfrak{A}^n\|_2 \leq n C_T,$$

para alguna contante positiva  $C_T$  independiente de  $n$  tales que  $0 \leq nk \leq T$ . □

**Corolario 3.1** *El esquema vectorial gobernado por el operador*

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \end{pmatrix},$$

con

$$(\mathcal{A}\mathbf{U})_j = \mathbb{R}^2(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) + 2(1 - \mathbb{R}^2)U_j^n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

es estable en  $\ell_2 \times \ell_2$  bajo la restricción de estabilidad

$$\mathbb{R} \leq 1.$$

**Prueba** La ecuación característica de la matriz de amplificación

$$\mathbf{G}(\xi) = \begin{pmatrix} g(\xi) & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad -\pi < \xi \leq \pi,$$

con

$$g(\xi) = 2 \left( 1 - 2\mathbb{R}^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} \right), \quad -\pi < \xi \leq \pi,$$

es

$$(\lambda(\xi))^2 - g(\xi)\lambda(\xi) + 1 = 0, \quad -\pi < \xi \leq \pi.$$

Cuando  $\xi = 0$  la ecuación característica

$$(\lambda(0) - 1)^2 = 0,$$

indica que los autovalores son reales e idénticos  $\lambda_{\pm}(0) = 1$ . En caso contrario, cálculos directos muestran que los autovalores son complejos conjugados

$$\lambda_{\pm}(\xi) = 1 - 2\mathbb{R}^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} \pm i2\mathbb{R} \operatorname{sen} \frac{\xi}{2} \sqrt{1 - \mathbb{R}^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2}}, \quad -\pi < \xi \leq \pi, \quad \xi \neq 0,$$

bajo la restricción

$$\mathbb{R}^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} \leq 1, \quad -\pi < \xi \leq \pi \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \leq 1.$$

En ambos casos, los módulos de los autovalores son

$$|\lambda_{\pm}(\xi)|^2 = \left( 1 - 2\mathbb{R}^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} \right)^2 + 4\mathbb{R}^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} \left( 1 - \mathbb{R}^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\xi}{2} \right) = 1, \quad -\pi < \xi \leq \pi,$$

verificándose la condición de von Neumann. □

### 3.4. El problema mixto de contorno y valor inicial

Regresemos al problema de contorno y valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f & \text{en } ]0, 1[ \times ]0, T[, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1 & \text{(estado inicial)}. \end{cases}$$

Consideremos la discretización de  $[0, 1] \times [0, T]$  dada por el mallado

$$\begin{cases} x_j = jh, & j = 0, 1, \dots, M, M+1, & h = \frac{1}{M+1}, \\ t_n = nk, & n = 0, 1, \dots, N, & k = \frac{T}{N}, \end{cases}$$



**Observación 3.5** Recuérdese que las incógnitas son los valores interiores  $V_j^n$ ,  $j = 1, \dots, M$ , mientras que los valores de contorno a izquierda y derecha son conocidos  $V_0^n = V_{M+1}^n = 0$ .  $\square$

Con esa misma notación, se tendrá

$$\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}}^n - \tilde{\mathbf{u}}^{n-1} + k^2\mathbf{F}^n + k^2\tilde{\mathbf{L}}^n \quad \text{en } \mathbb{R}^M, \quad \tilde{\mathbf{L}}^n = O(k^2).$$

referida a los valores exactos del problema de contorno y valor inicial. De modo que el correspondiente error local  $\tilde{\mathbf{E}}^n = \tilde{\mathbf{U}}^n - \tilde{\mathbf{u}}^n$  satisface la aproximación en una etapa

$$\tilde{\mathbf{E}}^{n+1} = \mathcal{A}\tilde{\mathbf{E}}^n - \tilde{\mathbf{E}}^{n-1} + k^2\tilde{\mathbf{L}}^n \quad \text{en } \mathbb{R}^M.$$

Para la función nodal vectorial  $\vec{\mathbf{E}}_j^n = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{E}}_j^n \\ \tilde{\mathbf{E}}_j^{n-1} \end{pmatrix}$  se verifica

$$\vec{\mathbf{E}}^{n+1} = \tilde{\mathcal{A}}\vec{\mathbf{E}}^n - k^2\vec{\mathbf{L}}^n \quad \text{en } \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{M+1}, \quad \vec{\mathbf{L}}^n = \begin{pmatrix} O(k^2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

con

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

El desarrollo de la consistencia, estabilidad y convergencia para este tratamiento vectorial es análogo al desarrollado para el tratamiento secuencial de las secciones anteriores, sin más que limitarnos a este tipo de sucesiones introducidas por (3.2)

**Observación 3.6** Nótese la desigualdad

$$\|\tilde{\mathcal{A}}\| \doteq \sup_{\|\vec{\mathbf{U}}\|=1} \|\tilde{\mathcal{A}}\vec{\mathbf{U}}\| \leq \sup_{\|\vec{\mathbf{U}}\|=1} \|\mathcal{A}\vec{\mathbf{U}}\| \doteq \|\mathcal{A}\|.$$

con lo que la estabilidad funcional implica la vectorial, manteniéndose, en consecuencia, la restricción de estabilidad

$$R \leq 1. \quad \square$$

## 3.5. Implementación numérica

### 3.5.1. Forzamiento parabólico

Para facilitar la implementación para un forzamiento parabólico

$$\beta(t) = t^2$$

se han realizado varios scripts en **Matlab**. Por una parte, se ha recogido el cuerpo central del tratamiento

```
function U = cuerdaforzadaparabolica(x,k,T,U0,U1,Fx)
% Resuelve la ecuacion u_tt _u_xx =-2*Fx
% forzada por el cambio de variables
% definida por la malla x mediante un esquema de segundo orden
% \rU_{j}^{n+1}={\tt R} ^{2}\rU_{j-1}^{n}+2(1-{\tt R} ^{2})\rU_{j}^{n}..
% +{\tt R} ^{2}\rU_{j+1}^{n}-\rU_{j}^{n-1}
% Variables de entrada:
% x: Vector de puntos equiespaciados que definen la malla espacial
% k: Paso de integracion en t
% T: Valor final del tiempo de integracion
```

```

%      U0: Vector posicion inicial
%      U1: Vector velocidad inicial
%      Fx: Vector fila funcion fuente espacial
%      Omega: Vector fila funcion peso velocidad angular
%  Variables de salida
%      U: Funcion u(x,T) (en tiempo final)

h = x(2)-x(1); M = length(x);
N = round(T/k);
R=k/h;
RR=R^2;
e = ones(M,1);
U0=U0'; U1=U1';
Fx = Fx';
%Iteracion de pasos temporales
A=spdiags([RR*e 2*(1-RR)*e RR*e],[-1:1,M,M]); %

for n=1:N
    tn=n*k;
    U = A*U1-U0-2*(k^2)*Fx; % vibracion forzada auxiliar
    V=(tn^2)*Fx; % traslado de la vibracin al extremo derecho
    W=U+V; % vibracion forzada parabolicamente en el extremo derecho
    plot(x,W,'.-'); grid on;
    %sound(W);
    title(['Secuencia de la vibracion en el instante t=' num2str(tn)]);
    axis([min(x) max(x) min(W)-.1 max(W)+.1]);
    xlabel('x','FontSize',14); ylabel('u(x,t)','FontSize',14);
    drawnow;
    U0 = U1; U1 = U;
end;
title(['Vibracion de la cuerda forzada parabolicamente en T = ' num2str(T) ' (seg)']);
xlabel('x','FontSize',14); ylabel('u(x,t)','FontSize',14);

```

Nótese que el plot se ha incluido en un bucle para construir frames que produzcan animación.

La función fuente espacial está obtenida mediante

```

function f = fuenteespacial(x)
M = length(x);
for j=1:M
    if x(j) < 1 && x(j) > 0
        f(j) = x(j);
    else f(j) = 0;
    end;
end;

```

Para el estado inicial nulo se ha empleado

```

function f =posicioninicialnula(x)
M = length(x);
for j=1:M
    if x(j) < 1 && x(j) > 0
        f(j) = 0;
    else f(j) = 0;
    end;
end;

```

y

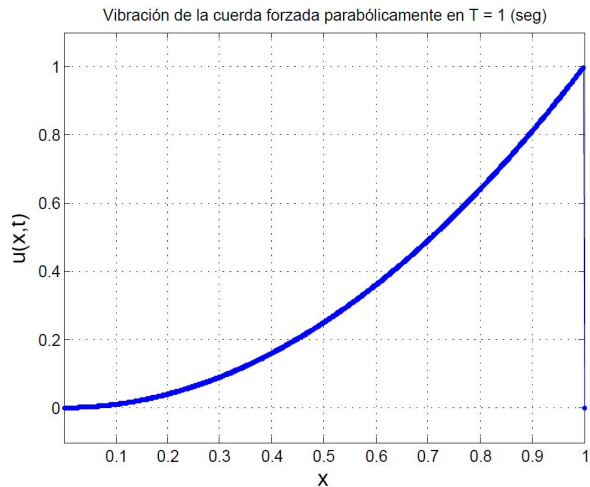
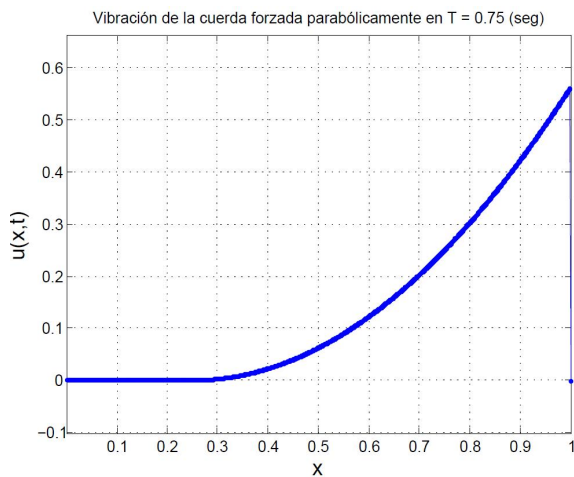
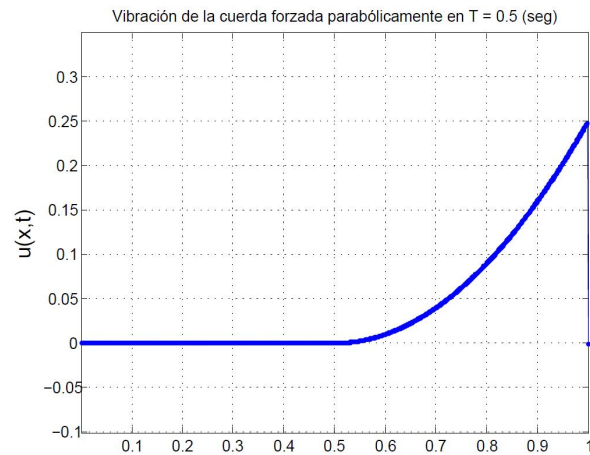
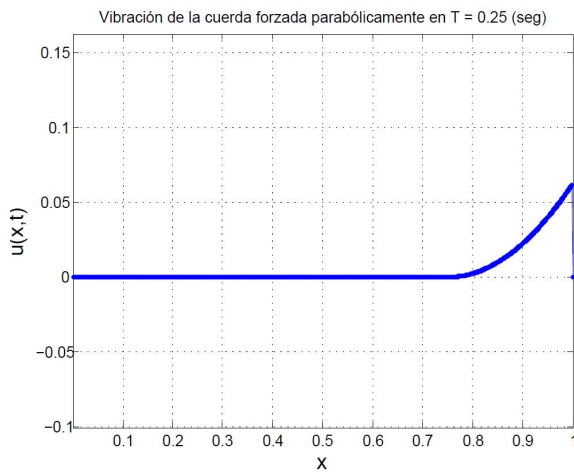
```
function f =velocidadinicialnula(x)
M = length(x);
for j=1:M
    if x(j) < 1 && x(j) > 0
        f(j) = 0;
    else f(j) = 0;
    end;
end;
```

de esta forma resulta sencillo reemplazar estos datos para otros ejemplos.

Finalmente, el script

```
U0=posicioninicialnula(x);
U1=velocidadinicialnula(x);
Fx=fuenteespacial(x); % peso
U=cuerdaforzadaparabolica(x,k,T,U0,U1,Fx);
```

ejecuta los anteriores para datos numéricos admisibles bajo la restricción de estabilidad.



### 3.5.2. Forzamiento armónico

Se puede proceder de forma análoga con una vibración

$$\beta(t) = \text{sen}(t\Omega), \quad t \in ]0, T[,$$

de frecuencia  $\Omega$ , para la que

$$U = A * U1 - U0 - (k^2) * \text{sin}(tn * \Omega) * Wx;$$

es el único cambio reseñable.



# Apéndice



## Apéndice A

# Desarrollos en senos y cosenos

Nos limitamos a una presentación de resultados sobre los desarrollos en senos y cosenos que surgen, entre otras motivaciones, del estudio de los problemas de Sturm–Liouville involucrados en el método de separación de variables. Para simplificar la exposición usaremos la notación

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n} = n\pi, \quad n \geq 1, \quad (\text{frecuencias naturales de vibración})$$

con lo que *las relaciones de ortogonalidad* quedan en la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 \cos x\omega_n \sin x\omega_n dx = 0, \\ \int_{-1}^1 \cos x\omega_n \cos x\omega_m dx = \delta_{n,m} = \int_{-1}^1 \sin x\omega_n \sin x\omega_m dx, \end{array} \right.$$

donde  $\delta_{n,m}$  representa la *delta de Kronecker*.

Motivados por condiciones de contorno de tipo Dirichlet, estamos interesados en los desarrollos relativos a las familias ortonormales de los *modos de vibración*

$$\left\{ \begin{array}{l} X_n(x) = \sqrt{2} \sin x\omega_n, \quad n \geq 1, \\ \langle X_n, X_m \rangle = \delta_{n,m}, \end{array} \right.$$

y en los correspondientes desarrollos

$$u(x) = \sum_{n \geq 1} B_n X_n(x), \quad x \in [0, 1],$$

asociados a cualquier función  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Observación A.1** Cualquier razonamiento de continuidad hasta el borde requerirá la condición adicional  $u(0) = 0 = u(1)$  para estos desarrollos en senos.  $\square$

A la vista de las relaciones de ortogonalidad, procediendo formalmente se tiene, para el producto escalar en  $\mathbb{L}^2(0, 1)$ ,

$$\langle u, X_n \rangle = \sum_{m \geq 1} B_m \langle X_m, X_n \rangle = \sum_{m \geq 1} B_m \delta_{m,n} = B_n.$$

De esta forma se introducen los coeficientes del desarrollo en senos de la función  $u$

$$B_n(u) = \langle u, X_n \rangle, \quad n \geq 1,$$

supuesto  $u \in \mathbb{L}^1(0, 1)$ , con lo que

$$|B_n(u)| \leq \sqrt{2} \int_0^1 |u(x)| dx, \quad n \geq 1.$$

**Observación A.2** En el intervalo  $] -1, 1[$  el sistema trigonométrico viene dado por  $\{1, \cos x\omega_n, \sin x\omega_n\}$ . La teoría de los desarrollos en *serie de Fourier* trata del estudio de representaciones de la forma

$$v(x) = \frac{a_0(v)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(v) \cos x\omega_n + b_n(v) \sin x\omega_n), \quad x \in ] -1, 1],$$

asociadas a cualquier función periódica  $v : ] -1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , donde

$$a_0(v) = \int_{-1}^1 v(x) dx,$$

y

$$\begin{cases} a_n(v) = \int_{-1}^1 v(x) \cos x\omega_n dx, \\ b_n(v) = \int_{-1}^1 v(x) \sin x\omega_n dx \end{cases} \quad n \geq 1, \quad (\text{A.1})$$

Cuando la función  $v$  es *impar*,  $v(x) = -v(-x)$ , los coeficientes  $a_n(v)$ ,  $n \geq 0$ , son todos nulos, dando lugar a los *desarrollos en senos* de funciones definidas en  $[0, 1]$ . En efecto, para  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  formemos la *extensión impar*

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} u(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ -u(-x), & -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

con  $\hat{u}(x) = \hat{u}(x + 2)$ . Entonces

$$\begin{cases} a_n(\hat{u}) = 0, \quad n \geq 0, \\ b_n(\hat{u}) = \underbrace{\sqrt{2} \sqrt{2} \int_0^1 u(x) \sin x\omega_n dx}_{B_n(u)}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Con lo que la *serie de Fourier* determina el desarrollo

$$u(x) = \sum_{n \geq 1} B_n(u) X_n(x), \quad x \in [0, 1].$$

Nótese que la continuidad de  $\hat{u}$  en el origen requiere la condición adicional  $u(0) = 0$ . □

**Observación A.3** Recuérdese las inclusiones

$$\mathbb{L}^\infty(0, 1) \subset \mathbb{L}^p(0, 1) \subset \mathbb{L}^1(0, 1), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Por otra parte, resulta inmediato que las funciones acotadas, entre las que están las continuas a trozos, pertenecen a  $\mathbb{L}^\infty(0, 1)$ . □

Realcemos que de momento los desarrollos son sólo formales. Nos interesamos en mostrar que se trata de una igualdad funcional en la métrica del espacio  $\mathbb{L}^2(0, 1)$ . Empleemos aun la notación formal

$$T \doteq \sum_{n \geq 1} B_n X_n$$

y la igualdad

$$T_n \doteq \sum_{k=1}^n B_k X_k.$$

La elección  $B_k = B_k(u)$  determina la serie formal

$$S[u] \doteq \sum_{n \geq 1} B_n(u) X_n$$

y la igualdad funcional

$$S_n[u] \doteq \sum_{k=1}^n B_k(u) X_k.$$

Las relaciones de ortogonalidad muestran las propiedades

$$\|T_n\|^2 = \sum_{k=1}^n |B_k|^2 \quad \text{y} \quad \langle u, T_n \rangle = \sum_{k=1}^n B_k B_k(u) \quad (\text{A.2})$$

de donde

$$\|u - T_n\|^2 = \|u\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n B_k B_k(u) + \sum_{k=1}^n |B_k|^2,$$

y consecuentemente

$$\|u - T_n\|^2 = \|u\|^2 + \sum_{k=1}^n |B_k - B_k(u)|^2 - \sum_{k=1}^n |B_k(u)|^2, \quad (\text{A.3})$$

obteniéndose

**Proposición A.1** *Sea  $u \in \mathbb{L}^2(0, 1)$ . Asociado a cada desarrollo formal*

$$T(x) \doteq \sum_{n \geq 1} B_n X_n(x)$$

*se tiene la desigualdad*

$$\int_0^1 |u(x) - S_n[u](x)|^2 dx \leq \int_0^1 |u(x) - T_n(x)|^2 dx \quad (\text{A.4})$$

*que es una igualdad solamente si  $S[u](x) = T(x)$ . Además, se verifica*

$$\int_0^1 |u(x) - S_n[u](x)|^2 dx = \int_0^1 |u(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^n |B_k(u)|^2$$

*y la desigualdad de Bessel*

$$\sum_{n \geq 1} |B_n(u)|^2 \leq \int_0^1 |u(x)|^2 dx \quad (\text{A.5})$$

□

**Observación A.4** La desigualdad (A.4) permite formar

$$\int_0^1 |u(x) - S[u](x)|^2 dx \leq \int_0^1 |u(x) - T(x)|^2 dx$$

que indica que en la norma  $\mathbb{L}^2(0, 1)$  la serie del desarrollo en senos  $S[u]$  es la más cercana a la función  $u$ . □

Análogamente, si pretendiéramos un desarrollo en cosenos

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} A_n(u) \widehat{X}_n(x), \quad x \in [0, 1],$$

para

$$\begin{cases} \widehat{X}_0(x) \equiv 1, \widehat{X}_n(x) = \sqrt{2} \cos x\omega_n, & n \geq 1, \\ \langle \widehat{X}_n, \widehat{X}_m \rangle = \delta_{n,m}, \end{cases}$$

obtendríamos la condición necesaria

$$A_0(u) = \int_0^1 u(x) dx, \quad A_n(u) = \langle u, \widehat{X}_n \rangle, \quad n \geq 0,$$

de nuevo, supuesto  $u \in \mathbb{L}^1(0, 1)$ . Un razonamiento análogo permite extender los resultados de la Proposición A.1 al desarrollo en cosenos y deducir la desigualdad de Bessel

$$\sum_{n \geq 0} |A_n(u)|^2 \leq \int_0^1 |u(x)|^2 dx. \quad (\text{A.6})$$

**Observación A.5** Regresemos al sistema trigonométrico  $\{1, \cos x\omega_n, \sen x\omega_n\}$  en  $] -1, 1]$  y a los desarrollos en *serie de Fourier*

$$v(x) = \frac{a_0(v)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(v) \cos x\omega_n + b_n(v) \sen x\omega_n), \quad x \in ] -1, 1],$$

cualquier función periódica  $v : ] -1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Cuando la función  $v$  es *impar*,  $v(x) = -v(-x)$ , los coeficientes  $b_n(v)$ ,  $n \geq 1$  son todos nulos (ver (A.1)), dando lugar a los *desarrollos en senos* de funciones definidas en  $[0, 1]$ . En efecto, si consideramos para una función  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la *extensión par*

$$\check{u}(x) = \begin{cases} u(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(-x), & -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

con  $\check{u}(x) = \check{u}(x + 2)$ . Entonces

$$\begin{cases} a_n(\check{u}) = \sqrt{2} \overbrace{\sqrt{2} \int_0^1 u(x) \cos nxdx}^{A_n(u)}, & n \geq 0, \\ b_n(\check{u}) = 0, & n \geq 1. \end{cases}$$

Con lo que la *serie de Fourier* determina el desarrollo

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} A_n(u) \widehat{X}_n(x), \quad x \in [0, 1].$$

Nótese que ahora la continuidad de  $\check{u}$  en el origen no requiere ninguna condición adicional.  $\square$

La convergencia en  $\mathbb{L}^2(0, 1)$  está basada en el Teorema de Aproximación de Weierstrass y en la densidad  $\overline{\mathcal{C}([0, 1])} = \mathbb{L}^2(0, 1)$ . Recordemos

**Proposición A.2 (Teorema de Aproximación de Weierstrass)** Sea  $\varepsilon > 0$  y  $u$  una función continua y periódica de periodo  $2\pi$ . Entonces existe un polinomio trigonométrico  $T(x)$  tal que

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |u(x) - T(x)| \leq \varepsilon. \quad \square$$

Entonces pasamos a mostrar

**Teorema A.1** Las sucesiones  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  y  $\{\widehat{X}_n\}_{n \geq 0}$  son bases hilbertianas en  $\mathbb{L}^2(0, 1)$ . Por tanto, para cada  $u \in \mathbb{L}^2(0, 1)$  se verifica

$$u = \sum_{n \geq 1} B_n(u) X_n = \sum_{n \geq 0} A_n(u) \widehat{X}_n \quad \text{en } \mathbb{L}^2(0, 1). \quad (\text{A.7})$$

Además

$$\|u\|^2 = \sum_{n \geq 1} |B_n(u)|^2 = \sum_{n \geq 0} |A_n(u)|^2 \quad (\text{igualdad de Parseval}). \quad (\text{A.8})$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $u \in \mathbb{L}^2(0, 1)$  e identifiquemos la función  $u$  con su extensión impar 2 periódica. Supongamos primero que  $u$  es una función continua, lo que requiere  $u(0) = 0 = u(1)$ . Entonces, el Teorema de Aproximación de Weierstrass, para cada  $\varepsilon > 0$  existe un polinomio trigonométrico  $T(x)$  tal que

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |u(x) - T(x)| \leq \varepsilon \sqrt{2}.$$

Esa convergencia uniforme permite suponer que  $T(x)$  es impar y sólo consta de senos, tras adecuadas manipulaciones. Si  $n_0$  es el grado de  $T(x)$  se verificará, para  $n \geq n_0$

$$\int_0^1 |u(x) - S_n[u](x)|^2 dx \leq \int_0^1 |u(x) - T(x)|^2 dx \leq \varepsilon$$

(ver (A.4)), donde el polinomio  $T(x)$  ha sido completado con coeficientes nulos hasta el grado  $n$ . Consecuentemente, se satisface (A.7). Además se tiene

$$\|S_n[u]\|^2 = \sum_{k=1}^n |B_k(u)|^2 \quad \text{y} \quad \langle u, S_n[u] \rangle = \sum_{k=1}^n |B_k(u)|^2,$$

por tanto,

$$\|S_n[u]\| \leq \|u\|.$$

Por otra parte, como el subespacio vectorial,  $\mathbb{F}$ , de todas las combinaciones lineales (finitas) de elementos de  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  es denso en  $\mathbb{L}^2(0, 1)$ , para cada  $\varepsilon > 0$  existirá  $\widehat{u} \in \mathbb{F}$  tal que  $\|u - \widehat{u}\| \leq \varepsilon$ . Además, por la naturaleza de  $\mathbb{F}$  se verificará  $S_n(\widehat{u}) = \widehat{u}$ , para  $n$  grandes. De modo que se tiene

$$\|S_n[u] - S_n(\widehat{u})\| \leq \|u - \widehat{u}\|,$$

y

$$\|S_n[u] - u\| \leq 2\|u - \widehat{u}\| \leq 2\varepsilon,$$

para  $n$  grandes, lo que concluye la convergencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n[u] = u \quad \text{en } \mathbb{L}^2(0, 1).$$

El resultado para la sucesión  $\{\widehat{X}_n\}_{n \geq 0}$  se sigue con razonamiento análogo comenzando ahora con extensiones pares. □

**Observación A.6** Entre otras aplicaciones importantes, la igualdad de Parseval indica que si dos funciones continuas tienen los mismos coeficientes del desarrollo en cosenos entonces ambas funciones deben coincidir. La misma propiedad se tiene para la coincidencia de coeficientes del desarrollo en senos de dos funciones continuas que coincidan en el borde. □

**Observación A.7** Resulta inmediata la propiedad

$$\left\langle \sum_{k=1}^n B_k(u)X_k, \sum_{k=1}^n B_k(v)X_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n B_k(u)B_k(v), \quad u, v \in \mathbb{L}^1(0, 1),$$

de donde se deduce la *igualdad de Parseval extendida*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n \geq 1} B_n(u)B_n(v), \quad u, v \in \mathbb{L}^2(0, 1). \quad (\text{A.9})$$

Consecuentemente, para la base hilbertiana  $\{X_n\}_{n \geq 1}$ , la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}^2(0, 1) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & \ell^2 \\ u & \mapsto & \{B_n(u)\}_{n \geq 1} \end{array}$$

es una isometría. Análogamente, se obtiene

$$\left\langle \sum_{k=0}^n A_k(u)\widehat{X}_k, \sum_{k=0}^n A_k(v)\widehat{X}_k \right\rangle = \sum_{k=0}^n A_k(u)A_k(v), \quad u, v \in \mathbb{L}^1(0, 1),$$

obteniéndose la otra versión de la *igualdad de Parseval extendida*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n \geq 0} A_n(u)A_n(v), \quad u, v \in \mathbb{L}^2(0, 1). \quad (\text{A.10})$$

Ahora, para la base hilbertiana  $\{\widehat{X}_n\}_{n \geq 0}$ , la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}^2(0, 1) & \rightarrow & \ell^2 \\ u & \mapsto & \{A_n(u)\}_{n \geq 0} \end{array}$$

es una isometría. □

Claramente, los resultados anteriores indican la existencia de subsucesiones para los desarrollos en senos y cosenos que convergen en casi todo punto a la función  $u$ . Siendo interesante, se trata de una propiedad poco concreta para nuestros intereses. El *criterio de Dini* permite abordar la convergencia puntual de los desarrollos hacia la función  $u$ . Omitimos aquí ese resultado.

Las convergencias uniformes que siguen reposan esencialmente en las siguientes relaciones

**Proposición A.3** Sea  $u \in \mathcal{C}^{r-1}([0, 1])$ ,  $r \geq 1$ , tal que  $u^{(r)}$  es continua a trozos entonces se tiene

$$B_n(u^{(r)}) = -\omega_n A_n(u^{(r-1)}). \quad (\text{A.11})$$

Además, si  $u^{(r-1)}(0) = u^{(r-1)}(1) = 0$  se tiene

$$A_n(u^{(r)}) = \omega_n B_n(u^{(r-1)}). \quad (\text{A.12})$$

**DEMOSTRACIÓN.** De su propia definición se obtiene

$$\begin{aligned} B_n(u^{(r)}) &= \sqrt{2} \int_0^1 u^{(r)}(x) \operatorname{sen} x \omega_n dx \\ &= \sqrt{2} u^{(r-1)}(x) \operatorname{sen} x \omega_n \Big|_{x=0}^1 - \sqrt{2} \omega_n \int_0^1 u^{(r-1)}(x) \cos x \omega_n dx \\ &= -\omega_n A_n(u^{(r-1)}). \end{aligned}$$

Análogamente, supuesto  $u^{(r-1)}(0) = u^{(r-1)}(1) = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} A_n(u^{(r)}) &= \sqrt{2} \int_0^1 u^{(r)}(x) \cos x\omega_n dx \\ &= \sqrt{2} u^{(r-1)}(x) \cos x\omega_n \Big|_{x=0}^1 + \sqrt{2}\omega_n \int_0^1 u^{(r-1)}(x) \operatorname{sen} x\omega_n dx \\ &= \omega_n B_n(u^{(r-1)}). \end{aligned} \quad \square$$

**Teorema A.2 (Convergencia uniforme hasta el borde)** *Supongamos que  $u$  es continua en  $[0, 1]$  y  $u'$  continua a trozos. Entonces*

$$\sum_{n \geq 0} A_n(u) \widehat{X}_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{uniformemente en } [0, 1].$$

Además, si  $u(0) = 0 = u(1)$  se tiene

$$\sum_{n \geq 1} B_n(u) X_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{uniformemente en } [0, 1].$$

DEMOSTRACIÓN. De la relación

$$B_k(u') = -\omega_k A_k(u), \quad (\text{A.13})$$

deducimos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n A_k(u) \cos x\omega_k \right| &\leq \sum_{k=1}^n |A_k(u)| = \left( \sum_{k=1}^n \omega_k |A_k(u)| \cdot \frac{1}{\omega_k} \right) \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^n \omega_k^2 |A_k(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \sum_{k=1}^n |B_k(u')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y

$$\sum_{n \geq 0} A_n(u) \widehat{X}_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{uniformemente en } [0, 1]$$

por el criterio de Weierstrass de la convergencia uniforme y  $u' \in \mathbb{L}^2(0, 1)$ . Análogamente, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n B_k(u) \operatorname{sen} x\omega_k \right| &\leq \sum_{k=1}^n |B_k(u)| = \left( \sum_{k=1}^n \omega_k |B_k(u)| \cdot \frac{1}{\omega_k} \right) \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^n \omega_k^2 |B_k(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Puesto que supuesto  $u(0) = u(1) = 0$  y  $u'$  continua a trozos deducimos

$$A_k(u') = \omega_k B_k(u), \quad (\text{A.14})$$

con lo que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n B_k(u) \operatorname{sen} x\omega_k \right| &\leq \left( \sum_{k=1}^n \omega_k^2 |B_k(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \sum_{k=1}^n |A_k(u')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

El criterio de Weierstrass de la serie numérica mayorante y  $u' \in \mathbb{L}^2(0, L)$  prueban la convergencia

$$\sum_{n \geq 1} B_n(u) X_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{uniformemente en } [0, 1]. \quad \square$$

**Observación A.8** Bajo los supuestos anteriores,  $u$  continua en  $[0, 1]$ , con  $u(0) = 0 = u(1)$ , podemos estimar la *tasa de convergencia* de la convergencia en  $\mathbb{L}^2(0, 1)$ . En efecto, en ese caso el resto

$$\varepsilon_n(x) \doteq \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k(u) e_k(x),$$

por la relación

$$A_k(u') = \omega_k B_k(u),$$

(ver (A.14)), se tiene la propiedad

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\varepsilon_n(x)|^2 dx &= \sum_{k=n+1}^{\infty} |B_k(u)|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2} |A_k(u')|^2 \\ &\leq \frac{1}{\pi^2 n^2} \sum_{n \geq 1} |A_n(u')|^2. \end{aligned}$$

Si además  $u'$  es continua y  $u''$  es continua a trozos obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^L |\varepsilon_n(x)|^2 dx &= \sum_{k=n+1}^{\infty} |B_k(u)|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2} |A_k(u')|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^4} |B_k(u'')|^2 \\ &\leq \frac{1}{\pi^4 n^4} \sum_{n \geq 1} |B_n(u'')|^2. \end{aligned}$$

(ver (A.11)). Se puede alargar este razonamiento, así si se verifica que  $u''$  es continua en  $[0, 1]$  y que  $u'''$  es continua a trozos y  $u''(0) = 0 = u''(1)$  podemos mejorar la tasa anterior, pues entonces la relación

$$A_k(u''') = -\omega_k^3 B_k(u),$$

(ver (A.18)) lleva a

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\varepsilon_n(x)|^2 dx &= \sum_{k=n+1}^{\infty} |B_k(u)|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^6} |A_k(u''')|^2 \\ &\leq \frac{1}{\pi^6 n^6} \sum_{n \geq 1} |A_n(u''')|^2. \end{aligned}$$

El caso del desarrollo en coseno es análogo. □

Cuando falla la condición de compatibilidad  $u(0) = 0 = u(1)$  en algún extremo se sigue teniendo la convergencia uniforme del desarrollo en senos en el intervalo abierto  $]0, 1[$ . Veámoslo con un ejemplo ilustrativo,

**Lema A.1 (Convergencia uniforme interior)** Para la función  $g(x) = x$  se verifica

$$\sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \rightarrow g(x) \quad \text{uniformemente en } [0, \tau],$$

para cada  $\tau \in ]0, 1[$ .

DEMOSTRACIÓN. Puesto que  $g \in \mathbb{L}^2(0, 1) \cap \mathcal{C}(0, 1)$  se satisface la convergencia

$$\sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \rightarrow w(x) \quad \text{en } \mathbb{L}^2(0, 1),$$

y por tanto en todo  $x \in [0, 1[$ . De hecho, se verifica la convergencia puntual. Mediante cálculos directos se obtiene

$$B_n(g) = \sqrt{2} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega_n}, \quad n \geq 1. \quad (\text{A.15})$$

Por otra parte, consideremos la clásica fórmula de *sumación por partes*

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} c_k (b_{k+1} - b_k) + c_n b_n,$$

con  $c_n = a_1 + \dots + a_n$ , para la que la elección

$$a_k = \frac{2}{\pi} (-1)^{k+1} \operatorname{sen} x \omega_k \quad \text{y} \quad b_k = \frac{1}{k},$$

permite la representación

$$\sum_{k=1}^n B_k(g) X_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{k^2 + k} + \frac{c_n}{n},$$

con

$$c_k = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \operatorname{sen} x \omega_j.$$

Utilicemos la identidad trigonométrica

$$2 \operatorname{sen} 2^{-1} x \operatorname{sen} j x = \cos((j - 2^{-1})x) - \cos((j + 2^{-1})x)$$

que lleva a

$$2 \operatorname{sen} 2^{-1} x \sum_{j=1}^k \operatorname{sen} j x = \cos 2^{-1} x - \cos((k + 2^{-1})x)$$

y, reemplazando  $x$  por  $\pi x + \pi$ , a

$$2 \cos 2^{-1} \pi x \sum_{j=1}^k (-1)^j \operatorname{sen} x \omega_j = \cos 2^{-1} \pi(x + 1) - \cos((k + 2^{-1})\pi(x + 1)).$$

De esta forma, se obtiene

$$c_k = \frac{\cos((k + 2^{-1})\pi(x + 1)) - \cos 2^{-1} \pi(x + 1)}{\pi \cos 2^{-1} \pi x}$$

y la estimación

$$|c_k| \leq \frac{2}{\pi \cos 2^{-1} \pi \tau} \quad \text{para } 0 \leq x \leq \tau < 1.$$

Consecuentemente,

$$\left| \sum_{k=1}^n B_k(g) X_k(x) \right| \leq \frac{2}{\pi \cos 2^{-1} \pi \tau} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 + k} + \frac{1}{n} \right) \quad \text{para } 0 \leq x \leq \tau < 1, \quad (\text{A.16})$$

concluye que la serie

$$\sum_{n \geq 1} B_n(g)X_n(x) \quad \text{converge uniformemente en } [0, \tau],$$

para cada  $\tau \in ]0, 1[$ . □

El anterior ejemplo es la base para extender el resultado a otras funciones

**Corolario A.1 (Convergencia uniforme interior)** *Supongamos que  $u$  es continua en  $[0, 1]$  y  $u'$  continua a trozos, tal que  $u(0) = 0 \neq u(1)$ . Entonces*

$$\sum_{n \geq 1} B_n(u)X_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{uniformemente en } [0, \tau],$$

para cada  $\tau \in ]0, 1[$ .

DEMOSTRACIÓN. Ante todo,  $u \in \mathbb{L}^2(0, 1) \cap \mathcal{C}(0, 1)$  con lo que

$$\sum_{n \geq 1} B_n(u)X_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{en } \mathbb{L}^2(0, 1),$$

y por tanto en todo  $x \in [0, 1[$ . Formemos la función

$$\widehat{u}(x) = u(x) - u(1)g(x), \quad x \in [0, 1],$$

siendo  $g(x)$  la función del Lema A.1. Claramente la función  $\widehat{u}$  es continua en  $[0, 1]$  con  $\widehat{u}'$  es continua a trozos y verifica  $\widehat{u}(0) = 0 = \widehat{u}(1)$ , de modo que

$$\sum_{n \geq 1} B_n(\widehat{u})X_n(x) \rightarrow \widehat{u}(x) \quad \text{uniformemente en } [0, 1],$$

por el Teorema A.2. Por otra parte, por linealidad, se verifica

$$B_n(\widehat{u}) = B_n(u) - u(1)B_n(g), \quad n \geq 1.$$

De modo que se satisface la convergencia

$$\sum_{n \geq 1} B_n(u)X_n(x) = \sum_{n \geq 1} B_n(\widehat{u})X_n(x) + u(1) \sum_{n \geq 1} B_n(g)X_n(x) \rightarrow \widehat{u}(x) + u(1)g(x) = u(x)$$

uniforme en  $[0, \tau[$ , para cada  $\tau \in ]0, 1[$ , por el Lema A.1. □

**Observación A.9** Obviamente, los resultados del Corolario A.1 están contenidos en los del Teorema A.2. □

En ocasiones interesa la convergencia de las derivadas de orden superior. Como ejemplo mostramos algunas de ellas

**Teorema A.3 (Convergencia hasta el borde de las derivadas)** *Supongamos que  $u'$  es continua en  $[0, 1]$  y  $u''$  continua a trozos. Entonces*

$$\sum_{n \geq 1} \omega_n B_n(u) \widehat{X}_n(x) \rightarrow u'(x) \quad \text{uniformemente en } [0, 1]$$

supuesto  $u(0) = 0 = u(1)$ . Si además se verifica que  $u''$  es continua en  $[0, 1]$ ,  $u'''$  continua a trozos y  $u''(0) = 0 = u''(1)$ , entonces

$$\sum_{n \geq 1} -\omega_n^2 B_n(u)X_n(x) \rightarrow u''(x) \quad \text{uniformemente en } [0, 1].$$

DEMOSTRACIÓN. Como es habitual, emplearemos de nuevo el criterio de Weierstrass de la serie numérica mayorante. De la igualdad

$$B_n(u'') = -\omega_n A_n(u'),$$

(ver (A.11)) deducimos

$$B_n(u'') = -\omega_n A_n(u') = -\omega_n^2 B_n(u), \quad (\text{A.17})$$

supuesto  $u(0) = 0 = u(1)$  (ver también (A.12)) y

$$\sum_{n \geq 1} \omega_n^4 |B_n(u)|^2 = \sum_{n \geq 1} |B_n(u'')|^2 < \infty,$$

con lo que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \omega_k B_k(u) \cos x \omega_k \right| &\leq \sum_{k=1}^n \omega_k |B_k(u)| = \sum_{k=1}^n \omega_k^2 |B_k(u)| \cdot \frac{1}{\omega_k} \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^n \omega_k^4 |B_k(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 1} B_n(u) X_n(x) \rightarrow u(x) & \text{uniformemente en } [0, 1], \\ \sum_{n \geq 1} \omega_n B_n(u) \widehat{X}_n(x) & \text{converge uniformemente en } [0, 1] \end{cases}$$

concluye

$$\sum_{n \geq 1} \omega_n B_n(u) \widehat{X}_n(x) \rightarrow u'(x) \quad \text{uniformemente en } [0, 1].$$

Por otra parte, a partir de

$$A_n(u''') = \omega_n B_n(u''),$$

se obtiene

$$A_n(u''') = \omega_n B_n(u'') = -\omega_n^3 B_n(u), \quad (\text{A.18})$$

supuesto si  $u''(0) = 0 = u''(1)$  (ver la Proposición A.3), y

$$\sum_{n \geq 1} \omega_n^6 |B_n(u)|^2 = \sum_{n \geq 1} |A_n(u''')|^2 < \infty,$$

con lo que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \omega_k^2 B_k(u) \operatorname{sen} x \omega_k \right| &\leq \sum_{k=1}^n \omega_k^2 |B_k(u)| = \sum_{k=1}^n \omega_k^3 |B_k(u)| \cdot \frac{1}{\omega_k} \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^n \omega_k^6 |B_k(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 1} B_n(u) X_n(x) \rightarrow u(x) & \text{uniformemente en } [0, 1], \\ \sum_{n \geq 1} \omega_n B_n(u) \widehat{X}_n(x) \rightarrow u'(x) & \text{uniformemente en } [0, 1], \\ \sum_{n \geq 1} -\omega_n^2 B_n(u) X_n(x) & \text{uniformemente en } [0, 1], \end{cases}$$

lleva a

$$\sum_{n \geq 1} -\omega_n^2 B_n(u) X_n(x) \rightarrow u''(x) \quad \text{uniformemente en } [0, 1]. \quad \square$$

Como antes, podemos abordar también la la convergencia uniforme de las derivadas cuando falla la condición de compatibilidad.

**Corolario A.2 (Convergencia interior de las segundas derivadas)** *Supongamos que  $u'$  es continua en  $[0, 1]$  y  $u''$  continua a trozos. Entonces*

$$\sum_{n \geq 1} A_n(u') \widehat{X}_n(x) \rightarrow u'(x) \quad \text{uniformemente en } [0, 1].$$

*Si además se verifica que  $u''$  es continua en  $[0, 1]$ ,  $u'''$  continua a trozos y  $u''(0) = 0 \neq u''(1)$ , entonces*

$$-\sum_{n \geq 1} \omega_n A_n(u') X_n(x) \rightarrow u''(x) \quad \text{uniformemente en } [0, \tau]$$

para cada  $\tau \in ]0, 1[$ .

Cuando  $u(0) = 0 = u(1)$  se puede reemplazar  $A_n(u')$  por  $\omega_n B_n(u)$ .

DEMOSTRACIÓN. Puesto que  $u'$  es continua en  $[0, 1]$  y  $u''$  es continua a trozos en  $[0, 1]$ , podemos razonar como en la primera parte del Teorema A.2. Para ello, usamos la relación

$$B_k(u'') = -\omega_k A_k(u'), \quad (\text{A.19})$$

para deducir

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n A_k(u') \cos x \omega_k \right| &\leq \sum_{k=1}^n |A_k(u')| = \left( \sum_{k=1}^n \omega_k |A_k(u')| \cdot \frac{1}{\omega_k} \right) \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^n \omega_k^2 |A_k(u')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \sum_{k=1}^n |B_k(u'')|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\omega_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

y

$$\sum_{n \geq 0} A_n(u') \widehat{X}_n(x) \rightarrow u'(x) \quad \text{uniformemente en } [0, 1],$$

por el criterio de Weierstrass de la convergencia uniforme y  $u'' \in \mathbb{L}^2(0, 1)$ .

Para la convergencia de  $u''$  basta aplicar a esa función los razonamientos del Corolario A.1 usando los coeficientes  $B_n(u'')$ , finalmente se tiene en cuenta (A.19). El último comentario se sigue de la Proposición A.3.  $\square$

Finalizamos con un resultado técnico que usaremos en (2.10) de la prueba del Teorema 2.1

**Lema A.2** *Para la función  $g(x) = x$  la serie*

$$\sum_{n \geq 1} B_n(g) \widehat{X}_n(x) \quad \text{converge uniformemente en } [0, \tau],$$

para cada  $\tau \in ]0, 1[$ .

DEMOSTRACIÓN. La clásica fórmula de *sumación por partes* permite también la representación

$$\sum_{k=1}^n B_k(g) \widehat{X}_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{k^2 + k} + \frac{c_n}{n},$$

con

$$c_k = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \cos x \omega_j.$$

Ahora utilizamos la identidad trigonométrica

$$2 \cos 2^{-1}y \cos jy = \cos((j + 2^{-1})y) - \cos((j - 2^{-1})y)$$

que lleva a

$$2 \cos 2^{-1}y \sum_{j=1}^k \cos jx = \cos((k + 2^{-1})y) - \cos 2^{-1}y$$

y, para  $y = \pi x + \pi$ , a

$$-2 \cos 2^{-1}\pi x \sum_{j=1}^k (-1)^j \cos x \omega_j = \cos((k + 2^{-1})\pi(x + 1)) - \cos 2^{-1}\pi(x + 1).$$

De esta forma, se obtiene

$$c_k = \frac{\cos((k + 2^{-1})\pi(x + 1)) - \cos 2^{-1}\pi(x + 1)}{\pi \cos 2^{-1}\pi x}$$

y la estimación

$$|c_k| \leq \frac{2}{\pi \cos 2^{-1}\pi \tau} \quad \text{para } 0 \leq x \leq \tau < 1.$$

Consecuentemente,

$$\left| \sum_{k=1}^n B_k(g) \widehat{X}_k(x) \right| \leq \frac{2}{\pi \cos 2^{-1}\pi \tau} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 + k} + \frac{1}{n} \right) \quad \text{para } 0 \leq x \leq \tau < 1, \quad (\text{A.20})$$

concluye que la serie

$$\sum_{n \geq 1} B_n(g) X_n(x) \quad \text{converge uniformemente en } [0, \tau],$$

para cada  $\tau \in ]0, 1[$ .

□



## References

- [1] Benson, D.: Music: A Mathematical Offering, Cambridge University Press, 2006.
- [2] Brezis, H.: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, 2011.
- [3] Evans, L.C.: Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, 1998.
- [4] Fletcher, N.H. and Rossing, T.D.: The Physics of Musical Instruments, Springer-Verlag, 1992.
- [5] Figueiredo, D.G. de: Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems, Escola Latino-Americana de Equações Diferenciais, Instituto de Matemática e Estatística. Universidade de São Paulo, Brasil, 1981.
- [6] Guenther, R.B. and Lee, J.W.: Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations, Prentice-Hall, 1988
- [7] Rayleigh, J.W.: The Theory of Sound, Cambridge, University Press, 2011