CARACTER TOPOLOGICO DEL ISOMORFISMO DE BOREL

$\mathcal{H}'(E) \simeq \text{Exp } E'$.

José Mª Martínez Ansemil
Departamento de Teoría de Funciones
Universidad de Santiago

ABSTRACT.- Let E be a DFN space, E' its strong topological dual, $\mathcal{H}(E)$ and $\mathcal{H}(E')$ the corresponding spaces of holomorphic functions from E and E' into $\mathbb{C}$ endowed with the respective compact-open topologies and Exp E' the vector subspace of $\mathcal{H}(E')$ consisting of the entire functions of exponential type on E'. In this article we endow Exp E' with a vector - space topology and show that Borel's Transformation is an - isomorphism between the topological vector spaces $\mathcal{H}'(E)$ - (strong topological dual of $\mathcal{H}(E)$) and Exp E'.

I.- INTRODUCCION

Sean E un espacio DFN, E' su dual fuerte, $\mathcal{H}(E)$ y $\mathcal{H}(E')$ los correspondientes espacios de aplicaciones holomorfas de E y E' en $\mathbb{C}$ dotados de las respectivas topologías compacto-abiertas y Exp E' el subespacio vectorial de $\mathcal{H}(E')$ formado por las aplicaciones de tipo exponencial a E'.

Por $\mathcal{B}$ representaremos un sistema fundamental de compactos absolutamente convexos de E (tal sistema existe por ser E dual fuerte de un espacio de Frechet Nuclear). Las demás notaciones que se utilizaran son las usuales en Teoría de Holomorfía.

II.- ISOMORFISMO DE BOREL

<u>Definición</u> 1.- Se dice que una aplicación - $F \in \mathcal{H}(E')$ es de tipo exponencial en E' si existen $B \in \mathcal{B}$ y - $C \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$|F(\psi)| \leq C\, e^{|\psi|_B}$$

cualquiera que sea $\psi \in E'$.

Representaremos por Exp E' al subespacio vectorial de $\mathcal{H}(E')$ formado por las aplicaciones de tipo exponencia en E'.

Definicion 2.- Por cada $B \in \mathcal{B}$ representaremos por $\operatorname{Exp}_B E'$ al subespacio vectorial de Exp E' formado por las aplicaciones $F \in \operatorname{Exp} E'$ para las que existe $C \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|F(\psi)| \leq C\ e^{|\psi|_B}$$

cualquiera que sea $\psi \in E'$. Nótese que $\operatorname{Exp} E' = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \operatorname{Exp}_B E'$.

Proposición 1.- Por cada $B \in \mathcal{B}$ la aplicación

$$\|\ \|_B : F \longmapsto \|F\|_B = \sup_{\psi \in E'} \frac{|F(\psi)|}{e^{|\psi|_B}} ;\quad F \in \operatorname{Exp}_B E'$$

es una norma en $\operatorname{Exp}_B E'$ que lo convierte en un espacio de Banach.

Es sencillo comprobar que $\|\ \|_B$ es una norma en $\operatorname{Exp}_B E'$. Ahora, sea $\{F_n ;\ n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de Cauchy en $\operatorname{Exp}_B E'$; entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $p, q \in \mathbb{N};\ p, q \geq \nu$ se verifica

$$(1) \qquad |F_p(\psi) - F_q(\psi)| \leq \varepsilon\ e^{|\psi|_B}$$

cualquiera que sea $\psi \in E'$. Por tanto, $\{F_n(\psi);\ n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ para cada $\psi \in E'$, lo que permite definir la aplicación

$$F : \psi \longmapsto F(\psi) = \lim_{n \to \infty} F_n(\psi);\ \psi \in E'$$

Sea Ψ un compacto de E'; Ψ es fuertemente acotado en E' y por tanto

$$(2) \qquad \sup_{\psi \in \Psi,\, z \in B} |\psi(z)| = M < \infty$$

De (1) se deduce

$$(3) \qquad |F(\psi) - F_n(\psi)| \leq \varepsilon\, e^{|\psi|_B}$$

cualesquiera que sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$ y $\psi \in E'$; y, de (2) y (3) se deduce

$$|F(\psi) - F_n(\psi)| \leq \varepsilon\, e^{M}$$

cualesquiera que sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$ y $\psi \in \Psi$, lo que prueba que $F_n \longrightarrow F$ uniformemente sobre Ψ.

Como E' es un espacio de Frechet (E es DFN), $(\mathcal{C}(E';\mathbb{C}): \tau_o)$ es completo y $\mathcal{H}(E')$ es cerrado en él |4| por lo que $F \in \mathcal{H}(E')$. Por otra parte, de (3) se obtiene

$$|F(\psi)| \leq |F_\nu(\psi)| + \varepsilon\, e^{|\psi|_B}$$

cualquiera que sea $\psi \in E'$. Como $F_\nu \in \mathrm{Exp}_B\ E'$, existe $C_\nu \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|F_\nu(\psi)| \leq C_\nu\, e^{|\psi|_B}$$

cualquiera que sea $\psi \in E'$, con lo que

$$|F(\psi)| \leq (C_\nu + \varepsilon) e^{|\psi|_B}$$

cualquiera que sea $\psi \in E'$, es decir $F \in \mathrm{Exp}_B\ E'$.

Finalmente, de (3) se obtiene

$$||F - F_n||_B \leq \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$, lo que prueba que $F_n \longrightarrow F$ en $\mathrm{Exp}_B\ E'$.

<u>Observación</u> 1.- Por cada $B \in \mathcal{B}$ la topología que $||\ \ ||_B$ induce en $\mathrm{Exp}_B\ E'$ es más fina que la inducida por la compacto abierta de $\mathcal{H}(E')$. Además cualesquiera que sean B' y B'' pertenecientes a $\mathcal{B}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$\mathrm{Exp}_{B'}\ E' \subset \mathrm{Exp}_B\ E' \quad \text{y} \quad \mathrm{Exp}_{B''}\ E' \subset \mathrm{Exp}_B\ E'$$

siendo estas inclusiones continuas.

En lo sucesivo consideraremos al espacio $\mathrm{Exp}\ E'$ como el límite inductivo de los espacios de Banach $\mathrm{Exp}_B\ E'$, $B \in \mathcal{B}$.

<u>Proposición</u> 2.- El espacio Exp E' es tonelado y Hausdorff.

El carácter tonelado es consecuencia de ser un límite inductivo de espacios tonelados. Ahora, por cada $m \in \mathbb{N}$ y $\psi \in E'$ la aplicación

$$p_{m,\psi}: F \longmapsto \left| \frac{1}{m!} \hat{d}^m F(0)(\psi) \right|; \; F \in \operatorname{Exp} E'$$

es una seminorma continua en Exp E'. En efecto, de las Desigualdades de Cauchy se obtiene

$$\left| \frac{1}{m!} \hat{d}^m F(0)(\psi) \right| \leq \sup_{|\lambda|=1} |F(\lambda\psi)|$$

cualquiera que sea $F \in \mathcal{H}(E')$. Si fijamos ahora $B \in \mathcal{B}$, se tiene

$$\sup_{|\lambda|=1} |F(\lambda\psi)| \leq ||F||_B \, e^{|\psi|_B}$$

cualquiera que sea $F \in \operatorname{Exp}_B E'$, y entonces

$$|p_{m,\psi}(F)| \leq e^{|\psi|_B} ||F||_B$$

cualquiera que sea $F \in \operatorname{Exp}_B E'$, que prueba que la restricción de $p_{m,\psi}$ a $\operatorname{Exp}_B E'$ es continua, y por tanto $p_{m,\psi}$ es continua en Exp E'.

Sea ahora $F \in \operatorname{Exp} E'$ tal que $p(F)=0$ para toda seminorma continua p en Exp E'; en particular se tendrá

$$p_{m,\psi}(F)=0$$

cualesquiera que sean $m \in \mathbb{N}$ y $\psi \in E'$, y por tanto

$$\frac{1}{m!} \hat{d}^m F(0)(\psi) = 0$$

cualesquiera que sean $m \in \mathbb{N}$ y $\psi \in E'$; es decir $F=0$, lo que prueba el carácter Hausdorff de Exp E'.

<u>Definición</u> 3.-

a) Por cada $\psi \in E'$ representaremos por e^{ψ} la aplicación de E en $\mathbb{C}$ definida por

$$e^{\psi}: x \longmapsto e^{\psi(x)}; \; x \in E$$

Se verifica que $e^{\psi} \in \mathcal{H}(E)$ cualquiera que sea $\psi \in E'$.

b) Llamaremos Transformación de Borel a la aplicación $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}'(E)$ en $\mathcal{H}(E')$ definida por

$$\mathcal{F}: T \longmapsto \mathcal{F}(T) = \hat{T}: \begin{array}{c} \psi \in E' \\ \downarrow \\ \langle e^{\psi}, T\rangle \end{array}$$

<u>TEOREMA</u>.- La Transformación de Borel es un isomorfismo entre los espacios vectoriales topológicos $\mathcal{H}'(E)$ y Exp E'.

El carácter algebraico del isomorfismo puede verse en |1|.

Se sabe |1| que $\mathcal{H}(E)$ es de Frechet Reflexivo y por tanto |6| $\mathcal{H}'(E)$ es bornológico, por ello para probar que $\mathcal{F}$ es continua será suficiente demostrar que transforma acotados de $\mathcal{H}'(E)$ en acotados de Exp E'.

Sea entonces A un conjunto acotado de $\mathcal{H}'(E)$. Dado que $\mathcal{H}(E)$ es tonelado A es equicontinuo, luego existe un entorno del origen W en $\mathcal{H}(E)$ tal que $|\langle f,T\rangle| \leq 1$ cualesquiera que sean $f \in W$ y $T \in A$. Dado que $\mathcal{B}$ es un sistema fundamental de compactos de E podemos suponer que W es de la forma

(*) $$W = \{ f \in \mathcal{H}(E); \; |f|_B < \varepsilon \}$$

para algún $B \in \mathcal{B}$ y algún $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Demostraremos que el conjunto $\{\hat{T};\ T \in A\}$ está contenido en el espacio $\mathrm{Exp}_B\ E'$ y es acotado en él.

De (*) se obtiene que cualesquiera que sean $\psi \in E'$, $m \in \mathbb{N}$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$

$$\varepsilon(|\psi|_B^m + \delta)^{-1} \; \psi^m \in W$$

En consecuencia,

(1) $$|\langle \psi^m, T\rangle| \leq \varepsilon^{-1} |\psi|_B^m$$

cualesquiera que sean $\psi \in E'$, $m \in \mathbb{N}$ y $T \in A$. Por otra parte

(2) $$\hat{T}(\psi) = \langle e^{\psi}, T\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \langle \psi^m, T\rangle$$

cualesquiera que sean $\psi \in E'$ y $T \in \mathcal{H}'(E)$. De (1) y (2)

$$|\hat{T}(\psi)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} |\langle \psi^m, T\rangle| \leq \varepsilon^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} |\psi|_B^m = \varepsilon^{-1} e^{|\psi|_B}$$

cualesquiera que sean $\psi \in E'$ y $T \in A$, de donde $\{\hat{T};\ T \in A\} \subset \mathrm{Exp}_B\ E'$ y $||\hat{T}||_B \leq \varepsilon^{-1}$ cualquiera que sea $T \in A$.

Como $\mathcal{H}(E)$ es de Frechet Reflexivo $\mathcal{H}'(E)$ es B-completo |2| y puesto que Exp E' es tonelado y Haussdorf, la Proposición 3.17.2 de |2| da la continuidad de $\mathcal{F}^{-1}$.

BIBLIOGRAFIA

|1| BOLAND P.J. "Holomorphic Functions on Nuclear Spaces". Publicaciones del Dpto. de Análisis Matemático. Santiago de Compostela. Serie B, nº 16. 1977.

|2| HORWATH, J. "Topological Vector Spaces and Distributions. Volumen I". Addison Wesley Publishing Company 1966.

|3| ISIDRO, J.M. "Topological duality on the function space $(\mathcal{H}_b(U,F), \tau_b)$. 1977. A aparecer en Proccedings of the Royal Irish Academic of Sciences.

|4| NACHBIN, L. "Curso de holomorfia entre espaços localmente convexos". Universidad Federal de Rio de Janeiro.1973.

|5| PIETSCH, A. "Nuclear locally convex spaces". Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 66, Springer Verlag, New York, 1972.

|6| SCHAEFFER, H.H. "Topological vector spaces". Springer - Verlag. 1970.

|7| TREVES, F. "Topological vector spaces, distributions and kernels". Academic Press, 1967.