# MODELOS BAYESIANOS NO PARAMETRICOS DE FIABILIDAD EN ENSAYOS DE VIDA ACELERADOS

por

**Carlos Maté Jiménez**

Memoria realizada bajo la dirección del Catedrático Dr. D. Vicente Quesada Paloma para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

# INDICE

# INTRODUCCION

Muchos sistemas industriales, como las componentes electrónicas, presentan una fiabilidad muy elevada cuando funcionan bajo las condiciones de uso normal. Este hecho conlleva problemas al medir la fiabilidad de estos sistemas, ya que sería necesario un periodo muy largo de ensayo, con unos costes asociados elevados, bajo las condiciones reales de funcionamiento, para obtener datos suficientes que permitieran estimar la función de fiabilidad de los mismos. Incluso en el caso de que se pudiera llevar a cabo el ensayo, el marco temporal en que se realizaría sería tal que los sistemas llegarían a ser obsoletos, debido a la rapidez con que se producen los avances tecnológicos, antes de que se hubiera podido establecer un modelo de probabilidad para los mismos.

Una solución al problema de obtener datos relevantes de fallo, para sistemas con una elevada fiabilidad, es la realización de ensayos de vida acelerados (abreviadamente designados por ALT). Este tipo de ensayos supone poner en funcionamiento este tipo de sistemas a niveles de stress más altos que los usuales, de cara a obtener datos de fallo con más rapidez. Para acortar la vida de un sistema se utilizan ciertos stress o variables acelerantes, como niveles más elevados de temperatura, voltaje, presión, vibración, etc., que el nivel normal de funcionamiento.

Aproximaciones paramétricas al problema de los ALT se han considerado por Mann et al. (1974), Shaked (1978), Nelson (1972, 1991) y Viertl (1980, 1983), entre otros.

El estudio de métodos no paramétricos de inferencia para los ALT se ha llevado a cabo, fundamentalmente, por Barlow and Scheuer (1971), Steck, Zimmer and Williams (1974), Shaked, Zimmer and Ball (1979), Basu and Ebrahimi (1982), Shaked and Singpurwalla (1982) y McNichols and Padgett (1984).

No obstante, se puede observar que hasta el momento no se ha presentado un desarrollo de los modelos ALT en el caso bayesiano no paramétrico. Éste es precisamente el objetivo que se persigue en este trabajo, resultando, por tanto, una aportación original tanto en el ámbito de la Estadística Bayesiana No Paramétrica, como en el de los Ensayos de Vida Acelerados.

El Capítulo 0 se dedica a establecer los elementos básicos que conforman el marco donde se va a desarrollar esta tesis doctoral. En primer lugar, se analizan, por una parte, los ensayos de vida y, por otra, la teoría Bayesiana de la decisión estadística, tanto a nivel paramétrico como no paramétrico.

Situados ya en el contexto bayesiano no paramétrico, el primer problema que se plantea es el de definir una medida de probabilidad a priori G sobre $\mathcal{F}$, el conjunto de medidas de probabilidad $\mathcal{P}$ sobre un espacio medible $(\mathcal{X},\mathcal{A})$, que tenga ciertas propiedades óptimas, desde el punto de vista Bayesiano, para las reglas Bayes. Para resolver este problema son necesarios algunos conceptos previos que se desarrollan en el epígrafe 0.3, como *medida de probabilidad aleatoria* (Definición 0.1), *función de distribución aleatoria* (Definición 0.2), *función de fiabilidad aleatoria* (Definición 0.3), y *muestra aleatoria de tamaño n extraída mediante* *una función de distribución aleatoria* (Definición 0.4).

En el epígrafe 0.3.1 se introducen los procesos de Dirichlet, resultando ser la primera medida de probabilidad a priori $\mathcal{P}$ considerada sobre el espacio paramétrico, que en el estudio de los problemas no paramétricos es el espacio de todas las distribuciones de probabilidad definidas sobre un espacio medible dado. Además, se trata de las probabilidades a priori más sencillas dentro de los problemas no paramétricos. Para definir estos procesos es necesaria la distribución de Dirichlet (Definición 0.5) y analizar sus propiedades (Proposición 0.1 a 0.3).

Posteriormente se analizan las propiedades de los procesos de Dirichlet, siendo el Teorema 0.7 el que nos permite afirmar que la distribución a posteriori de un proceso de Dirichlet P es, también, un proceso de Dirichlet, pero con la peculiaridad de que resulta muy fácil de manejar. En concreto, la distribución condicional de P dado $X_1, \dots, X_n$ es un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha + \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$, en donde para cada $x \in \mathcal{X}$, $\delta_x$ denota la medida sobre $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ que da masa uno al punto x, esto es, para $A \in \mathcal{A}$ se verifica que:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

El epígrafe 0.3.2 se dedica a analizar los procesos neutrales a la derecha, los cuales constituyen otro ejemplo de probabilidades a priori que se pueden considerar sobre el espacio paramétrico de todas las distribuciones de probabilidad definidas en un espacio muestral dado, y que fueron introducidos por Doksum, en 1974. Estos procesos gozan de propiedades semejantes a los procesos de Dirichlet en el sentido de ser "no paramétricos" y de ser, también, neutral a la derecha la distribución a posteriori de una probabilidad aleatoria.

La Definición 0.8 nos dice que la función de distribución aleatoria $F = \{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un *proceso neutral a la derecha* (P.N.D.), si puede ser escrito de la forma $F(t) = 1 - e^{-Y(t)}$, $t \in \mathbb{R}$ en donde $Y = \{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un proceso con incrementos independientes que satisface determinadas propiedades. No obstante, se concluye que el problema de la existencia de una distribución de probabilidad a priori $\mathcal{P}$, que llamaremos inducida por el proceso, sobre el espacio paramétrico en los problemas de decisión Bayesiana no paramétrica, se reduce a la especificación del proceso con incrementos independientes $Y(t)$.

Todo proceso de Dirichlet se puede considerar como caso particular de proceso neutral a la derecha, ya que le corresponde un proceso con incrementos independientes $Y(t)$ que no tiene puntos fijos de discontinuidad ni parte no aleatoria, lo que hace que el logaritmo de la función generatriz de momentos sea

$$\log E\left[e^{-\theta Y(t)}\right] = \int_0^\infty \left(e^{-\theta z} - 1\right) dN_t(z),$$

en donde la medida de Lévy asociada es la dada por

$$dN_t(z) = \frac{e^{-\alpha(\mathbb{R})z}\,(e^{\alpha(t)z} - 1)}{z\cdot(1 - e^{-z})}\, dz$$

y en donde $\alpha$ es el parámetro del proceso de Dirichlet. Este hecho resulta de gran importancia a la hora de establecer algunos de los resultados originales que aparecen en este trabajo.

El epígrafe 0.4 resulta una aportación novedosa a la Teoría de la Fiabilidad, puesto que conceptos como vida media, o vida fiable asociada a un nivel de fiabilidad R, fundamentales en los análisis de fiabilidad paramétricos, se generalizan al caso habitual, en la estadística Bayesiana no paramétrica, de suponer que el tiempo de funcionamiento de un sistema hasta el fallo sigue un proceso de Dirichlet P de parámetro $\alpha$ con función de fiabilidad aleatoria R(t).

El epígrafe 0.5 analiza la estimación bayesiana no paramétrica de funciones de fiabilidad R(t) cuando se tienen datos censurados, necesaria para el desarrollo de los modelos de ensayos de vida acelerados que se realiza en el Capítulo 3. El estimador Bayes, en este contexto, fue propuesto por Susarla and Van Ryzin (1976)), y se presenta en el Teorema 0.9. El Corolario 0.10 afirma que, en sentido bayesiano, el estimador del límite del producto de R(t), propuesto por Kaplan and Meier (1958) como estimador no paramétrico, es el límite de dicho estimador bayesiano no paramétrico, cuando la confiabilidad M tiende a 0.

El Capítulo 1 se dedica al estudio de los modelos de ensayos de vida acelerados, con función de aceleración lineal, bajo el contexto bayesiano no paramétrico de los procesos de Dirichlet. Inicialmente se plantea el denominado Modelo ALT-BN Básico, donde se sientan las bases del marco en el que nos moveremos en este capítulo. La hipótesis (H4) sitúa el modelo bajo el contexto bayesiano no paramétrico, al suponer que la distribución de la v.a. $T_0$, notada por $F_0$, es tal que viene inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha$. Abreviadamente $F_0 \in \mathcal{D}(\alpha)$. La hipótesis (H5) hace referencia al modelo de aceleración entre la v.a. que representa el tiempo de funcionamiento del sistema hasta el fallo bajo el nivel de stress $V_i$, con $i = 1, \ldots, k$, notada por $T_i$, y $T_0$. En concreto, se supone que

$T_i \overset{D}{=} \theta_i T_0$, es decir, ambas variables difieren en un parámetro de escala $\theta_i$, lo que se traduce en que la relación, bajo este modelo, entre la función de distribución bajo un nivel de stress $V_i$, con $i = 1, \ldots, k$, notada por $F_i$, y $F_0$, sea

$$F_i(t) = F_0(t / \theta_i) \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, k. \qquad [1.1]$$

Con ello este modelo se encuadra dentro de los modelos de aceleración lineales y se le denomina Modelo ALT-BN Básico con Función de Aceleración Lineal.

En el epígrafe 1.2 se plantea la estimación del parámetro de escala $\theta_i$. Para ello se demuestra el Lema 1.1, resultado original, en el que se afirma que $F_i(t)$ es una función de distribución aleatoria cuya distribución viene inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha_i$, donde $\alpha_i(t) = \alpha\left(\frac{t}{\theta_i}\right)$. A continuación se construyen los estimadores Bayes bajo pérdida cuadrática, propuestos por Ferguson (1973), para $F_0$ y $F_i$ con las observaciones $T_{h,j}$, $h = 0, i$, $j = 1, \ldots, n_h$; los cuales se notan por $\hat{F}_{h,n_h}(t)$, para $h = 0, i$. Después, mediante la transformación logarítmica, se pasa a la relación $T_i^* \overset{D}{=} T_0^* + \Delta_i$ con $T_h^* = \ln T_h$, para $h = 0, i$, y donde $\Delta_i = \ln \theta_i$ es un parámetro de localización, tal que $\theta_i = e^{\Delta_i}$. Designando por $F_h^*$ a la función de distribución de la variable aleatoria $T_h^*$, se construyen los estimadores Bayes bajo pérdida cuadrática, propuestos por Ferguson (1973), para $F_h^*$, los cuales notaremos por $\hat{F}^*_{h,n_h}(t)$. Esto hace necesario proponer el Lema 1.2, resultado original, en el que se afirma que $F_h^*(t)$ es una función de distribución aleatoria cuya distribución viene inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha_h^*$, donde $\alpha_h^*(t) = \alpha_h(e^t)$.

Con todo lo anterior se construye un estimador $\hat{\Delta}_{n_0,n_i}$ de $\Delta_i$, como un valor de $\Delta_i$ que minimice la distancia de Crámer-von Mises

$$W^2 = \int_0^\infty \left[\hat{F}^*_{0,n_0}(t - \Delta_i) - \hat{F}^*_{i,n_i}(t)\right]^2 dt \qquad [1.5]$$

con lo cual se define un estimador para $\theta_i = e^{\Delta_i}$, mediante la definición de un estimador de mínima distancia de $\Delta_i = \ln \theta_i$.

Para analizar la construcción de este estimador se estudia el caso $n_0 = n_i$, $\forall\ i = 1, \ldots, k$, y se demuestra que un estimador $\hat{\Delta}_{n_0,n_i}$ de $\Delta_i$ es una mediana de la distribución de probabilidad discreta cuya función de masa de probabilidad es

$$h_{n_0,n_0}(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{n_0^2} & \text{si } v = t^*_{i,\ell} - t^*_{0,j};\ j = 1,\ldots,n_0;\ \ell = 1,\ldots,n_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad [1.7]$$

El estimador natural de $\theta_i = e^{\Delta_i}$ es $\hat{\theta}_{n_0,n_i} = e^{\hat{\Delta}_{n_0,n_i}}$, que es también el estimador de mínima distancia de $\theta_i$ para el problema de escala.

En el caso $n_0 \neq n_i$, para algún $i = 1, \ldots, k$, no es posible obtener directamente el estimador, como hemos encontrado en el caso anterior, aunque se puede definir un estimador $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$ de $\theta_i$ , como un valor que minimice la distancia de Cramér-von Mises siguiente

$$W^2 = \int_0^\infty \left[\ \hat{F}_{0,n_0}(t/\theta_i) - \hat{F}_{i,n_i}(t)\right]^2 dt \qquad [1.8]$$

El epígrafe 1.3 se dedica a demostrar que el estimador $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$, definido por [1.8], es fuertemente consistente para estimar $\theta_i$, probando que $\hat{\Delta}_{n_0,n_i}$ es fuertemente consistente para estimar

$\Delta_i = \ln \theta_i$.

En la sección 1.4 se utiliza como estimador de $F_0$ el estimador propuesto por Ferguson, el cual se construye a partir del conocimiento a priori, proporcionado por $\alpha(t)/M$, y del conocimiento muestral que resulta de rescalar las observaciones, para cada nivel de stress $V_i$, $T_{i,j}$, por la relación

$$Z_{i,j} = \frac{T_{i,j}}{\hat{\theta}_{n_0,n_i}} \qquad [1.10]$$

El Teorema 1.7, resultado original, garantiza que dicho estimador es fuertemente consistente para estimar $F_0$.

En el epígrafe 1.5 se considera el llamado modelo ALT-BN General con Función de Aceleración Lineal, para dar respuesta a las situaciones de los ensayos de vida en los que no se dispone de datos bajo el stress usual, y donde se considera un modelo de aceleración lineal general. Este modelo supone que la relación entre la función de distribución en el nivel de stress $V_i$, $F_i$, y una función de distribución $F$ perteneciente a la misma familia paramétrica que $F_i$, viene dada por

$$F_i(t) = F\left(AV_i^{\gamma}t\right), \ i = 0, \ldots, k \qquad [1.14]$$

donde $A > 0$ y $\gamma > 0$ son constantes desconocidas, y $F \in \mathcal{D}(\alpha)$.

Por tanto, para estimar $\gamma$ consideramos la notación $\theta_{ij}$ para el factor de escala entre $F_j$ y $F_i$, i.e.,

$$F_j(t) = F_i\left(\frac{t}{\theta_{ij}}\right)$$

de donde

$$\theta_{ij} = \left(\frac{V_i}{V_j}\right)^{\gamma}, \text{ con } i \neq j \qquad [1.15]$$

Ahora se podrá estimar $\gamma$, estimando previamente $\theta_{ij}$, para lo cual se puede estimar $\theta_{ij}$ mediante un estimador $\hat{\theta}_{n_i,n_j}$ que minimice la distancia de Crámer-von Mises siguiente

$$W^2 = \int_0^\infty \left[\hat{F}_{i,n_i}(t/\theta_{ij}) - \hat{F}_{j,n_j}(t)\right]^2 dt \qquad [1.17]$$

donde $\hat{F}_{h,n_h}(t)$, con $h = i, j$, es el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática para $F_h$, que según Ferguson es combinación lineal convexa de la función de distribución empírica bajo el nivel de stress $V_h$ y de la función de distribución a priori bajo ese mismo nivel de stress.

De cada par de niveles de stress que consideremos $V_i$, $V_j$, con $i \neq j$, se tiene un estimador $\hat{\gamma}_{n_i,n_j}$ de $\gamma$, por la relación siguiente

$$\hat{\gamma}_{n_i,n_j} = \frac{\log \hat{\theta}_{n_i,n_j}}{\log V_i - \log V_j} \qquad [1.18]$$

y se propone como estimador de $\gamma$ el promedio de los $\binom{k}{2}$ estimadores anteriores, cuya expresión es

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \left(\log \hat{\theta}_{n_i,n_j}\right)\left(\log \frac{V_i}{V_j}\right)}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \left(\log \left(\frac{V_i}{V_j}\right)\right)^2} \qquad [1.19]$$

El Teorema 1.8, resultado original, demuestra que el estimador de $\gamma$ definido por [1.19] es fuertemente consistente para estimar $\gamma$.

Teniendo en cuenta [1.14], si $\gamma$ fuese conocido, podríamos transformar (rescalar) los tiempos hasta el fallo de cualquier nivel de stress para que correspondieran a tiempos hasta el fallo de cualquier otro nivel de stress. Ya que $\gamma$ no es conocido, utilizaremos su estimación $\hat{\gamma}$ para rescalar nuestras observaciones y construir un estimador de la función de distribución $F_0$ bajo el nivel de stress usual $V_0$, para lo cual se utiliza el estimador propuesto por Ferguson (1973), justificándose que es fuertemente consistente para estimar $F_0(t)$.

La última parte del Capítulo 1 se dedica al problema de contrastar el ajuste de los datos a una determinada distribución $F_1(t)$. Se podría considerar como la alternativa Bayesiana No Paramétrica al desarrollo de contrastes de ajuste realizado por Shaked and Singpurwalla (1982) para el caso no paramétrico.

Los modelos ALT desarrollados en el Capítulo 1 son elementales desde el punto de vista de la función de aceleración que consideran. Sin embargo, se pueden considerar modelos ALT con funciones de aceleración generales, como ha hecho, en el caso paramétrico, Viertl (1980, 1983); y, en el contexto no paramétrico, Barlow and Scheuer (1971), Steck, Zimmer and Williams (1974) y Shaked, Zimmer and Ball (1979). No obstante, se puede observar que hasta el momento no se ha presentado un desarrollo de los modelos ALT en el caso bayesiano no paramétrico. Éste es precisamente el objetivo que se persigue en el Capítulo 2, resultando, por tanto, un capítulo completamente novedoso.

En primer lugar, se analiza el concepto de función de aceleración y los tipos de funciones de aceleración más utilizados. A continuación se presenta una axiomática de los modelos ALT-BN bajo procesos de Dirichlet, que generaliza la axiomática presentada en Schäbe and Viertl (1991), y se establece el Teorema 2.10, completamente original, en el que se obtiene la función de distribución en un stres cualquiera V, a partir de la axiomática anterior.

Por último, se analizan una serie de modelos ALT y se obtiene, en dichos modelos, el estimador de la función de distribución bajo el nivel de stress usual $V_0$.

Los modelos de ensayos de vida acelerados que se han estudiado en la literatura se concebían para muestras completas, con la excepción de los trabajos de Barlow and Scheuer (1971), Basu and Ebrahimi (1982) y McNichols and Padgett (1984). En muchas situaciones, las observaciones pueden estar censuradas aleatoriamente a la derecha, como ocurre, a menudo, cuando algunos sistemas:

(1) son eliminados del estudio o del servicio que realizan, en diferentes instantes de tiempo, antes de que fallen (para un análisis más completo o por otras razones),

(2) aún funcionan cuando termina el periodo de estudio,

(3) son eliminados del estudio o del servicio que realizan debido a que fallaron por una causa ajena e independiente a la que se está estudiando.

En otras situaciones, las observaciones pueden estar censuradas aleatoriamente a la izquierda, como ocurre cuando ciertos equipos de precisión se colocan en los faros de las costas. Se puede conocer el tiempo de funcionamiento de uno de estos equipos cuando se encuentra en un faro vigilado por personal, con lo que se tendrá una observación no censurada. Ahora bien, es posible que en alguno de estos faros no haya ninguna persona y se encuentre en una zona de difícil acceso, con lo cual se puede producir el fallo y no detectarse hasta después de un cierto tiempo.

Obviamente, se pueden presentar situaciones con muestras doblemente censuradas.

Los trabajos citados anteriormente son por completo no bayesianos, y es de destacar la escasa atención que se ha prestado al contexto bayesiano no paramétrico de los modelos de ensayos de vida acelerada, cuando se presentan muestras censuradas. Ultimamente, y dentro de este contexto, se ha potenciado el estudio del papel que desempeñan las covariables en los análisis de fiabilidad acelerada. Kalbfleisch (1978) presentó una aproximación semiparamétrica bayesiana al análisis de riesgos proporcionales de Cox, y Christensen and Johnson (1988) hicieron lo mismo en el modelo de tiempo de fallo acelerado. En ambos casos se contempla la posibilidad de observaciones censuradas por la derecha. Una aproximación totalmente Bayesiana al modelo de tiempo de fallo acelerado con datos no censurados ha sido estudiada por Christensen and Johnson (1989).

Por tanto, no se ha presentado hasta el momento ningún trabajo en el que se estudien las muestras censuradas, en los modelos de ensayos de vida acelerada, bajo un contexto bayesiano no paramétrico. Éste es precisamente el objetivo del Capítulo 3, que será, por tanto, completamente novedoso, y en el que se pretenden generalizar los resultados que han obtenido Basu and Ebrahimi (1982) y McNichols and Padgett (1984) al contexto bayesiano no paramétrico.

En primer lugar, se plantea el Modelo ALT-BN Básico con Datos Censurados Aleatoriamente por la Derecha, como una extensión del Modelo ALT-BN Básico desarrollado en el Capítulo 1, donde el parámetro

$\theta_i$, además de jugar el mismo papel que en dicho capítulo, factor de escala entre los tiempos de funcionamiento en los niveles de stress $V_i$ y $V_0$; representa el factor de escala existente entre los tiempos de funcionamiento censurados en los niveles de stress $V_i$ y $V_0$.

A continuación se analiza la construcción de un estimador consistente para el parámetro $\theta_i$. Para ello se aplica a las diferentes variables aleatorias del modelo la transformación logarítmica, y se define un estimador $\hat{\Delta}_{n_0,n_i}$ para el parámetro de localización $\Delta_i$ entre estas nuevas variables en los niveles de stress $V_i$ y $V_0$, como un valor de $\Delta$ que minimice la distancia de Crámer-von Mises

$$W^2 = \int_0^\infty \left[ \hat{\bar{F}}^*_{KM,0}(t - \Delta) - \hat{\bar{F}}^*_{KM,i}(t) \right]^2 dt,$$

donde, para h = 0, i, $\hat{\bar{F}}^*_{KM,h}(t)$ representa el estimador de Kaplan-Meier para la función de fiabilidad de la transformación logarítmica de la v.a. tiempo de funcionamiento verdadero en el nivel de stress $V_h$, a partir de los datos censurados resultado de aplicar a los datos censurados originales la transformación logarítmica. A partir de este estimador se define un estimador de $\theta_i$ por

$$\hat{\theta}_{n_0,n_i} = e^{\hat{\Delta}_{n_0,n_i}}$$

resultando ser un estimador fuertemente consistente para estimar $\theta_i$.

Para construir un estimador consistente para $\bar{F}_0$ se considera un nivel de stress cualquiera $V_h$, con $h = 0, 1, \ldots, k$; y a partir de los datos censurados $(z_{h,j},\delta_{h,j})$, con $j = 1, \ldots, n_h$, se construye el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática de Susarla y Van Ryzin para $\bar{F}_h(t)$, al que se nota por $\hat{\bar{F}}_h(t)$. Esto permite definir como estimador de $\bar{F}_0(t)$ el resultado de evaluar el estimador $\hat{\bar{F}}_h(t)$ en el punto $\hat{\theta}_{n_0,n_h} t$, y notamos a dicho estimador por $\hat{\bar{F}}_{0,h}(t)$, luego

$$\hat{\bar{F}}_{0,h}(t) = \hat{\bar{F}}_h\left(\hat{\theta}_{n_0,n_h} t\right)$$

El Teorema 3.2, resultado original, garantiza que $\hat{\bar{F}}_{0,h}(t)$ es un estimador fuertemente consistente para estimar $\bar{F}_0(t)$

Luego, en cada nivel de stress $V_h$, con $h = 0, \ldots, k$, se ha construido un estimador consistente para $\bar{F}_0$. Por tanto, hay $k + 1$ estimadores para $\bar{F}_0(t)$ y formamos la media aritmética ponderada para definir un nuevo estimador de $\bar{F}_0$, que notamos por $\hat{\bar{F}}_0(t)$. Así, el estimador de $\bar{F}_0$ se define por

$$\hat{\bar{F}}_0(t) = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{k} n_h \hat{\bar{F}}_{0,h}(t) \qquad [3.4]$$

y el Teorema 3.3, también original, demuestra que es un estimador fuertemente consistente para estimar $\bar{F}_0$.

En la última parte de este capítulo se analiza el Modelo ALT-BN con Datos Censurados bajo Riesgo o Azar Proporcional. Este modelo considera las mismas hipótesis del Modelo ALT-BN Básico con Datos Censurados Aleatoriamente por la Derecha, añadiendo la hipótesis de la existencia de una constante $\beta_i \in [0,\infty)$, que supondremos dependiente del nivel de stress, tal que, para $i = 0, 1, \ldots, k$, se verifica que las funciones de fiabilidad de los tiempos de funcionamiento censurado y verdadero en el nivel de stress $V_i$, $\bar{G}_i(t)$ y $\bar{F}_i(t)$, respectivamente, están relacionadas por

$$\bar{G}_i(t) = \left[\bar{F}_i(t)\right]^{\beta_i}, \ \forall t > 0.$$

A partir de los resultados obtenidos por Morales, Pardo y

Quesada (1986), el Teorema 3.4 nos proporciona el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática de $\bar{F}_i(t)$, a t fijo, en un modelo de riesgo proporcional, notado por $\hat{\bar{F}}_{P,i}(t)$ para indicar que es estimador paramétrico. Para poder utilizar este estimador en la estimación del parámetro de escala $\theta_i$, es necesario proceder a la estimación del parámetro de censura $\beta_i$. Esta estimación se lleva a cabo mediante dos metodologías:

1) Bayesiana. Bajo el supuesto de que la distribución a priori para el parámetro $\tau_i = \frac{1}{1+\beta_i}$ es una $Be(a_i, b_i)$, resulta, si se utiliza pérdida cuadrática, que

$$\hat{\beta}_i = \frac{1}{1+\hat{\tau}_i} = \frac{a_i + b_i + n_i}{2a_i + b_i + n_i + N_{i,u}}.$$

donde $N_{i,u} = \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{i,j}$ determina el número de observaciones no censuradas en el nivel de stress $V_i$.

2) De los Momentos. Igualando proporción teórica a frecuencia observada, resulta que el estimador de $\beta_i$ por el método de los momentos viene dado por

$$\hat{\beta}_i = \frac{N_{i,c}}{n_i - N_{i,c}},$$

donde $N_{i,c} = n_i - N_{i,u}$ determina el número de observaciones censuradas en el nivel de stress $V_i$.

Para estimar el parámetro de escala $\theta_i$ entre el nivel de stress usual $V_0$ y el nivel de stress $V_i$, se sustituye, en la expresión del Teorema 3.4, $\beta_i$ por su estimación $\hat{\beta}_i$ y se construye un estimador de $\theta_i$ como un valor de $\theta$ que minimice la distancia de Crámer-von Mises siguiente

$$W^2 = \int_0^\infty \left[ \hat{\bar{F}}_{P,0}(t / \theta) - \hat{\bar{F}}_{P,i}(t) \right]^2 dt.$$

Para cada $i = 1, \ldots, k$, notemos por $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$ al estimador de $\theta_i$ que se acaba de definir. Con estos estimadores procedemos a rescalar las observaciones $Z_{i,j}$, $j = 1, \ldots, n_i$, por la relación

$$Z^*_{i,j} = \frac{Z_{i,j}}{\hat{\theta}_{n_0,n_i}}$$

con lo cual se dispone de los datos

$$(z^*_{i,j}, \delta_{i,j}), \ i = 0, 1, \ldots, k, \ j = 1, \ldots, n_i$$

siendo $z^*_{0,j} = z_{0,j}$, al ser $\hat{\theta}_{n_0,n_0} = 1$.

Mediante la estimación del parámetro de censura $\hat{\beta}$, bien bayesiana o por el método de los momentos, a partir del número total de datos rescalados, y mediante dichos datos, se procede a construir el estimador bayesiano paramétrico de la función de fiabilidad bajo el nivel de stress usual, a t fijo.

En el apéndice A se presenta un pseudocódigo para programar el modelo desarrollado en el Capítulo 1, sirviendo tanto si se utiliza un lenguaje de programación como si se emplea un software matemático. El apéndice B muestra un caso práctico desarrollado con el Modelo ALT-BN Básico con Datos Censurados Aleatoriamente por la Derecha .

Antes de terminar quisiera agradecer sinceramente a mi profesor y amigo el Dr. D. Vicente Quesada Paloma, bajo cuya dirección ha sido realizado este trabajo, no sólo el haber hecho posible la realización del mismo con sus orientaciones, enseñanzas y discusiones, sino también el haberme permitido trabajar a su lado durante los últimos años.

También quiero expresar mi agradecimiento a algunos compañeros de Departamento que siguieron con interés las incidencias de este trabajo, y a la Universidad Pontificia Comillas por apoyarlo y haberme dado los medios para entrevistarme con dos de las personalidades mundiales en el campo de los ensayos de vida acelerados, Wayne Nelson y Reinhard Viertl; así como a ellos sus comentarios y sugerencias.

Por último, sería injusto no citar a mis padres y a mi hermana, gracias a lo cuales pude cursar la licenciatura, y a mi mujer por su apoyo continuado durante la realización de esta tesis doctoral. Para ellos mi más profundo agradecimiento.

Madrid, Septiembre de 1994.

# CAPITULO O

# ELEMENTOS BASICOS

## 0.1. LOS ENSAYOS DE VIDA EN LA TEORIA DE LA FIABILIDAD

El término *ensayo de vida* se utiliza para describir experimentos que se realizan para recoger datos sobre longitud de vida o, en el caso de equipos industriales, sobre el tiempo de funcionamiento. Dichos datos se utilizan para estimar ciertos parámetros, realizar predicciones, o tomar decisiones del tipo aceptar o rechazar un lote de items. Ejemplos de parámetros de interés son el *tiempo medio hasta el fallo*, la *tasa de fallos*, la *función de fiabilidad* o *de supervivencia*, y la *vida fiable*. Los ensayos de vida se acometen habitualmente en entornos industriales como el del automóvil, las telecomunicaciones y en industrias electrónicas, militares y relacionadas con la defensa; así como en actividades biológicas y relacionadas con la salud como investigación de drogas y experimentos *bioassay*. En muchos casos los ensayos de vida se llevan a cabo también para satisfacer exigencias contractuales y de regulación.

Hay una cantidad enorme de literatura que pertenece a este área, encontrándose entre las mejores fuentes Mann et al. (1974), Barlow and Proschan (1975), Tsokos and Shimi (1977), Bain (1978), Elandt-Johnson and Johnson (1980), Nelson (1982, 1991) y Martz and Waller (1982).

Puesto que un ensayo de vida persigue obtener datos de longitud de vida, se somete a ensayo una muestra de items y se registra la información de fallo de interés, junto con el tiempo de vida de cualquier item que se retire del ensayo y no haya fallado hasta ese momento. En una situación típica, se ensayan los items en unas condiciones ambientales que sean lo más parecidas posibles a las condiciones ambientales para las que han sido diseñados dichos items para funcionar, i.e., un entorno con stress usual. Dichos ensayos se llaman *ensayos de vida ordinarios*. Si los items en cuestión se caracterizan por tener tiempos hasta el fallo grandes, resultará que un ensayo de vida ordinario supondrá una cantidad desmesurada de tiempo de ensayo. De esta forma, es una práctica habitual someter los items a unas condiciones ambientales de ensayo que supongan un stress mayor que el usual. Estos ensayos se llaman *ensayos de vida acelerados* o *ensayos de vida con sobrestress*; en algunos documentos del tipo "military standards" reciben el nombre de *ensayos ambientales*. Puesto que la tecnología moderna ha desarrollado con éxito sistemas con un período de vida largo, se acometen ahora, más a menudo, ensayos de vida acelerados que ensayos de vida ordinarios. Hay varias estrategias para llevar a cabo ensayos de vida acelerados, y se presentan dificultades especiales a la hora de extraer inferencias significativas a partir de ellos. Todo esto se comentará más adelante.

Tanto con los ensayos de vida acelerados como con los ordinarios, es frecuente que no todos los items bajo estudio se observen hasta el fallo. Esto es, algunos de los items serán retirados o separados del ensayo de vida. Cuando esto suceda, se dirá que *el ensayo de vida es con muestra censurada*. Un ensayo de vida sin ningún tipo de censura se dice que es *un ensayo de vida con muestra completa*. En los ensayos de vida industriales, a menudo, se lleva a cabo la censura para ahorrar tiempo de ensayo o para ahorrar el número de items que se ensayan hasta el fallo. En los ensayos de vida biológicos, especialmente aquellos en los que están implicados seres humanos, la censura se debe, a menudo, a causas que escapan al control del experimentador, e.g., el fallecimiento por accidente de tráfico de una persona a la que se le ha detectado el SIDA y forma parte de las unidades en observación de un estudio de vida sobre el SIDA.

Un ensayo de vida (ordinario o acelerado), en el que el número de items en estudio se fije de antemano, se llama un *ensayo de vida con muestra fija*. Uno de estos ensayos podría ser o bien un ensayo de muestra completa, o un ensayo de muestra censurada,. dependiendo de si se producen separaciones o retiradas durante el ensayo. Los ensayos de muestra fija se utilizan habitualmente cuando el objetivo del ensayo de vida es la estimación de parámetros desconocidos. En contraposición a los ensayos de muestra fija están los *ensayos secuenciales*, en los que el número de items que son ensayados es una variable aleatoria. Los ensayos secuenciales se utilizan cuando el objetivo del ensayo de vida es decidir si un lote de items satisface, o deja de satisfacer, una exigencia de vida específica, como, por ejemplo, el tiempo medio hasta el fallo es mayor o igual que un valor especificado. Los ensayos secuenciales tienen la ventaja de que el número esperado de items que se prueban es más pequeño que el exigido en los ensayos de muestra fija que tengan las mismas características de ejecución.

## 0.2. TEORIA BAYESIANA DE LA DECISION ESTADISTICA

### Introducción

La Teoría Bayesiana de la Decisión Estadística es un modelo para la toma de decisiones individuales bajo incertidumbre. Se puede considerar de forma heurística como un juego entre la Naturaleza y el decisor. La Naturaleza elige un estado de la misma, $\theta$, perteneciente a un posible conjunto de estados, $\Theta$, y el decisor elige una acción, a, perteneciente a un posible conjunto de acciones, A, y el resultado del juego viene fijado por una función $W(a,\theta)$. En general, el decisor no conoce cual es el estado de la naturaleza y, por tanto, realiza experimentos aleatorios en los que el resultado x de cada uno de ellos depende del estado de la Naturaleza. El objetivo es encontrar la mejor acción, $a^*$, en el sentido de que con ella se optimice el resultado del juego. Como el problema se sitúa en un contexto bayesiano, el decisor posee una cierta información sobre los estados de la Naturaleza, en forma de una ley de probabilidad sobre los mismos.

Por tanto, los elementos esenciales que pueden encontrarse en un problema de decisión son los siguientes:

(1) Un conjunto no vacio $\Theta$ de todos los posibles estados de la

Naturaleza, también llamado *espacio paramétrico*.

(2) Un conjunto no vacio A de todas las acciones posibles que el decisor puede tomar.

(3) Una función de pérdida $W(\theta,a)$ que es una aplicación

$$W:\Theta \times A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\theta,a) \longrightarrow W(\theta,a)$$

**Decisión Bayesiana Paramétrica**

Los elementos esenciales de los métodos bayesianos de decisión estadística paramétrica son, además de los tres anteriores, los siguientes:

(4) Una variable aleatoria X observable con función de distribución $F_\theta(x)$, $\theta \in \Theta$, y con espacio muestral $(\mathcal{X},\mathcal{A})$, en general, contenido en $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, y una muestra $X_1,\ldots,X_n$ de X.

(5) Sobre $\Theta$ se toma una $\sigma$-álgebra $\sigma_\Theta$ y en el espacio medible $(\Theta,\sigma_\Theta)$ se tiene una distribución $G(\theta)$ llamada distribución a priori.

(6) Un conjunto $\phi = \{\varphi\}$ de funciones de decisión puras o no aleatorizadas

$$\varphi:\ \mathcal{X}^n \longrightarrow A$$
$$\vec{x} \longrightarrow a = \varphi(\vec{x})$$

que a cada realización de la muestra $X_1,\ldots,X_n$ le asocie una acción de A.

(6') Dada una $\sigma$-álgebra en A, $\sigma_A$, consideramos una familia de medidas de probabilidad $K = \{k\}$ en $(A,\sigma_A)$ y una familia $\tau = \{t\}$ de decisiones aleatorizadas de forma que, $\forall t \in \tau$, a cada $\vec{x}$ se le asocia una medida de probabilidad en A, luego

$$t: \mathcal{X}^n \longrightarrow K$$

A partir de lo anterior, se llama *función de riesgo* de una regla de decisión no aleatorizada $\varphi$ con respecto a la distribución a priori G, y se nota por $R(G,\varphi)$, a la expresión siguiente

$$R(G,\varphi) = \int_{\Theta\times\mathcal{X}^n} W(\theta,\varphi(\vec{x}))\ dF_\theta^{(n}(\vec{x})\ dG(\theta)$$

En el caso de una regla aleatorizada t se define la función de riesgo por la expresión siguiente

$$R(G,t) = \int_{\Theta\times\mathcal{X}^n\times A} W(\theta,a)\ dF_\theta^{(n}(\vec{x})\ dG(\theta)\ dt_{\mathcal{X}^n}(\theta)$$

Se llama *regla Bayes* o *solución Bayes respecto a la distribución G* a la regla de decisión que minimiza la función de riesgo. Luego

$$R(G,S_G) = \inf_{S\in\phi} R(G,S)$$

en el caso de reglas de decisión no aleatorizadas, y

$$R(G,t_G) = \inf_{t\in\tau} R(G,t)$$

cuando la regla de decisión es aleatorizada.

Utilizando diversas funciones de pérdida, pérdida cuadrática, pérdida en valor absoluto, etc., podemos, en el caso paramétrico, tener las soluciones a problemas de estimación, de contrastes de hipótesis, etc.

Raiffa y Schlaifer (1961) indican diversas propiedades que debe cumplir la clase $\mathcal{G}$ de distribuciones de probabilidad a priori sobre el espacio paramétrico $\Theta$. Dichas propiedades son:

1) La clase $\mathcal{G}$ debe ser analíticamente tratable en tres aspectos:

   i) Debe ser razonablemente fácil determinar la distribución a posteriori.

   ii) Debe ser posible expresar convenientemente la esperanza de determinadas funciones de pérdida.

   iii) Debe ser cerrada, en el sentido de que si la a priori es miembro de la clase $\mathcal{G}$, la a posteriori también lo sea.

2) La clase $\mathcal{G}$ debe ser rica, en el sentido de que exista un miembro de la clase $\mathcal{G}$ capaz de expresar nuestra información a priori.

3) La clase $\mathcal{G}$ debe ser parametrizada de forma que nuestra información a priori pueda ser fácilmente interpretada.

**Decisión Bayesiana No Paramétrica**

En el caso paramétrico hemos visto que la distribución de la variable aleatoria observable X, $F_\theta(x)$, dependía del parámetro $\theta$, con lo cual se puede considerar la clase $\mathcal{F} = \{F_\theta \,/\, \theta \in \Theta\}$ y esta clase, en sí misma, puede tratarse como un espacio paramétrico, sin más que identificar a $F_\theta$ con su correspondiente $\theta$. Si tenemos que definir una medida de probabilidad sobre $\mathcal{F}$, bastará hacerlo sobre $\Theta$.

En los problemas no paramétricos, el conjunto $\mathcal{F}$ es demasiado grande para recibir el tratamiento anterior, ya que puede ocurrir que no conozcamos la forma paramétrica de F, sino tan sólo que es continua. En este esquema, el problema radica en que la dimensión de $\mathcal{F}$ puede ser infinita y, por tanto, el tratamiento que se aplicará a este tipo de problemas requerirá de otras técnicas para dotar a esta clase $\mathcal{F}$ de una distribución a priori conveniente.

**Elementos de un Problema de Decisión Estadística Bayesiana No Paramétrica.**

(1) Una v.a. observable X con espacio muestral $(\mathcal{X},\mathcal{A})$.

(2) Un espacio paramétrico $\mathcal{F}$ que está constituido por el conjunto de medidas de probabilidad P sobre el espacio muestral $(\mathcal{X},\mathcal{A})$.

(3) Un espacio de acciones $A = \{a\}$.

(4) Una función de pérdida $W(P,a)$ con $P \in \mathcal{F}$, $a \in A$.

(5) Una distribución de probabilidad a priori G definida sobre el espacio medible $(\mathcal{F},\sigma_{\mathcal{F}})$, con $\sigma_{\mathcal{F}}$ una $\sigma$-álgebra adecuada.

(6) Una muestra aleatoria simple $(x_1,\ldots,x_n)$ de variables aleatorias observables $(X_1,\ldots,X_n)$ con distribución de probabilidad P.

Desde el punto de vista bayesiano se presentan dos problemas fundamentales:

1) Definir una medida de probabilidad a priori G sobre $\mathcal{F}$.

2) Decidir la medida específica G que tendremos que tomar para que resulten ciertas propiedades óptimas, desde el punto de vista Bayesiano, para las reglas Bayes.

El primer problema es un problema típicamente probabilístico y ha sido tratado de diversas maneras. Sin embargo, el primero que lo trató en consonancia con el segundo problema, de una forma adecuada, fue Ferguson, en 1973.

Antes de analizar detalladamente el modelo de Ferguson es necesario establecer algunos conceptos previos. Todo ello se desarrolla en el próximo epígrafe.

## 0.3. LAS FUNCIONES ALEATORIAS EN LA TEORIA DE LA FIABILIDAD

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ una $\sigma$-álgebra de subconjuntos de $\mathcal{X}$ y sea el espacio medible $(\mathcal{X},\mathcal{A})$.

Sea $P(\omega,A)$ un proceso estocástico con conjunto de índices $\mathcal{A}$, con espacio de estados el intervalo $[0,1]$ y definido sobre un espacio probabilístico $(\Omega,\sigma(\Omega),\lambda)$.

Si se fija un índice, i.e., se fija $A \in \mathcal{A}$, entonces

$$\begin{aligned} P(A) = P(\cdot,A):\Omega &\longrightarrow [0,1] \\ \omega &\longrightarrow P(\omega,A) \end{aligned}$$

es una variable aleatoria.

Si se fija un $\omega \in \Omega$, entonces

$$\begin{aligned} P(\omega,\cdot):\mathcal{A} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longrightarrow P(\omega,A) \end{aligned}$$

es una trayectoria del proceso. Dicha trayectoria puede llegar a ser una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(\mathcal{X},\mathcal{A})$.

Por tanto, fijado un $A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ es, además de la probabilidad de A cuyo valor depende del resultado del experimento que tiene por espacio probabilístico $(\Omega,\sigma(\Omega),\lambda)$, una variable aleatoria. En consecuencia, llamamos a P medida de probabilidad aleatoria sobre $(\mathcal{X},\mathcal{A})$, o, simplemente, probabilidad aleatoria.

De manera formal se tiene la siguiente definición.

**Definición 0.1**

Dado un conjunto $\mathcal{X}$ y una $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathcal{X}$, se llama *medida de probabilidad aleatoria* sobre el espacio medible $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ a cualquier proceso estocástico $\{P(A):A \in \mathcal{A}\}$, definido sobre algún espacio probabilístico $(\Omega,\sigma(\Omega),\lambda)$ y con espacio de estados el intervalo $[0,1]$, tal que:

i) $P(A)$ es una v.a. con valores en $[0,1]$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

ii) $P(\mathcal{X}) = 1$ c.s.

iii) Sea $\{A_k\} \subset \mathcal{A}$ con $\lim_{k\to\infty} A_k = \emptyset$, i.e., una sucesión decreciente de subconjuntos medibles, entonces $\lim_{k\to\infty} P(A_k) = 0$ c.s., i.e., la sucesión de v.a. $\{P(A_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow[k\to\infty]{c.s.} 0$.

De ahora en adelante, se supondrá que $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ es $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, el espacio medible de la recta real con la $\sigma$-álgebra de Borel, ya que sólo se trabajará en el caso real.

Si hacemos uso de las propiedades de orden de la recta real, es natural introducir lo que llamamos función de distribución aleatoria F, correspondiente a la probabilidad aleatoria P, que vendrá definida por

$$F(t) = P((-\infty,t]) \qquad [0.1]$$

El proceso estocástico así definido tiene una versión separable (un proceso con la misma distribución de probabilidad que F), el cual posee unas propiedades que permiten caracterizarlo. La definición de la función de distribución aleatoria por medio de estas propiedades, como se hace a continuación, presenta la ventaja de estudiar una función de distribución aleatoria, sin depender de la probabilidad aleatoria asociada.

**Definición 0.2**

Se llama *funcion de distribucion aleatoria* a cualquier proceso estocástico $F = \{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, definido sobre algún espacio probabilístico $(\Omega,\sigma(\Omega),\lambda)$ y con espacio de estados en el intervalo $[0,1]$, que satisfaga las condiciones siguientes:

(1) $F(t)$ es monótona no decreciente c.s.

(2) $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0$ c.s.

(3) $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 1$ c.s.

(4) $F(t)$ es continua por la derecha c.s., i.e.,

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{s\to t^+} F(s) = F(t)$ c.s.

En la teoría de la fiabilidad se suele trabajar más con funciones de fiabilidad o supervivencia que con funciones de distribución. Además, el espacio medible que utiliza la teoría de la fiabilidad es $([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)))$. Por tanto, se llamará función de fiabilidad aleatoria R, correspondiente a la función de distribución aleatoria F, al proceso $R = \{R(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ definido por

$$R(t) = 1 - F(t) \qquad \forall t \in [0,\infty) \qquad [0.2]$$

Por las mismas razones que antes, se pueden definir las funciones de fiabilidad aleatorias sin tener en cuenta las correspondientes funciones de distribución aleatorias, aunque las relaciones [0.1] y [0.2] se deben tener siempre presentes para comprender mejor los problemas que se analicen.

**Definición 0.3**

Se llama *función de fiabilidad aleatoria* a cualquier proceso estocástico $R = \{R(t)\}_{t\in[0,\infty]}$ definido sobre algún espacio probabilístico $(\Omega,\sigma(\Omega),\lambda)$ y con espacio de estados el intervalo $[0,1]$, que satisfaga las condiciones siguientes:

(1) $R(t)$ es monótona no creciente c.s.

(2) $\lim_{t\to 0} R(t) = 1$ c.s.

(3) $\lim_{t\to +\infty} R(t) = 0$ c.s.

(4) $R(t)$ es continua por la derecha c.s. $\forall t \in [0,\infty]$.

NOTA.- Para entender mejor el lenguaje que se empleará al definir muestra aleatoria extraída según un proceso estocástico, conviene hacer algunas observaciones a las dos definiciones anteriores.

1) De la definición de función de distribución aleatoria, abreviadamente f.d.a., se deduce que $F = \{F(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ es un proceso estocástico. Por tanto, si fijamos un índice $t \in \mathbb{R}$, se tendrá que

$$\begin{aligned} F(t,\cdot):\ \Omega &\longrightarrow [0,1] \\ \omega &\longrightarrow F(t,\omega) \end{aligned}$$

es una variable aleatoria.

Si fijamos $\omega \in \Omega$, entonces

$$\begin{aligned} F(\cdot,\omega):\ \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ t &\longrightarrow F(t,\omega) \end{aligned}$$

es una "trayectoria" o realización del proceso que es una función de distribución en $\mathbb{R}$.

Si $F(\cdot,\omega)$ es una función de distribución, entonces para un $t \in \mathbb{R}$, $F(t,\omega)$ es la probabilidad de que una cierta v.a. con valores en $\mathbb{R}$, digamos $X$, sea menor o igual que $t$, i.e.

$$F(t,\omega) = \int_B dF(x,\omega) \qquad \forall (B,\omega) \in \mathcal{B}\times\Omega$$

que se denominará *probabilidad aleatoria.*

2) Según la idea anterior, cuando tengamos una f.d.a. $F = \{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, se dirá que F es una f.d.a. sobre $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, expresando con esta frase que se puede obtener una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ en la forma expuesta.

En el enfoque estadístico de la fiabilidad, es necesario tener una información muestral que, por lo general, estará dada por una muestra aleatoria (m.a.) de tamaño n. Por ello, al trabajar en el contexto que se acaba de definir, es preciso, como hizo Ferguson, en 1973, establecer la siguiente definición.

**Definición 0.4 (Ferguson 1973)**

Sea $F = \{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ una f.d.a. sobre $(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Se dice que $X_1,X_2,\ldots,X_n$ es una m.a. de tamaño n extraída mediante F si $\forall$ $m \in \mathbb{N}$, $t_1,\ldots,t_m$ con $t_i \in \mathbb{R}$ $\forall i = 1,\ldots,m$ y $x_1,x_2,\ldots,x_n$, se tiene que:

$$\Pr\left[X_1\le x_1,\ X_2\le x_2,\ldots,X_n\le x_n /\ F(t_1),\ldots,F(t_m),F(x_1),\ldots,F(x_n)\right] =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} F(x_j) \quad \text{c.s.}$$

en donde Pr denota una probabilidad.

NOTA.- De manera análoga, se define una m.a. de tamaño n extraída mediante una fiabilidad aleatoria, cuando lo sea mediante la f.d.a. correspondiente.

### 0.3.1. PROCESOS DE DIRICHLET

Dentro de la decisión Bayesiana no paramétrica, la primera medida de probabilidad a priori $\mathcal{P}$ considerada sobre el espacio paramétrico, que en el estudio de los problemas no paramétricos es el espacio de todas las distribuciones de probabilidad definidas sobre un espacio medible dado, fue la inducida por un proceso de Dirichlet. Dichos procesos, que son una clase especial de probabilidades aleatorias, fueron introducidos por Ferguson, en 1973.

Debido a las propiedades del proceso de Dirichlet, se puede afirmar que estos procesos son, hoy por hoy, las probabilidades a priori más sencillas dentro de los problemas no paramétricos.

Las principales propiedades o características de dichos procesos son:

(1) $\mathcal{P}$ es no paramétrica en el sentido de que tiene una clase de probabilidades "grande" o "no paramétrica" como soporte suyo en la topología de la convergencia débil.

(2) Si P es considerado como un parámetro con distribución a priori $\mathcal{P}$, entonces la distribución a posteriori de P, dada una muestra, también tiene una distribución de Dirichlet.

(3) P es una probabilidad discreta con probabilidad uno.

#### LA DISTRIBUCION DE DIRICHLET

La distribución de Dirichlet surgió en el estudio de problemas relacionados con estadísticos de orden, y es conocida en el contexto bayesiano como una distribución a priori que es conjugada para los parámetros de una distribución multinomial. Para definirla de forma general, se redefine la distribución gamma para que incluya el caso de una distribución degenerada en un punto.

Se notará por $\mathcal{G}(\alpha,\beta)$ a la distribución gamma con parámetro de forma $\alpha \geq 0$ y parámetro de escala $\beta > 0$. Si X es una v.a. absolutamente continua y $Z \approx \mathcal{G}(\alpha,\beta)$ con $\alpha > 0$, entonces su función de densidad es

$$f(z \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\, \beta^{\alpha}} e^{-z/\beta} z^{\alpha-1} I_{(0,\infty)}(z)$$

Por otra parte, si $\alpha = 0$, entonces

$$Z \approx \mathcal{G}(0,\beta) \iff P(Z = 0) = 1$$

y se dirá que $\mathcal{G}(0,\beta)$ es una v.a. con distribución degenerada en $X = 0$.

**Definición 0.5**

Sean $Z_1, \ldots, Z_k$ variables aleatorias independientes con $Z_j \approx \mathcal{G}(\alpha_j,1)$, donde $\alpha_j \geq 0$ para todo j y $\alpha_j > 0$ para algún j, con $j = 1, \ldots, k$. Se llama distribución de Dirichlet de parámetros $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, notada por $D(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, a la distribución del vector aleatorio $(Y_1, \ldots, Y_k)$, donde

$$Y_j = \frac{Z_j}{\sum_{i=1}^{k} Z_i} \qquad \text{para } j = 1, \ldots, k.$$

**Observaciones.-**

(1) Esta definición es más general que la que usualmente se encuentra en los libros, ya que contempla el caso degenerado.

(2) Aplicaciones y propiedades de la distribución de Dirichlet se pueden encontrar en el libro de Wilks (1962).

(3) La notación $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ deberá interpretarse con valores $\alpha_j \geq 0$ para todo j y $\alpha_j > 0$ para algún j, con j = 1, ..., k. Es decir, los $\alpha_j$ deben ser "no todos nulos".

(4) Esta distribución es siempre singular con respecto a la medida de Lebesgue en el espacio k-dimensional, en el sentido que da probabilidad 1 a un conjunto de medida de Lebesgue 0, ya que

$$\sum_{j=1}^{k} Y_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{Z_j}{\sum_{i=1}^{k} Z_i} = 1.$$

(5) Si $\alpha_j = 0$ para algún j determinado, entonces la v.a. $Z_j$ correspondiente es degenerada en 0. En consecuencia, la correspondiente v.a. $Y_j$ será también degenerada en 0.

(6) Si $\alpha_j > 0$, $\forall$ j = 1, ..., k, entonces la distribución de la v.a. (k - 1) dimensional $(Y_1, \ldots, Y_{k-1})$ es absolutamente continua con función de densidad

$$f(y_1,\ldots,y_{k-1} \mid \alpha_1,\ldots,\alpha_k) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\right)}{\prod_{j=1}^{k} \Gamma(\alpha_j)} \left(\prod_{j=1}^{k-1} y_j^{\alpha_j - 1}\right)\left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} y_j\right)^{\alpha_k - 1} \cdot I_S(y_1,\ldots,y_{k-1})$$

en donde S es el simplex definido por

$$S = \left\{(y_1,\ldots,y_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1} \;/\; y_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,k-1, \sum_{j=1}^{k-1} y_j \leq 1\right\}.$$

(7) Las v.a. $Y_j$ toman valores entre 0 y 1 que se pueden considerar proporciones de suma total 1, de tal forma que los valores que toma la v.a. $Y_k$ dependen de los valores que tomen las restantes v.a. $Y_1, \ldots, Y_{k-1}$. Por esta razón, algunos autores prefieren definir el producto en la expresión de la densidad anterior como

$$\prod_{j=1}^{k} y_j^{\alpha_j - 1}$$

y se sobrentiende que

$$y_k = 1 - \sum_{j=1}^{k-1} y_j.$$

(8) Para k = 2, la densidad anterior de la v.a. $Y_1$ se reduce a la de una distribución beta en el intervalo [0,1] de parámetros $\alpha_1$ y $\alpha_2$.

**PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCION DE DIRICHLET**

La distribución de Dirichlet posee algunas propiedades interesantes, algunas de las cuales se utilizan más adelante, y que pasamos a enunciar.

**Proposición 0.1**

*Si* $(Y_1,\dots,Y_k) \approx D(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, *entonces si* $k_1 < k$ *se verifica*

$$\left(Y_1,\dots,Y_{k_1}\right) \approx D\left(\alpha_1,\dots,\alpha_{k_1}, \sum_{j=k_1+1}^{k} \alpha_j\right).$$

Este teorema afirma que cualquier distribución marginal de una distribución de Dirichlet sigue, también, una ley de Dirichlet.

Para la distribución marginal de cada v.a. $Y_j$ se tiene el siguiente resultado

**Proposición 0.2**

*Si* $(Y_1,\dots,Y_k) \approx D(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, *entonces*

$$Y_j \approx Be\left(\alpha_j, \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) - \alpha_j\right), \text{ para } j = 1, \dots, k.$$

Por último, es importante reseñar que se conserva la distribución de Dirichlet al considerar la distribución conjunta de sumas, de un determinado número de sumandos, en una distribución de Dirichlet.

<u>**Proposición 0.3**</u>

*Si* $(Y_1,\dots,Y_k) \approx D(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ *y si* $r_1,\dots,r_s \in \mathbb{Z}$ *tales que* $0 < r_1 < \dots < r_s = n$, *entonces*

$$\left( \sum_{i=1}^{r_1} Y_i,\ \sum_{i=r_1+1}^{r_2} Y_i, \dots, \sum_{i=r_{s-1}+1}^{r_s} Y_i \right) \approx D\left( \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i,\ \sum_{i=r_1+1}^{r_2} \alpha_i, \dots, \sum_{i=r_{s-1}+1}^{r_s} \alpha_i \right)$$

La demostración de este resultado y más propiedades de esta distribución se pueden consultar en Wilks (1962).

**DEFINICION DE PROCESO DE DIRICHLET (Ferguson (1973))**

Sea $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ un espacio medible. En la Definición 0.1 se estableció el concepto de probabilidad aleatoria P, y de dicha definición se deduce que para definir P es necesario determinar la distribución conjunta de las v.a. $(P(A_1), \dots, P(A_m))$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ y para cada sucesión $A_1, \dots, A_m$ de conjuntos medibles con $A_i \in \mathcal{A}$, $\forall\ i = 1, \dots, m$; basándonos en particiones medibles de $\mathcal{X}$.

Se dice que $\{B_1, \dots, B_k\}$ es una *partición medible de* $\mathcal{X}$ si $B_i \in \mathcal{A}$, $\forall\ i = 1, \dots, k$; y se verifica que $B_i \cap B_j = \emptyset$, para $i \neq j$, y $\bigcup_{j=1}^{k} B_j = \mathcal{X}$.

Para nuestros propósitos, es más conveniente definir la probabilidad aleatoria, P, definiendo la distribución conjunta de las v.a. $(P(B_1), \dots, P(B_k))$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$ y para cada partición medible $\{B_1, \dots, B_k\}$ de $\mathcal{X}$. A partir de estas distribuciones, se puede definir la distribución conjunta de $(P(A_1), \dots, P(A_m))$, para cada sucesión arbitraria $A_1, \dots, A_m$ de conjuntos medibles, utilizando las propiedades de aditividad finita de P, según se analiza a continuación.

Dada una sucesión arbitraria $A_1, \ldots, A_m$ de conjuntos medibles, formamos los $k = 2^m$ conjuntos resultado de tomar las intersecciones de los $A_i$ y sus complementarios. Esto es, se define $B_{\nu_1,\ldots,\nu_m}$, para cada $\nu_j = 0$ ó 1, por

$$B_{\nu_1,\ldots,\nu_m} = \bigcap_{j=1}^{m} A_j^{\nu_j} \qquad [0.3]$$

donde $A_j^1 = A_j$ y $A_j^0 = A_j^c$, siendo $A_j^c$ el complementario de $A_j$. Por tanto, $\left\{B_{\nu_1,\ldots,\nu_m}\right\}$ constituyen una partición medible de $\mathcal{X}$. Si se da la distribución de

$$\left\{P\left(B_{\nu_1,\ldots,\nu_m}\right);\ \nu_j = 0 \text{ ó } 1,\ j = 1, \ldots, m\right\}, \qquad [0.4]$$

entonces a partir de ella se puede definir la distribución conjunta de $(P(A_1), \ldots, P(A_m))$ definiendo $P(A_i)$, para cada $i = 1, \ldots, m$, por

$$P(A_i) = \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_m)/\nu_i=1} P\left(B_{\nu_1,\ldots,\nu_m}\right). \qquad [0.5]$$

Obsérvese que si, desde el principio, $A_1, \ldots, A_m$ es una partición medible de $\mathcal{X}$, entonces esto no conduce a definiciones contradictorias de la distribución de $(P(A_1), \ldots, P(A_m))$ supuesto que $P(\emptyset)$ está degenerada en 0. Bajo esta última condición, la distribución de $(P(A_1), \ldots, P(A_m))$, para cualquier sucesión arbitraria $A_1, \ldots, A_m$ de conjuntos medibles, está definida de forma única, una vez que estén dadas las distribuciones de $(P(B_1), \ldots, P(B_k))$, para cualquier partición medible arbitraria $\{B_1, \ldots, B_k\}$.

**CONDICION DE CONSISTENCIA (Condición C)**

Sean $\{B_1, \ldots, B_k\}$ y $\{B'_1, \ldots, B'_h\}$ dos particiones medibles de $\mathcal{X}$, siendo $\{B'_1, \ldots, B'_h\}$ un refinamiento de $\{B_1, \ldots, B_k\}$ con

$$B_1 = \bigcup_{i=1}^{r_1} B'_i;\ B_2 = \bigcup_{i=r_1+1}^{r_2} B'_i;\ \ldots;\ B_k = \bigcup_{i=r_{k-1}+1}^{h} B'_i$$

Entonces la distribución de

$$\left( \sum_{i=1}^{r_1} P(B'_i),\ \sum_{i=r_1+1}^{r_2} P(B'_i),\ \ldots,\ \sum_{i=r_{k-1}+1}^{h} P(B'_i) \right),$$

determinada a partir de la distribución conjunta de $(P(B'_1), \ldots, P(B'_h))$, es idéntica a la distribución de $(P(B_1), \ldots, P(B_k))$.

Nuestro propósito es que la condición C sea satisfecha en el desarrollo que haremos a continuación.

El siguiente lema justifica que esta condición es suficiente para la validez de las condiciones de consistencia de Kolmogorov en las distribuciones de $(P(A_1), \ldots, P(A_m))$, definidas basándonos en [0.3] y [0.4].

Designemos por $[0,1]^{\mathcal{A}}$ al espacio de todas las funciones de $\mathcal{A}$ en $[0,1]$ y por $\mathbb{B}\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ a la $\sigma$-álgebra generada por el conjunto de cilindros.

**Lema 0.4**

*Supongamos que*

*(1) Se ha definido un sistema de distribuciones conjuntas de $(P(B_1), \ldots, P(B_k))$, $\forall$ k $\in \mathbb{N}$ y $\forall$ $\{B_1, \ldots, B_k\}$ partición medible, satisfaciendo la condición C.*

*(2) Para conjuntos medibles arbritarios $A_1, \ldots, A_m$, las distribuciones de $(P(A_1), \ldots, P(A_m))$ están definidas como en [0.3], [0.4] y [0.5].*

*Entonces existe una probabilidad $\mathcal{P}$ sobre* $\left([0,1]^{\mathcal{A}},\ \mathbb{B}\mathcal{F}^{\mathcal{A}}\right)$ *que da lugar a estas distribuciones.*

**Definición 0.6 (Primera definición de Proceso de Dirichlet)**

Sea $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ un espacio medible y sea $\alpha$ una medida finita no nula sobre $(\mathcal{X},\mathcal{A})$, y sea $P = \{P(A)\}_{A\in\mathcal{A}}$ un proceso estocástico definido en el espacio de probabilidad $(\Omega,\sigma(\Omega),\lambda)$. Se dice que P *es un proceso de Dirichlet sobre* $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ *de parámetro* $\alpha$, si para cada partición medible $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ de $\mathcal{X}$, la distribución de la v.a. k-dimensional $(P(B_1),P(B_2),\ldots,P(B_k))$ es de Dirichlet de parámetros $(\alpha(B_1),\alpha(B_2),\ldots,\alpha(B_k))$.

**Observaciones.-**

(1) En esta definición la medida $\alpha$ permite precisar la distribución de $(P(B_1),P(B_2),\ldots,P(B_k))$ al tomar valores en cada uno de los elementos de la partición $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$.

(2) La condición C de consistencia para el proceso de Dirichlet es exactamente la Proposición 0.3 de la distribución de Dirichlet.

(3) El Lema 0.4 permite afirmar que las condiciones de consistencia de Kolmogorov se satisfacen y esto, a su vez, define un proceso estocástico que introduce una medida de probabilidad $\mathcal{P}$ sobre $\left([0,1]^{\mathcal{A}},\ \mathbb{B}\mathcal{F}^{\mathcal{A}}\right)$. Ferguson demostró que la distribución del proceso estará caracterizada por las distribuciones finito dimensionales del proceso.

(4) Puesto que $P(\mathcal{X})$ es degenerada en 1, P es una medida de probabilidad aleatoria.

(5) A veces emplearemos la notación "$P \in \mathcal{D}(\alpha)$" para expresar "P es un proceso de Dirichlet sobre $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ de parámetro $\alpha$".

(6) Si $P = \{P(A)\}_{A\in\mathcal{A}} \in \mathcal{D}(\alpha)$, entonces cuando $(\mathcal{X},\mathcal{A}) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, tiene sentido definir el proceso $F = \{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, donde $F(t) = P(]-\infty,t])$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Puede probarse que F es una distribución aleatoria. De esto, se deduce que la definición de m.a. de tamaño n obtenida mediante F, es un caso particular de m.a. de tamaño n obtenida mediante un proceso estocástico cuando el espacio medible es $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ o es $(\mathcal{X},\mathcal{B}(\mathcal{X}))$, con $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$.

Puesto que en el análisis bayesiano la obtención de una muestra es fundamental para la determinación de la probabilidad a posteriori, condicionada a la información $(X_1, \ldots, X_n)$ de una v.a. en estudio, establecemos a continuación este concepto en el contexto de los procesos de Dirichlet.

**MUESTRA EXTRAIDA MEDIANTE UN PROCESO DE DIRICHLET (FERGUSON (1973))**

**Definición 0.7**

Sea $P \in \mathcal{D}(\alpha)$. Entonces la colección de v.a. $X_1, \ldots, X_n$, con valores en $(\mathcal{X},\mathcal{A})$, se dice que es una m.a. de tamaño n, obtenida mediante P, si $\forall m \in \mathbb{N}$ y conjuntos $\mathcal{A}$-medibles, $A_1, \ldots, A_m$, $C_1, \ldots, C_n$, se verifica que

$$Pr\left(X_1 \in C_1, \ldots, X_n \in C_n \,/\, P(A_1), \ldots, P(A_m), P(C_1), \ldots, P(C_n)\right) = \\ = \prod_{j=1}^{n} P(C_j) \text{ c.s.} \qquad [0.6]$$

y Pr denota probabilidad.

**Observaciones.-**

(1) Como se puede ver esta definición no es más que un caso particular de la definición 0.4, por ser un proceso de Dirichlet un caso particular de probabilidad aleatoria.

(2) Intuitivamente $X_1, \dots, X_n$ es una m.a. de tamaño n de P si, dados $P(C_1), \dots, P(C_n)$, los sucesos $\left\{X_1 \in C_1\right\}, \dots, \left\{X_n \in C_n\right\}$ son independientes del resto del proceso, y son independientes entre ellos, con

$$Pr\left(X_j \in C_j \;/\; P(C_1), \dots, P(C_n)\right) = P(C_j) \quad \text{c.s.} \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

(3) Cuando se conoce la distribución del proceso P, la Definición 0.7 determina la distribución conjunta de $X_1, \dots, X_n$, $P(A_1), \dots, P(A_m)$, puesto que

$$Pr\left(X_1 \in C_1, \dots, X_n \in C_n, P(A_1) \le y_1, \dots, P(A_m) \le y_m\right) \qquad [0.7]$$

se puede obtener integrando [0.6] con respecto a la distribución conjunta de $P(A_1), \dots, P(A_m), P(C_1), \dots, P(C_n)$ sobre el conjunto $(0,y_1] \times \dots \times (0,y_m] \times (0,1] \times \dots \times (0,1]$.

La expresión [0.7] determina una probabilidad $\mathcal{P}$ sobre el espacio medible $\left(\mathcal{X}^n \times [0,1]^{\mathcal{A}}, \mathcal{A}^n \times \mathbb{B}\mathcal{F}^{\mathcal{A}}\right)$, al verificar las condiciones de consistencia de Kolmogorov.

**Proposición 0.5**

*Sea $P \in \mathcal{D}(\alpha)$ sobre $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ y sea X una muestra de tamaño 1 de P. Entonces para $A \in \mathcal{A}$, se verifica que*

$$\mathcal{P}(X \in A) = \frac{\alpha(A)}{\alpha(\mathcal{X})}.$$

**Proposición 0.6**

*Sea $P \in \mathcal{D}(\alpha)$ sobre $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ y sea $X$ una muestra de tamaño 1 de $P$. Sea $\{B_1, \ldots, B_k\}$ una partición medible de $\mathcal{X}$ y $A \in \mathcal{A}$. Entonces,*

$$\mathcal{P}\left(X \in A,\ P(B_1) \le y_1,\ \ldots,\ P(B_k) \le y_k\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha(B_j \cap A)}{\alpha(\mathcal{X})}\ \mathrm{D}\left[y_1, \ldots, y_k \,/\, \alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_k^{(j)}\right] \qquad [0.8]$$

*donde* $\mathrm{D}\left[y_1, \ldots, y_k \,/\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\right]$ *es la función de distribución de la distribución de Dirichlet,* $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, *y donde*

$$\alpha_i^{(j)} = \begin{cases} \alpha(B_i) & si\ i \neq j \\ \alpha(B_i) + 1 & si\ i = j \end{cases}.$$

Con todo lo anterior estamos en condiciones de obtener la distribución condicional de un proceso de Dirichlet P, dada una muestra $X_1, \ldots, X_n$ de P.

**Teorema 0.7 (Ferguson 1973)**

*Sea $P \in \mathcal{D}(\alpha)$ sobre $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ y $X_1, \ldots, X_n$ una m.a. de tamaño $n$ obtenida mediante $P$. Entonces, la distribución condicional de $P$ dado $X_1, \ldots, X_n$ es un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha + \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$, en donde para cada $x \in \mathcal{X}$, $\delta_x$ denota la medida sobre $(\mathcal{X},\mathcal{A})$ que da masa uno al punto $x$, esto es, para $A \in \mathcal{A}$ se verifica que:*

$$\delta_X(A) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \in A \\ 0 & si\ \ x \notin A \end{cases}$$

**Observaciones.-**

(1) Como se observa, la distribución a posteriori de un proceso de Dirichlet es un proceso de Dirichlet muy fácil de manejar, lo que permite estimar con facilidad, ya que, por ejemplo, si consideramos la

pérdida cuadrática, las reglas de Bayes van a ser las medias de esta distribución a posteriori tan manejable.

(2) También como notación emplearemos, para resultados de este tipo, $\mathcal{P}/\mathbf{X} \sim \mathcal{D}\left(\alpha + \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}\right)$, expresando "la distribución condicional del proceso dada la muestra $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ es de Dirichlet de parámetro $\alpha + \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$". Aquí $\mathcal{P}$ denota la distribución del proceso, no utilizamos la notación de que es la medida imagen a través de P, porque supondremos siempre que se cumplen las condiciones de consistencia de Kolmogorov. Por brevedad, a veces sólo se indicará $\mathcal{P}/\mathbf{X}$.

(3) De ahora en adelante, se utilizará $M = \alpha(\mathcal{X})$ para representar la masa total de $\alpha$, y se llamará confiabilidad en la distribución a priori de P, cuya distribución viene dada por $F_0(x) = \alpha(x)/M$.

Esto último se deduce del hecho de que de la definición resulta que $P(A) \approx Be(\alpha(A), M - \alpha(A))$, con lo cual

$$E[P(A)] = \alpha(A)/M = F_0(A)$$

En concreto, la distribución a posteriori de P, dada una muestra de tamaño n de P, según el Teorema 0.7, viene dada por

$$p_n \cdot F_0(x) + (1 - p_n) \cdot F_n(x)$$

donde $p_n = M / (M + n)$.

### 0.3.2. PROCESOS NEUTRALES A LA DERECHA

Otras probabilidades a priori que se pueden considerar sobre el espacio paramétrico de todas las distribuciones de probabilidad definidas en un espacio muestral dado, son los procesos neutrales por la derecha, introducidos por Doksum, en 1974.

Estos procesos gozan de propiedades semejantes a los procesos de Dirichlet, en el sentido de ser "no paramétricos" y de ser también neutral a la derecha, la distribución a posteriori de una probabilidad aleatoria. De hecho, como luego veremos, los procesos de Dirichlet son un caso particular de proceso neutral a la derecha.

**Definición 0.8**

Se dice que la función de distribución aleatoria $F = \{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un *proceso neutral a la derecha* (P.N.D.), si puede ser escrito de la forma

$$F(t) = 1 - e^{-Y(t)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

en donde $Y = \{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un proceso con incrementos independientes, tal que:

1) $Y(t)$ es no decreciente c.s.

2) $Y(t)$ es continuo por la derecha c.s.

3) $\lim_{t\to-\infty} Y(t) = 0$ c.s.

4) $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = \infty$ c.s.

**Observaciones.-**

(1) Intuitivamente, una distribución aleatoria $F(t)$ es un proceso neutral a la derecha, si para cada $t_1$, $t_2 \in \mathbb{R}$ con $t_1 < t_2$, se verifica que $\dfrac{1 - F(t_2)}{1 - F(t_1)}$ es independiente de $\{F(t) \;/\; t \le t_1\}$, es decir, si la porción de masa que $F(t)$ asigna al subintervalo $(t_2,\infty)$ del intervalo $(t_1,\infty)$ es independiente de lo que valga $F(t)$ a la izquierda de $t_1$.

(2) Claramente, diremos que la función de fiabilidad aleatoria

$R = \{R(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un proceso neutral a la derecha, si la función de distribución aleatoria $F(t) = 1 - R(t)$ es un proceso neutral a la derecha.

(3) Si consideramos la situación, que será en la que estaremos a lo largo de todo este trabajo, de ser $t \geq 0$ y consideramos una partición de $[0,\infty)$ en un número finito k de intervalos disjuntos $[a_0 = 0, a_1]$, $(a_1, a_2]$, ..., $(a_{k-1}, a_k = \infty)$ y llamamos $r_i = Y_{a_i} - Y_{a_i - 1}$, Doksum (1974), a partir de los resultados de Ferguson (1973), ha visto que se puede especificar una distribución de probabilidad sobre el espacio de las trayectorias del proceso Y(t) (y, por tanto, sobre el espacio paramétrico en los problemas de decisión Bayesiana no paramétrica), especificando las distribuciones finito dimensionales de las $r_i$ para cada partición $(a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \ldots, k$, sujetas a la condición de que la distribución de $r_i + r_{i+1}$ debe ser la misma que la obtenida por aplicación directa de las reglas al intervalo combinado $(a_{i-1}, a_{i+1}]$. Pero dado que Y(t) es un proceso con incrementos independientes, esto siempre se va a verificar, pues las $r_i$ son los incrementos del proceso.

Así pues, el problema de la existencia de una distribución de probabilidad a priori $\mathcal{P}$, que llamaremos inducida por el proceso, sobre el espacio paramétrico en los problemas de decisión Bayesiana no paramétrica, se reduce a la especificación del proceso con incrementos independientes Y(t) o, alternativamente, al de especificar las distribuciones de las variables aleatorias $r_i$ para cada partición finita $(a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \ldots, k$, sujetas a la condición de consistencia arriba especificada.

Hay que observar que, dado un proceso neutral a la derecha F(t), puede suceder que el espacio paramétrico no sea el espacio de funciones de distribución no aleatorias, pero como Doksum (1974) dice, existe una versión separable de él que si lo verifica, es decir, existe una versión separable de F(t) tal que $\mathcal{P}\{F$ / F es una función de distribución$\} = 1$, en donde $\mathcal{P}$ es la inducida por el proceso F(t). También es bueno observar que $\mathcal{P}$ no está definida sólo sobre el conjunto de funciones de distribución, pero podemos decir que $\mathcal{P}$ elige una F(t) que se puede "arreglar" mediante su versión separable, que sabemos siempre existe por un teorema debido a Doob (1953), de forma que sea ésta una función de distribución. Así pues, supondremos se verifican todas las condiciones necesarias para considerar a esta $\mathcal{P}$ como una medida de probabilidad a priori en el sentido tradicional y clásico, que en cualquier caso siempre podremos suponer existente. Por último, hacer notar que cuando calculemos esperanzas respecto a esta $\mathcal{P}$ estaremos integrando en un conjunto más amplio que $\mathcal{F}$, pero por razones plásticas de similitud con el caso paramétrico, utilizaremos una notación de la forma $\int_{\mathcal{F}} \ldots d\mathcal{P}(F)$.

**MUESTRA EXTRAIDA MEDIANTE UN P.N.D. (Doksum (1974))**

Sea $\mathbb{R}$ la recta real y $\mathcal{B}$ la $\sigma$-álgebra de Borel. Sea F(t) un proceso neutral a la derecha con distribución inducida $\mathcal{P}$. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio en $\mathbb{R}^n$. Diremos que la distribución condicionada de $(X_1, \ldots, X_n)$, dado F, es la de una muestra aleatoria obtenida a través de una distribución F. Esta distribución condicionada puede encontrarse del modo usual definiendo la distribución conjunta $\mathcal{P}_2$ del vector $(X_1,\ldots,X_n)$ y de F como sigue:

$$\mathcal{P}_2(F \in D,\ X_1 \in (-\infty,t_1],\ \ldots,\ X_n \in (-\infty,t_n]) = E_{\mathcal{P}}\left[I_D(F)\prod_{i=1}^{n} F(t_i)\right]$$

en donde D está en $\sigma(\mathcal{B}^{\mathcal{B}})$, $(-\infty,t_i] \in \mathcal{B}$ e $I_D$ es la función indicatriz de D.

Así, $\mathcal{P}_2$ es una probabilidad sobre $(\mathbb{R}^n \times [0,1]^{\mathcal{B}}, \sigma(\mathcal{B}^n \times \mathcal{B}^{\mathcal{B}}))$. Con esta definición observamos que

1) La distribución marginal de F es $\mathcal{P}$.

2) $\mathcal{P}_2(X_1 \in (-\infty,t_1],\ \ldots,\ X_n \in (-\infty,t_n] \ /\ F) = \prod_{i=1}^{n} F(t_i)$ c.s.

3) La distribución marginal de $(X_1,\ldots,X_n)$ es

$$\mathcal{P}_2(X_1 \in (-\infty,t_1],\ldots,X_n \in (-\infty,t_n]) = E_{\mathcal{P}}\left[\prod_{i=1}^{n} F(t_i)\right].$$

En particular, se verifica para n = 1 que

$$\mathcal{P}_2(X \in (-\infty,t]) = E_{\mathcal{P}}[F(t)] = \nu(t)$$

Doksum (1974) demuestra que $\nu(t)$ es una distribución y que caracteriza al proceso neutral a la derecha. A dicha distribución $\nu(t)$ se le llama parámetro del proceso.

Entre las propiedades más notables de los procesos neutrales a la derecha podemos citar la propiedad Bayesiana establecida por el siguiente teorema.

**Teorema 0.8 (Doksum (1974))**

*Si F es un proceso neutral a la derecha, entonces la distribución a posteriori de F dado $X_1$, ..., $X_n$ es la inducida por un proceso neutral a la derecha.*

Sin embargo, a diferencia de los procesos de Dirichlet, la distribución a posteriori de un proceso neutral a la derecha resulta inmanejable, en general, a la hora de hacer estimaciones. Es por esto por lo que posteriormente propondremos un método para poder hacer estimaciones con algunos procesos neutrales a la derecha particulares.

**DISTRIBUCION MARGINAL DE LA MUESTRA**

Dada una muestra X extraída mediante un proceso neutral a la derecha F(t), la distribución marginal de la muestra será

$$\nu(t) = \int_{\mathcal{F}} F(t)\, d\mathcal{P}(F)$$

que es el parámetro del proceso neutral a la derecha, con lo que

$$d\nu(t) = \int_{\mathcal{F}} dF(t)\, d\mathcal{P}(F).$$

**MEDIDA DE LEVY ASOCIADA A UN PROCESO NEUTRAL A LA DERECHA**

El proceso $Y = \{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ descrito en la Definición 0.8, tiene a lo sumo una cantidad numerable de puntos fijos de discontinuidad que podemos llamar $t_1, t_2, \ldots$, en algún orden.

Sean $S_1$, $S_2$, ..., los tamaños aleatorios de los saltos de Y(t) en $t_1$, $t_2$, ..., respectivamente. Así pues, $S_1$, $S_2$, ..., son v.a. independientes no negativas.

La diferencia

$$Z(t) = Y(t) - \sum_{j=1}^{\infty} S_j\, I_{[t_j,\infty)}(t),$$

en donde $I_B$ *denota la función indicatriz sobre el conjunto* B, es un proceso con incrementos independientes, no decrecientes c.s., sin puntos fijos de discontinuidad, siendo $\lim_{t\to-\infty} Z(t) = 0$ c.s. Por tanto, Z(t) debe tener una distribución infinitamente divisible.

Para un proceso con incrementos independientes y sin puntos fijos de discontinuidad, la representación de Lévy-Kolmogorov para el logaritmo de la función generatriz de momentos (obsérvese el signo menos), es de la forma

$$\log E\left[e^{-\theta Z(t)}\right] = -\theta\ \alpha(t) + \int_0^\infty \left(e^{-\theta u} - 1 + \theta u\right) \frac{dK_t(u)}{u^2} \qquad [0.9]$$

siempre que $Var(Z(t)) < \infty$, siendo $\alpha(t) = E[Z(t)]$ y $K_t$ una función sobre $\mathbb{R}$, continua a la derecha, no decreciente y acotada tal que $K_t(-\infty) = 0$ y $K_t(+\infty) < \infty$.

Obsérvese que los procesos neutrales a la derecha no tienen parte aleatoria, por ser Z(t) un proceso de incrementos independientes (Ferguson and Klass, 1972).

Entonces, a partir de [0.9], se puede escribir

$$\log E\left[e^{-\theta Z(t)}\right] = -\theta\left[\alpha(t) - \int_0^\infty \frac{dK_t(u)}{u}\right] + \int_0^\infty \left(e^{-\theta u} - 1\right) \frac{dK_t(u)}{u^2}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\log E\left[e^{-\theta Z(t)}\right] = -\ \theta\ b(t) + \int_0^\infty \left(e^{-\theta u} - 1\right) dN_t(u),$$

siendo

$$dN_t(u) = \frac{dK_t(u)}{u^2} \quad y \quad b(t) = \alpha(t) - \int_0^\infty \frac{dK_t(u)}{u}.$$

La medida $N_t(u)$ se denomina "medida de Lévy asociada al proceso neutral a la derecha F". Ahora, la parte no aleatoria viene representada por b(t).

Para que exista el momento de segundo orden de Z(t) y, equivalentemente, Var(Z(t)), es necesario y suficiente, Feller (1966), que la medida $K_t(u)$ sea finita, es decir, que

$$\int_0^\infty dK_t(u) < \infty,$$

y por ser

$$dN_t(u) = \frac{dK_t(u)}{u^2},$$

es necesario y suficiente que

$$\int_0^\infty u^2 dN_t(u) < \infty.$$

Por otro lado, la medida $N_t(u)$ verifica

$$\int_0^\infty \frac{u}{1+u}\, dN_t(u) < \infty,$$

por estar Z(t) concentrada en $(0,\infty)$, Feller (1966).

Así pues, existe una medida, $\forall t \in \mathbb{R}$, $N_t(u)$, asociada a cada proceso neutral a la derecha $F = \{F(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$, llamada medida de Lévy sobre los conjuntos de Borel de $(0,\infty)$ que verifica

$$\int_0^\infty \frac{u}{1+u}\, dN_t(u) < \infty,$$

y para que exista la Var(Z(t)) debe cumplir

$$\int_0^\infty u^2 dN_t(u) < \infty.$$

Por último, obsérvese que cuando Y(t) no tenga puntos fijos de discontinuidad, Y(t) coincide con Z(t).

**EL PROCESO DE DIRICHLET COMO CASO PARTICULAR DE P.N.D.**

Al proceso de Dirichlet le corresponde un proceso con incrementos independientes Y(t) que no tiene puntos fijos de discontinuidad (por lo que coincidirán Y(t) y Z(t)), ni parte no aleatoria, es decir, $b \equiv 0$, siendo el logaritmo de la función generatriz de momentos, por tanto,

$$\log E\left[e^{-\theta Y(t)}\right] = \int_0^\infty \left(e^{-\theta z} - 1\right) dN_t(z), \qquad [0.10]$$

en donde la medida de Lévy asociada es la dada por

$$dN_t(z) = \frac{e^{-\alpha(\mathbb{R})z}\,(e^{\alpha(t)z} - 1)}{z\cdot(1 - e^{-z})}\, dz \qquad [0.11]$$

y en donde $\alpha$ es el parámetro del proceso de Dirichlet. Además, si P es un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha$, la distribución $\nu(t)$, parámetro del proceso neutral a la derecha, es

$$\nu(t) = \frac{\alpha(t)}{\alpha(\mathbb{R})}\ .$$

## 0.4. ELEMENTOS DE FIABILIDAD ASOCIADOS A UNA FIABILIDAD ALEATORIA DE DIRICHLET

En la teoría de la fiabilidad clásica se llaman sistemas no reparables a aquellos que o bien no se pueden reparar, o la reparación es antieconómica, o el problema es tal que sólo interesa la historia de vida hasta que se produce el primer fallo. La cantidad más importante para describir estos sistemas es su tiempo de funcionamiento, T, una v.a. que queda determinada a través de su distribución de probabilidad y, por tanto, mediante el conocimiento de su función de distribución $F(t) = P(T \leq t)$, o de su función de fiabilidad $R(t) = P(T > t)$. Además, es especialmente importante la determinación del valor medio de la v.a. T, o la esperanza de otra función de T, o el valor de la vida fiable para un valor de fiabilidad R.

Estos últimos conceptos se pueden generalizar al caso habitual, en la estadística Bayesiana no paramétrica, de suponer que el tiempo de funcionamiento de un sistema hasta el fallo sigue un proceso de Dirichlet P de parámetro $\alpha$ con función de fiabilidad aleatoria R(t).

En lo que sigue, supondremos que estamos ante uno de estos procesos y nos aparecerán integrales estocásticas en media cuadrática de la forma

$$A(\omega) = \int_a^b g(t)\ dP(t,\omega)$$

pudiendo ser $b = +\infty$, i.e., integrales de Lebesgue, $\int_a^b g(t)P(t,\omega)\ dt$, de la función de t, $g(\cdot)P(\cdot,\omega)$, para $\omega$ fijo, que resultarán ser nuevas variables aleatorias $A(\omega)$.

**Definición 0.9**

Se llama *vida media aleatoria* del proceso estocástico $P \in \mathcal{D}(\alpha)$ a la v.a.

$$\begin{aligned} \mu:\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow \mu(\omega) = \int x\ dP(x,\omega) \end{aligned} \qquad [0.12]$$

Esta v.a. tiene media, designada por $\mu_0$, siempre que $\alpha$ tenga momento de orden uno respecto al origen finito, y viene dada por

$$\mu_0 = \int x\ \frac{d\alpha(x)}{\alpha(\mathbb{R})}$$

Ferguson (1973) demostró que la v.a. $\mu$ definida por [0.12] existe, así como la que surge en la siguiente definición.

**Definición 0.10**

Dada una función medible de valores reales Z definida sobre $(\mathcal{X},\mathcal{A})$, se llama *esperanza aleatoria de Z respecto al proceso $P \in D(\alpha)$*, a la v.a.

$$\begin{aligned} \eta:\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow \eta(\omega) = \int Z(x)\ dP(x,\omega) \end{aligned}$$

supuesto que $\alpha$ es tal que

$$\eta_0 = \int Z(x)\ \frac{d\alpha(x)}{\alpha(\mathbb{R})} < \infty ,$$

donde $\eta_0$ es la media de $\eta$.

Como un caso particular de esperanza aleatoria se tiene la varianza aleatoria.

**Definición 0.11**

Se llama *varianza aleatoria* del proceso estocástico $P \in \mathcal{D}(\alpha)$ a la v.a.

$$\begin{aligned} \sigma^2:\Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow \sigma^2(\omega) = \int x^2 dP(x,\omega) - \mu^2(\omega) \end{aligned}$$

supuesto que $\alpha$ tiene momento de orden dos respecto al origen finito.

La esperanza de esta v.a. es

$$E[\sigma^2] = \frac{\alpha(\mathbb{R})}{\alpha(\mathbb{R})+1}\ \sigma_0^2$$

donde

$$\sigma_0^2 = \int x^2 \frac{d\alpha(x)}{\alpha(\mathbb{R})} - \mu_0^2,$$

según obtuvo Ferguson (1973).

Supongamos ahora que la función de fiabilidad aleatoria del proceso $P \in \mathcal{D}(\alpha)$ es $R(t) = e^{-Y(t)}$, siendo $\{Y(t)\}_{t\in[0,\infty)}$ el proceso con incrementos independientes asociado al proceso de Dirichlet. A cada $R \in [0,1]$ se le hace corresponder un $t \in [0,\infty)$ tal que, a $\omega \in \Omega$ fijo, se verifica la siguiente ecuación

$$e^{-Y(t,\omega)} = R$$

o, equivalentemente,

$$Y(t,\omega) = -\ln R$$

es una ecuación resoluble y con solución medible.

**Definición 0.12**

Se llama *vida fiable aleatoria del proceso estocástico $P \in \mathcal{D}(\alpha)$, asociada al nivel de fiabilidad $R$,* a la v.a.

$$\begin{aligned} t_R : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow t_R(\omega) \end{aligned}$$

donde $t_R(\omega)$ es la solución de la ecuación $Y(t,\omega) = -\ln R$, a $\omega \in \Omega$ fijo.

## 0.5. ESTIMACION BAYESIANA NO PARAMETRICA DE FUNCIONES DE FIABILIDAD CON DATOS CENSURADOS

Una línea importante de desarrollo de la Teoría Bayesiana No Paramétrica ha sido el tratamiento de datos censurados. El problema de estimar una función de fiabilidad desconocida R, a partir de datos censurados o incompletos, se formula, habitualmente, como sigue. Sean $X_1, \ldots, X_n$ los tiempos de supervivencia verdaderos de n items o individuos que están censurados a la derecha por n tiempos censurados $Y_1, \ldots, Y_n$. Se supone que las $X_i$ son v.a.i.i.d. con distribución $F(u)$ y se quiere estimar la función de fiabilidad $R(u) = 1 - F(u)$. Sin embargo, el estadístico sólo dispone de los datos

$$Z_i = \min \{X_i, Y_i\}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \le Y_i \\ 0 & \text{si } X_i > Y_i \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n$$

y el problema es estimar F basándonos en estos datos. La estimación no paramétrica usual es la estimación del límite del producto, debida a Kaplan and Meier (1958).

La primera aproximación por completo Bayesiana a este problema fue llevada a cabo por Susarla and Van Ryzin (1976), que utilizaron un proceso de Dirichlet como un proceso a priori para F. Supongamos que $Z_1, \ldots, Z_k$ son las observaciones no censuradas $(\delta_i = 1)$ y $Z_{k+1}, \ldots, Z_n$ son las observaciones censuradas $(\delta_i = 0)$, y notemos por $Z_{(k+1)}, \ldots, Z_{(m)}$ las observaciones distintas entre las censuradas $Z_{k+1}, \ldots, Z_n$. Sea $\lambda_j$ el número de observaciones censuradas que son iguales a $Z_j$, $j = k+1,\ldots,n$; y sean

$N(u) \equiv$ número de observaciones (censuradas o no) mayores o iguales que u

$N^+(u) \equiv$ número de observaciones (censuradas o no) estrictamente mayores que u.

Bajo este contexto se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 0.9 (Susarla and Van Ryzin (1976))**

*Sea $F \in \mathcal{D}(\alpha)$. El estimador Bayes $\hat{R}_\alpha(u)$ de $R(u)$, dadas las observaciones con la notación anterior, que minimiza el riesgo bajo la función de pérdida*

$$L(\hat{R},R) = \int_0^\infty (\hat{R}(u) - R(u))^2 \, d\omega(u)$$

*con $\omega$ una función de peso no negativa y no decreciente, viene dado por*

$$\hat{R}_\alpha(u) = \frac{\alpha(u,\infty) + N^+(u)}{M + n} \prod_{j=k+1}^{\ell} \left\{ \frac{\alpha[Z_{(j)},\infty)+N(Z_{(j)})}{\alpha[Z_{(j)},\infty)+N(Z_{(j)})-\lambda_j} \right\} \qquad [0.13]$$

*en el intervalo $Z_{(\ell)} \le u < Z_{(\ell+1)}$ para $\ell = k,\ldots,m$ con $Z_{(k)} = 0$ y*

$Z_{(m+1)} = \infty$.

Si particularizamos [0.13] al caso en que no hay ninguna observación censurada (las distribuciones de censura tienen todas sus masas concentradas en $\infty$) el producto en [0.13] es la unidad y el primer término se reduce a

$$\frac{\alpha(u,\infty) + N^{+}(u)}{M + n} \quad \text{con } \ell = k = n \text{ y } Z_{(n)} = 0$$

en [0.13]. Por tanto, [0.13] se reduce a la estimación Bayes de R restringida a $\mathbb{R}^{+}$ ya que

$$\frac{\alpha(u,\infty) + N^{+}(u)}{M + n} = \frac{M}{M+n}\left[\frac{\alpha(u,\infty)}{M}\right] + \frac{n}{M+n}\left[\frac{N^{+}(u)}{n}\right] =$$

$$= \frac{M}{M+n} R(u) + \frac{n}{M+n} R_{n}(u)$$

i.e., se expresa como la combinación lineal convexa de la fiabilidad a priori y de la función de fiabilidad empírica.

**Corolario 0.10 (Susarla and Van Ryzin (1976))**

*El estimador del límite del producto de R, dado en Kaplan and Meier (1958) para la situación del contexto anterior, viene dado por*

$$\hat{R}(u) = \prod_{r} \left(\frac{n-r}{n-r+1}\right) \qquad [0.14]$$

*donde r toma los valores para los que* $Z'_{r} \leq u$ *y* $Z'_{r}$ *es una observación no censurada. Este estimador es el límite de* $\hat{R}_{\alpha}(u)$, *cuando* $M \longrightarrow 0$.

Este resultado afirma que, en sentido bayesiano, el estimador de R(t) dado por [0.13] tiende al estimador del límite del producto dado en Kaplan and Meier (1958), cuando la confiabilidad M en $\alpha(t)$ tiende a 0.

# CAPITULO 1

# MODELOS ALT-BN CON FUNCION DE ACELERACION LINEAL

## 1.1. PLANTEAMIENTO DEL MODELO ALT-BN BASICO

Sea $T_0 \geq 0$ la variable aleatoria que representa el tiempo de funcionamiento de un sistema en condiciones "normales" o "usuales". Se realizan las siguientes hipótesis sobre $T_0$ y el modelo de ensayos de vida acelerada (ALT).

(H1) Existen k + 1 niveles de stress que se fijan antes de realizar el ensayo y que se notan por $V_0, V_1, \ldots, V_k$. Entre ellos se cumple $V_0 < V_1 < \ldots < V_k$, siendo $V_0$ el nivel de stress habitual y $V_1, \ldots, V_k$ los niveles de stress acelerados.

(H2) En cada uno de los niveles de stress se someten a ensayo de vida $n_i$ sistemas, con $i = 0, 1, \ldots, k$. Los datos obtenidos son no censurados y son de la forma $T_{i,j}$ con $j = 1, \ldots, n_i$, donde $T_{ij}$ denota el tiempo de funcionamiento hasta el fallo del sistema j-ésimo, de entre los que se consideran en el nivel de stress i-ésimo.

(H3) Cada uno de los $n_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$, es suficientemente grande, de manera que sea factible la realización de un análisis asintótico.

(H4) La distribución de la v.a. $T_0$, notada por $F_0$, es la inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha$, siendo $\alpha$ una medida finita, no nula y no atómica sobre $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}^+)$. Abreviadamente $F_0 \in \mathcal{D}(\alpha)$.

(H5) Si denotamos por $T_i$ la v.a. que representa el tiempo de funcionamiento del sistema hasta el fallo bajo el nivel de stress $V_i$, con $i = 1, \ldots, k$, se verifica que $F_i$, la función de distribución de la v.a. $T_i$, y $F_0$ difieren en un parámetro de escala $\theta_i$. Es decir, se tiene que

$$F_i(t) = F_0(t \,/\, \theta_i) \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, k. \qquad [1.1]$$

La hipótesis (H5) simplemente afirma que un cambio en el nivel de stress no cambia la forma de la distribución del tiempo de funcionamiento, tan sólo cambia su escala.

Las cinco hipótesis anteriores constituyen lo que se llamará "Modelo Bayesiano No Paramétrico Básico de ALT con Función de Aceleración Lineal". O, abreviadamente, Modelo ALT-BN Básico con FAL.

## 1.2. ESTIMACION DEL PARAMETRO DE ESCALA $\theta_1$

En el proceso de estimación del parámetro de escala $\theta_1$ y, en consecuencia, de la función de distribución en el stress usual $V_0$, juega un papel importante el siguiente resultado.

**<u>Lema 1.1</u> (Maté)**

*La distribución aleatoria* $F_1(t)$ *es la inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro* $\alpha_1(t) = \alpha\left(\frac{t}{\theta_1}\right)$.

<u>Demostración</u>.

Por hipótesis, $F_0$ es una función de distribución aleatoria cuya distribución viene inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha$, con $\alpha$ una medida finita no nula sobre $(\mathbb{R}^+,\mathcal{B}^+)$. Como todo proceso de Dirichlet es un proceso neutral a la derecha, se deduce que

$$F_0(t) = 1 - e^{-Y_0(t)} \qquad [1.2]$$

con $\{Y_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso de incrementos independientes que satisface las cuatro propiedades de la Definición 0.8. Se sabe que en este caso al proceso de Dirichlet le corresponde un proceso de incrementos independientes, $Y_0(t)$, que no tiene puntos fijos de discontinuidad ni parte no aleatoria, i.e., se verifica que b = 0 y el logaritmo de la función generatriz de momentos es

$$\log E\left[e^{-\theta Y_0(t)}\right] = \int_0^\infty \left(e^{-\theta z} - 1\right)\, dN_t(z)$$

en donde la medida de Lévy asociada está dada por

$$dN_t(z) = \frac{e^{-\alpha(\mathbb{R})z}\left(e^{\alpha(t)z} - 1\right)}{z(1 - e^{-z})}\,dz$$

con $\alpha$ el parámetro del proceso de Dirichlet.

De la relación entre las funciones de distribución en los diferentes niveles de stress, [1.1], y de [1.2] se tiene que

$$F_i(t) = F_0\left(\frac{t}{\theta_i}\right) = 1 - e^{-Y_0\left(\frac{t}{\theta_i}\right)} = 1 - e^{-Y_i(t)}$$

donde $Y_i(t) = Y_0\left(\frac{t}{\theta_i}\right)$ es un proceso de incrementos independientes, por serlo $Y_0(t)$ y mantenerse dicha propiedad por cambios de escala, y que, además, es no decreciente, continuo por la derecha y verifica que $\lim_{t\to 0} Y_i(t) = 0$ y $\lim_{t\to+\infty} Y_i(t) = \infty$ de manera trivial.

Por tanto, $F_i$ es un proceso neutral a la derecha al igual que $F_0$, en el que se tiene

$$\log E\left[e^{-\theta Y_i(t)}\right] = \int_0^\infty \left(e^{-\theta z} - 1\right) dN_{t,i}(z)$$

con

$$dN_{t,i}(z) = dN_{t/\theta_i}(z) = \frac{e^{-\alpha(\mathbb{R})z}\left(e^{\alpha(t/\theta_i)z} - 1\right)}{z(1 - e^{-z})} dz$$

De esta forma, se ha obtenido la representación de Lévy del proceso $Y_i(t)$ como proceso de Dirichlet, y de dicha representación se deduce que $\alpha_i(t) = \alpha\left(\frac{t}{\theta_i}\right)$ y $\alpha_i(\mathbb{R}) = \alpha(\mathbb{R})$.

Luego, $F_i(t)$ es una función de distribución aleatoria cuya distribución viene inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha_i$, donde $\alpha_i(t) = \alpha\left(\frac{t}{\theta_i}\right)$. ■

Una vez demostrado este resultado, lo primero que hay que observar es que, para todo $i = 1, \ldots, k$, $\theta_i$ es un parámetro de escala para $F_i$. Sin embargo, $\alpha_i(t)$, aunque pertenece a la misma familia que $\alpha(t)$, depende de un parámetro desconocido $\theta_i$.

## 1.2.1. CONTRUCCION DE UN ESTIMADOR PARA $\theta_i$

El parámetro $\theta_i$ se podrá estimar a partir de las observaciones $T_{h,j}$, $h = 0, i$, $j = 1, \ldots, n_h$, mediante un estimador para $F_i(t)$ que se construirá utilizando las mismas observaciones y el conocimiento a priori dado por $\alpha(t)$ y M.

Sea $i = 1, \ldots, k$ fijo. Se pueden construir los estimadores Bayes bajo pérdida cuadrática para $F_0(t)$ y $F_i(t)$ con las observaciones $T_{h,j}$, $h = 0, i$, $j = 1, \ldots, n_h$. Al aplicar el resultado de Ferguson (1973), los estimadores Bayes bajo pérdida cuadrática, para $F_0$ y $F_i$, se obtienen como combinaciones lineales convexas de las correspondientes funciones de distribución empíricas, en dichos niveles de stress, y de las correspondientes funciones de distribución a priori. Por tanto, si para $h = 0, i$ se establece la notación siguiente:

$\hat{F}_{h,n_h}(t) \equiv$ estimador Bayes bajo pérdida cuadrática de $F_h$ a partir de una muestra de tamaño $n_h$ en el nivel de stress $V_h$.

$F_{n_h}(t) \equiv$ función de distribución empírica bajo el nivel de stress $V_h$.

$\tilde{F}_h(t) \equiv$ función de distribución a priori bajo el nivel de stress $V_h$.

Resulta que

$$\tilde{F}_0(t) = \frac{\alpha(t)}{M} \quad \text{y} \quad \tilde{F}_i(t) = \tilde{F}_0\left(\frac{t}{\theta_i}\right).$$

El estimador Bayes bajo pérdida cuadrática para $F_h$, con $h = 0, i$, es

$$\hat{F}_{h,n_h}(t) = \frac{n_h}{M+n_h} F_{n_h}(t) + \frac{M}{M+n_h} \tilde{F}_h(t) \qquad [1.3]$$

Para la obtención del estimador de $\theta_i$ se consideran las transformaciones siguientes:

$$T_0^* = \ln T_0 \quad , \quad T_i^* = \ln T_i$$

con lo cual se pasa de

$$T_i \stackrel{D}{=} \theta_i T_0$$

a

$$T_i^* \stackrel{D}{=} T_0^* + \Delta_i$$

con $\Delta_i = \ln \theta_i$. Es decir, el parámetro de escala $\theta_i$ se transforma en un parámetro de localización $\Delta_i$.

Sea $h = 0, i$, si se denota por $F_h^*$ a la función de distribución de la variable aleatoria $T_h^*$, resulta que el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática para $F_h^*$ será

$$\hat{F}^*_{h,n_h}(t) = \frac{n_h}{M+n_h} F^*_{n_h}(t) + \frac{M}{M+n_h} \tilde{F}^*_h(t) \qquad [1.4]$$

donde $F^*_{n_h}(t)$ es la función de distribución empírica de las nuevas observaciones $\ln T_{h,j}$ y $\tilde{F}^*_h(t)$ es la función de distribución a priori, bajo el nivel de stress $V_h$, para la función de distribución $F_h^*$.

Para poder precisar esto último es necesario el siguiente resultado.

**<u>Lema 1.2</u> (Maté)**

*Con la notación que se acaba de establecer, si* $F_h \in \mathcal{D}(\alpha_h)$, *entonces* $F_h^* \in \mathcal{D}(\alpha_h^*)$ *con*

$$\alpha_h^*(t) = \alpha_h(e^t) \quad \textit{para} \quad h = 0, i,$$

*siendo* $\alpha_0 \equiv \alpha$.

<u>Demostración</u>.

Por hipótesis, $F_h$ sigue una distribución inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha_h$. Por tanto, si se considera como proceso neutral a la derecha, resulta que

$$F_h(t) = 1 - e^{-Y_h(t)}$$

con $\{Y_h(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso de incrementos independientes que satisface las cuatro propiedades de la Definición 0.8, y que no tiene puntos fijos de discontinuidad ni parte no aleatoria, i.e., se verifica que b = 0 y el logaritmo de la función generatriz de momentos es

$$\log E\left[e^{-\theta Y_h(t)}\right] = \int_0^\infty \left(e^{-\theta z} - 1\right) dN_{t,h}(z)$$

en donde la medida de Lévy asociada está dada por

$$dN_{t,h}(z) = \frac{e^{-\alpha_h(\mathbb{R})z}\left(e^{\alpha_h(t)} - 1\right)}{z(1 - e^{-z})}\, dz$$

con $\alpha_h$ el parámetro del proceso de Dirichlet $F_h$.

Por otra parte, la relación entre las funciones de distribución $F^*_h$ y $F_h$ es la siguiente:

$$F^*_h(t) = P(T^*_h \le t) = P(\ln T_h \le t) = P(T_h \le e^t) = F_h(e^t).$$

Por tanto, se verifica que

$$F^*_h(t) = 1 - e^{-Y_h(e^t)} = 1 - e^{-Y^*_h(t)}$$

donde $Y^*_h(t) = Y_h(e^t)$ $\forall t \in (-\infty,\infty)$ es un proceso que satisface las siguientes propiedades:

i) Es de incrementos independientes, ya que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, t_1 < \dots < t_n$, con $t_1, \dots, t_n \in (-\infty,\infty)$, se verifica que

$$Y^*_h(t_1),\quad Y^*_h(t_2) - Y^*_h(t_1),\quad \dots,\quad Y^*_h(t_n) - Y^*_h(t_{n-1})$$

son variables independientes, ya que por hipótesis

$$Y_h(t^*_1),\quad Y_h(t^*_2) - Y_n(t^*_1),\quad \dots,\quad Y_h(t^*_n) - Y_h(t^*_{n-1})$$

son independientes $\forall\ n \in \mathbb{N}$, donde

$$t^*_s = e^{t_s} \qquad y \qquad t^*_s \in [0,\infty)$$

para $s = 1,\dots,n$.

ii) Es continuo por la derecha, ya que

$$Y^*_h(t^+) = Y^*_h(t) \quad c.s.$$

por ser

$$Y_h(t^{*+}) = Y_h(t^*) \ c.s.$$

donde $t^* = e^t$.

iii) $\lim\limits_{t\to-\infty} Y^*_h(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} Y_h(e^t) = 0.$

iv) $\lim\limits_{t\to+\infty} Y^*_h(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} Y_h(e^t) = +\infty.$

Por tanto, $F^*_h$ es un proceso neutral a la derecha al igual que $F_h$, en el que se tiene

$$\log E\left[e^{-\theta Y^*_h(t)}\right] = \int_0^\infty \left(e^{-\theta z} - 1\right)\, dN^*_t(z)$$

con

$$dN^*_t(z) = dN_{e^t}(z) = \frac{e^{-\alpha_h(\mathbb{R})z}\left(e^{\alpha_h(e^t)z} - 1\right)}{z(1 - e^{-z})}\ dz.$$

De esta forma, se ha obtenido la representación de Lévy del proceso $Y^*_h(t)$ como proceso de Dirichlet, y de dicha representación se deduce que

$$\begin{aligned} \alpha^*_h :\ (-\infty,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow \alpha^*_h(t) = \alpha_h(e^t) \end{aligned}$$

es una medida finita no nula sobre $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, ya que lo es $\alpha_h$, y $\alpha^*_h(\mathbb{R}) = \alpha_h(\mathbb{R})$.

Luego, $F^*_h(t)$ es una función de distribución aleatoria cuya distribución viene inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha^*_h$, donde $\alpha^*_h(t) = \alpha_h(e^t)$. ∎

Con todo lo anterior estamos en condiciones de definir un estimador para $\theta_i = e^{\Delta_i}$, mediante la definición de un estimador de mínima distancia de $\Delta_i = \ln \theta_i$.

Construimos un estimador $\hat{\Delta}_{n_0,n_i}$ de $\Delta_i$, como un valor de $\Delta_i$ que minimice la distancia de Crámer-von Mises

$$W^2 = \int_0^\infty \left[\hat{F}^*_{0,n_0}(t - \Delta_i) - \hat{F}^*_{i,n_i}(t)\right]^2 dt \qquad [1.5]$$

**CASO $n_0 = n_i$ $\forall$ i = 1, ..., k**

En estas condiciones, la distancia de Cramér-von Mises queda de la forma

$$W^2 = \int_0^\infty \left(\frac{n_0}{M+n_0}\right)^2 \left[F^*_{n_0}(t - \Delta_i) - F^*_{n_i}(t)\right]^2 dt$$

ya que

$$\hat{F}^*_{0,n_0}(t-\Delta_i) = \frac{n_0}{M+n_0} F^*_{n_0}(t - \Delta_i) + \frac{M}{M+n_0} \tilde{F}^*_0(t - \Delta_i) =$$

$$= \frac{n_0}{M+n_0} F^*_{n_0}(t - \Delta_i) + \frac{M}{M+n_0} \left[\frac{\alpha\left(e^{t-\Delta_i}\right)}{M}\right]$$

y

$$\hat{F}^*_{i,n_i}(t) = \frac{n_0}{M+n_0} F^*_{n_i}(t) + \frac{M}{M+n_0} \tilde{F}^*_i(t) =$$

$$= \frac{n_0}{M+n_0} F^*_{n_i}(t) + \frac{M}{M+n_0} \left[\frac{\alpha\left(e^{t-\Delta_i}\right)}{M}\right]$$

debido a que

$$\tilde{F}^*_0(t-\Delta_i) = \frac{\alpha^*(t-\Delta_i)}{M} = \frac{\alpha\left(e^{t-\Delta_i}\right)}{M}$$

y

$$\tilde{F}^*_i(t) = \frac{\alpha^*_i(t)}{M} = \frac{\alpha_i(e^t)}{M} = \frac{\alpha\left(e^t/\theta_i\right)}{M} = \frac{\alpha\left(e^t/e^{\Delta_i}\right)}{M} = \frac{\alpha\left(e^{t-\Delta_i}\right)}{M}$$

por ser $\theta_i = e^{\Delta_i}$.

A continuación, siguiendo el razonamiento de Padgett and Wei (1982), vamos a obtener el estimador de $\theta_i$.

Designemos las observaciones, en el nivel de stress h, por $t_{h,j}$, para $h = 0,\ i$, y $j = 1, \ldots, n_i$. Notemos por $t^*_{h,j} = \ln t_{h,j}$ a las observaciones transformadas por la función logaritmo, en el nivel de stress h. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$t^*_{0,1} \leq \ldots \leq t^*_{0,n_0} \quad \text{y} \quad t^*_{i,1} \leq \ldots. \leq t^*_{i,n_i}.$$

Se sabe que, para $h = 0,\ i$, se verifica que

$$F_{n_h}(t) = \sum_{j=1}^{n_h} \frac{1}{n_h}\, I_{(-\infty,t]}(t_{h,j}),$$

$$F^*_{n_h}(t) = \sum_{j=1}^{n_h} \frac{1}{n_h}\, I_{(-\infty,t]}(t^*_{h,j}).$$

Sea A un número real tal que

$$A > \text{máx}\left\{t^*_{0,1} + \Delta_i,\ \ldots,\ t^*_{0,n_0} + \Delta_i,\ t^*_{i,1},\ \ldots,\ t^*_{i,n_i}\right\}.$$

Entonces, la expresión [1.5] queda

$$W^2 = \int_0^A \left(\frac{n_0}{M+n_0}\right)^2 \left[\sum_{j=1}^{n_0} \frac{1}{n_0}\, I_{(-\infty,t-\Delta_i]}(t^*_{0,j}) - \sum_{\ell=1}^{n_0} \frac{1}{n_0}\, I_{(-\infty,t]}(t^*_{i,\ell})\right]^2 dt$$

Elevando al cuadrado y agrupando términos en esta expresión, hay que minimizar en $\Delta_1$ la cantidad

$$2\sum_{j=1}^{n_0}\sum_{\ell=1}^{n_0}\frac{1}{n_0^2}\text{ máx }(t^*_{0,j}+\Delta_1, t^*_{1,\ell}) - \sum_{j=1}^{n_0}\sum_{\ell=1}^{n_0}\frac{1}{n_0^2}\text{ máx }(t^*_{0,j}+\Delta_1, t^*_{0,\ell}+\Delta_1)$$

$$=\sum_{j=1}^{n_0}\sum_{\ell=1}^{n_0}\frac{1}{n_0^2}(t^*_{0,j}+t^*_{1,\ell})+\sum_{j=1}^{n_0}\sum_{\ell=1}^{n_0}\frac{1}{n_0^2}\left|t^*_{1,\ell}-t^*_{0,j}-\Delta_1\right|.$$

Por tanto, se trata de buscar

$$\min_{\Delta_1}\sum_{j=1}^{n_0}\sum_{\ell=1}^{n_0}\frac{1}{n_0^2}\left|t^*_{1,\ell}-t^*_{0,j}-\Delta_1\right| \qquad [1.6]$$

Ya que

$$\sum_{j=1}^{n_0}\sum_{\ell=1}^{n_0}\frac{1}{n_0^2}=1,$$

es fácil ver que un valor $\hat{\Delta}_{n_0,n_0}$ de $\Delta_1$ solución de [1.6] es una mediana de la distribución de probabilidad discreta con función de distribución $H_{n_0,n_0}$, y cuya función de masa de probabilidad es

$$h_{n_0,n_0}(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{n_0^2} & \text{si } v=t^*_{1,\ell}-t^*_{0,j};\ j=1,\dots,n_0;\ \ell=1,\dots,n_0\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases} \qquad [1.7]$$

Obsérvese que $H_{n_0,n_0}$ es una estimación de la función de distribución de la v.a. $T^*_1 - T^*_0$ que es simétrica respecto de $\Delta_1$. Además, como $T^*_1 = T^*_0 + \Delta_1$, se puede afirmar que $\Delta_1$ es una mediana de la v.a. $T^*_1 - T^*_0$. Por tanto, es también intuitivamente claro que un procedimiento sensible es eligir $\hat{\Delta}_{n_0,n_0}$ para estimar $\Delta_1$. Un estimador natural de $\theta_1 = e^{\Delta_1}$ es $\hat{\theta}_{n_0,n_1} = e^{\hat{\Delta}_{n_0,n_0}}$, que es también el estimador de mínima distancia de $\theta_1$ para el problema de escala, según han probado Drossos and Philippou (1980).

**CASO $n_0 \neq n_i$ para algún $i = 1, \ldots, k$**

En este caso, no es posible obtener directamente el estimador, como hemos encontrado en el caso anterior. No obstante, se puede definir un estimador $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$ de $\theta_i$, como un valor que minimice la distancia de Cramér-von Mises siguiente

$$W^2 = \int_0^\infty \left[ \hat{F}_{0,n_0}(t/\theta_i) - \hat{F}_{i,n_i}(t) \right]^2 dt \qquad [1.8]$$

El cálculo de $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$, en aplicaciones prácticas, requerirá de un programa o pseudocódigo, que se proporciona en el apéndice A.

## 1.3. CONSISTENCIA DEL ESTIMADOR $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$ DEL PARAMETRO DE ESCALA $\theta_i$

Para demostrar que el estimador $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$, definido por [1.8], es fuertemente consistente para estimar $\theta_i$, vamos a probar que $\hat{\Delta}_{n_0,n_i}$ definido como un valor que minimiza

$$\int_0^\infty \left( \hat{F}^*_{0,n_0}(t - \Delta_i) - \hat{F}^*_{i,n_i}(t) \right)^2 dt, \qquad [1.9]$$

es fuertemente consistente para estimar $\Delta_i = \ln \theta_i$.

Observamos que si $n_0 \neq n_i$, la expresión [1.9] resulta ser

$$\int_0^\infty \left[ \frac{n_0}{M+n_0} F^*_{n_0}(t - \Delta_i) - \frac{n_i}{M+n_i} F^*_{n_i}(t) + \frac{M}{M+n_0} \tilde{F}^*_0(t - \Delta_i) - \frac{M}{M+n_i} \tilde{F}^*_i(t) \right]^2 dt$$

aplicando [1.4] a h = 0 y h = i.

Sean ahora

$$\eta_0 = \frac{n_0}{M+n_0} \qquad \text{y} \qquad \eta_i = \frac{n_i}{M+n_i}$$

con lo cual suponer que $n_0 \neq n_i$ equivale a suponer que $\eta_0 \neq \eta_i$, y el problema es encontrar el $\Delta_i$ que minimiza

$$\int_0^\infty \left[\eta_0 F^*_{n_0}(t - \Delta_i) - \eta_i F^*_{n_i}(t) + (\eta_0 - \eta_i)\tilde{F}^*_0(t - \Delta_i)\right]^2 dt$$

ya que $\tilde{F}^*_i(t) = \tilde{F}^*_0(t - \Delta_i)$.

Desarrollando la última integral, se trata de encontrar un $\Delta_i$ que minimice

$$\int_0^\infty \left(\eta_0 F^*_{n_0}(t - \Delta_i) - \eta_i F^*_{n_i}(t)\right)^2 dt + \int_0^\infty (\eta_0-\eta_i)^2[\tilde{F}^*_{n_0}(t - \Delta_i)]^2 dt +$$
$$+ \int_0^\infty 2(\eta_i-\eta_0)\ \tilde{F}^*_0(t - \Delta_i)\left[\eta_0 F^*_{n_0}(t - \Delta_i) - \eta_i F^*_{n_i}(t)\right] dt$$

Por tanto, hay que minimizar una expresión en la que interviene

$$(\eta_i - \eta_0)^2 \int_0^\infty \left[\tilde{F}^*_0(t - \Delta_i)\right]^2 dt$$

que resulta ser una integral divergente $\forall\ \Delta_i$. Luego, no es posible obtener el estimador de $\Delta_i$ en el caso de $n_0 \neq n_i$.

En consecuencia, se supondrá, de ahora en adelante, que $n_i = n_0$, $\forall\ i = 1, \ldots, k$.

Por tanto, el problema de buscar un $\Delta_i$ que minimice la expresión [1.9], se reduce al problema de buscar un $\Delta_i$ que minimice

$$\left(\frac{n_0}{M+n_0}\right)^2 \int_0^\infty \left[F^*_{n_0}(t - \Delta_i) - F^*_{n_i}(t)\right)^2 dt$$

siendo $F^*_{n_h}(t)$ la función de distribución empírica de las observaciones $t^*_{h,j} = \ln t_{h,j}$ con $h = 0,\ i$ y $j = 1, \ldots, n_h$.

Si $H_{n_0,n_i}(v)$ es la función de distribución de la v.a. cuya función de masa de probabilidad viene dada por [1.7], resulta que

$$1 - H_{n_0,n_i}(v) = - \int_0^\infty \bar{F}^*_{n_0}(t - v)\ d\bar{F}^*_{n_i}(t)$$

siendo $\bar{F}^*_{n_h}(t) = 1 - F^*_{n_h}(t)$. Sea, ahora, $H_i$ la función de distribución de la v.a. $T_1^* - T_0^*$, siendo $T_h^* = \ln T_h$ con $h = 0, 1$. Para dicha función de distribución se verifica que

$$1 - H_1(v) = - \int_0^{\infty} \bar{F}_0^*(t - v)\, d\bar{F}_1^*(t)$$

Se tiene, entonces, el siguiente resultado.

**Proposición 1.3**

$$H_{n_0,n_1}(v) \xrightarrow[n_0 \to \infty]{c.s.} H_1(v)$$

Demostración.

Por el teorema de Glivenko-Cantelli se verifica que

$$\bar{F}_{n_0}^* \xrightarrow[n_0 \to \infty]{c.s.} \bar{F}_0^* \quad \text{y} \quad \bar{F}_{n_1}^* \xrightarrow[n_1 \to \infty]{c.s.} \bar{F}_1^*$$

A v fijo, la sucesión de v.a. $\left\{\bar{F}_{n_0}^*(v)\right\}$ converge c.s a $\bar{F}_0^*(v)$ y están uniformemente acotadas, por ser funciones de distribución, y, además, $\bar{F}_{n_1}^* \xrightarrow[n_1 \to \infty]{c.s.} \bar{F}_1^*$. Luego, según la proposición 18 del capítulo 11 de Royden (1968), se tiene que

$$\int_0^{\infty} \bar{F}_{n_0}^*(t - v)\, d\bar{F}_{n_1}^*(t) \xrightarrow[n_0 \to \infty]{c.s.} \int_0^{\infty} \bar{F}_{n_0}^*(t - v)\, d\bar{F}_1^*(t)$$

Por tanto, a v fijo, con probabilidad uno $H_{n_0,n_1}(v)$ converge a $H_1(v)$ cuando $n_0 \to \infty$. ■

**Proposición 1.4**

$$H_{n_0,n_0}(v) \xrightarrow[n_0 \to \infty]{c.s.} H_1(v) \quad \Longrightarrow \quad \Delta_{n_0} \xrightarrow[n_0 \to \infty]{c.s.} \Delta_1$$

*siendo* $\Delta_{n_0}$ *la mediana de* $H_{n_0,n_0}$ y $\Delta_1$ *la mediana de* $H_1$.

Demostración.

Por hipótesis, a v fijo, se verifica que $\forall\, \varepsilon, \eta > 0$ $\exists\, N(\varepsilon,\eta)$ / $\forall\, n \geq N(\varepsilon,\eta)$

$$P\left[\bigcap_{j=n}^{\infty} |H_{j,j}(v) - H_1(v)| \le \varepsilon\right] \ge 1 - \eta$$

En particular, aplicamos esta hipótesis a $\Delta_1$, la mediana de $H_1$, con lo cual se verifica $H_1(\Delta_1) = 0.5$. Por tanto, se tiene que $\forall\ \varepsilon,\eta_1 > 0 \quad \exists\ N_1(\varepsilon,\eta_1) \ /\ \forall\ n_0 \ge N_1(\varepsilon,\eta_1)$ se verifica que

$$P\left[\bigcap_{j=n_0}^{\infty} |H_{jj}(\Delta_1) - H_1(\Delta_1)| \le \varepsilon\right] \ge 1 - \eta_1$$

Es decir, $\forall\ n_0 \ge N_1(\varepsilon,\eta_1)$ se verifica que

$$|H_{n_0,n_0}(\Delta_1) - 0.5| \le \varepsilon$$

con gran probabilidad. O, equivalentemente, se verifica con gran probabilidad que

$$0.5 - \varepsilon \le H_{n_0,n_0}(\Delta_1) \le 0.5 + \varepsilon$$

Aplicando a esta desigualdad $H^{-1}_{n_0,n_0}$ se tiene con gran probabilidad que

$$H^{-1}_{n_0,n_0}(0.5 - \varepsilon) \le \Delta_1 \le H^{-1}_{n_0,n_0}(0.5 + \varepsilon)$$

Sean $\Delta^-_{n_0,\varepsilon} = H^{-1}_{n_0,n_0}(0.5 - \varepsilon)$ y $\Delta^+_{n_0,\varepsilon} = H^{-1}_{n_0,n_0}(0.5 + \varepsilon)$. Esto significa que con gran probabilidad

$$\Delta^-_{n_0,\varepsilon} \le \Delta_1 \le \Delta^+_{n_0,\varepsilon}$$

Además, se verifica que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta^-_{n_0,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \Delta^+_{n_0,\varepsilon} = \Delta_{n_0}.$$

Por tanto, dado $\varepsilon^* > 0$ se verifica que

i) $\exists\ \delta_1 > 0 \ /$ si $|\varepsilon| < \delta_1$ se cumple que $|\Delta^-_{n_0,\varepsilon} - \Delta_{n_0}| \le \varepsilon^*$

ii) $\exists\ \delta_2 > 0 \ /$ si $|\varepsilon| < \delta_2$ se cumple que $|\Delta^+_{n_0,\varepsilon} - \Delta_{n_0}| \le \varepsilon^*$

Sea $\delta = \text{mín}\ \{\delta_1,\ \delta_2\}$, si $|\varepsilon| < \delta$ se verifica simultáneamente

$$- \varepsilon^* + \Delta_{n_0} \le \Delta^-_{n_0,\varepsilon} \le \varepsilon^* + \Delta_{n_0}$$

$$- \varepsilon^* + \Delta_{n_0} \le \Delta^+_{n_0,\varepsilon} \le \varepsilon^* + \Delta_{n_0}$$

Teniendo en cuenta estas dos últimas desigualdades y la desigualdad en la que interviene $\Delta_1$, resulta que

$$- \varepsilon^* + \Delta_{n_0} \le \Delta_1 \le \varepsilon^* + \Delta_{n_0} \iff - \varepsilon^* \le \Delta_1 - \Delta_{n_0} \le \varepsilon^*$$

y esto se cumple $\forall\ n_0 \ge N_1(\varepsilon,\eta_1)$ con gran probabilidad. Es decir, se ha demostrado que

$$\Delta_{n_0} \xrightarrow[n_0\to\infty]{c.s.} \Delta_1. \ \blacksquare$$

<u>**Proposicion 1.5**</u>

*El estimador* $\hat{\theta}_{n_0,n_1}$ *definido por [1.8] es fuertemente consistente para estimar* $\theta_1$.

<u>Demostración</u>.

Por la Proposición 1.4, $\Delta_{n_0,n_1}$, definido como un valor que minimiza [1.9], es fuertemente consistente para estimar $\Delta_1 = \ln\ \theta_1$. El estimador $\hat{\theta}_{n_0,n_1}$ se define a partir de $\Delta_{n_0,n_1}$ por

$$\hat{\theta}_{n_0,n_1} = e^{\Delta_{n_0,n_1}}$$

Ahora se sabe que si g es una función continua, entonces

$$\Delta_{n_0,n_1} \xrightarrow[n_0\to\infty]{c.s.} \Delta_1 \implies g(\Delta_{n_0,n_1}) \xrightarrow[n_0\to\infty]{c.s.} g(\Delta_1).$$

Por tanto, aplicándolo a $g(x) = e^x$, se tiene que

$$e^{\Delta_{n_0,n_1}} \xrightarrow[n_0\to\infty]{c.s.} e^{\Delta_1}.$$

O, equivalentemente, resulta que

$$\hat{\theta}_{n_0,n_i} \xrightarrow[n_0\to\infty]{c.s.} \theta_i . \quad \blacksquare$$

## 1.4. CONSTRUCCION DE UN ESTIMADOR CONSISTENTE PARA $F_0$

Para cada $i = 1, \ldots, k$ notemos por $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$ al estimador consistente de $\theta_i$ definido en la sección anterior. Con estos estimadores procedemos a rescalar las observaciones $T_{i,j}$ por la relación

$$Z_{i,j} = \frac{T_{i,j}}{\hat{\theta}_{n_0,n_i}} \qquad [1.10]$$

Con las nuevas observaciones rescaladas $Z_{i,j}$ se procede a construir un estimador para la distribución $F_0$ de la variable $T_0$. Para ello utilizamos el estimador propuesto por Ferguson (1973), en el que se considera una combinación lineal convexa entre el conocimiento a priori, proporcionado por $\alpha(t)/M$, y el conocimiento muestral expresado por la función de distribución empírica $F_n(t)$ de las observaciones rescaladas $Z_{i,j}$. Dicho estimador será

$$\hat{F}_0(t) = \frac{M}{M+n}\,[\alpha(t)/M] + \frac{n}{M+n}\,F_n(t) \qquad [1.11]$$

donde

$n = \sum n_i$ es el número total de observaciones realizadas por el experimentador; y

$F_n(t)$ es la función de distribución empírica de los datos rescalados.

Para demostrar la consistencia de $\hat{F}_0(t)$ cuando $n_i \longrightarrow \infty$,

$i = 0,1, \ldots, k$ será necesario el siguiente lema.

**Lema 1.6**

*Sea* F *una función continua y creciente sobre* $[0,\infty)$/ $\lim_{x\to\infty} F(x) = c < \infty$. Sea $i \in \{0,1,\ldots,k\}$ *fijo. Entonces existe un suceso* $B_i$ *que tiene probabilidad uno tal que para cada* $\omega \in B_i$, *y dado un* $\varepsilon > 0$, *existe un entero* $N_1(i,\omega)$/ *para* $n_i \geq N_1(i,\omega)$ *se verifica*

$$\left| F(x) - F\left( \frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)x}{\theta_i} \right) \right| < \varepsilon \qquad \forall x$$

Demostración.

Sea $i \geq 1$. Debido a la consistencia fuerte de $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$ existe un suceso $B_i$, que tiene probabilidad uno, tal que para cada $\omega \in B_i$

$$\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega) \longrightarrow \theta_i \quad \text{cuando } n_0,n_i \longrightarrow \infty.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y fijemos un $\omega \in B_i$. Por la hipótesis existe un entero $M$ / $F(x) > c - \varepsilon$ para $x > M$. Sea $\gamma > 0$. Entonces F es uniformemente continua sobre $[0,M+\gamma]$. Por tanto, existe un $0 < \gamma_0 < \gamma$, de tal forma que si

$$\left| x - \frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)x}{\theta_i} \right| < \gamma_0,$$

entonces

$$\left| F(x) - F\left( \frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)x}{\theta_i} \right) \right| < \varepsilon.$$

Existe un entero $N_1(i,\omega)$ de modo que

$$\left| \frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)}{\theta_i} - 1 \right| < \frac{\gamma_0}{M+\gamma} \quad \text{para todo } n_0,n_i \geq N_1(i,\omega) \qquad [1.12]$$

lo que implica

$$\left| x - \frac{\hat{\theta}_{n_0,n_1}(\omega)x}{\theta_1} \right| < \gamma_0 \quad \text{para todo } n_0,n_1 \geq N_1(i,\omega)$$

siempre que $x \in [0,M+\gamma]$.

A continuación para $x > M + \gamma$, [1.12] implica que

$$\frac{\hat{\theta}_{n_0,n_1}(\omega)\, x}{\theta_1^-} > M,$$

ya que de [1.12] se sigue

$$- \frac{\gamma_0}{M+\gamma}\, x < \frac{\hat{\theta}_{n_0,n_1}(\omega)\, x}{\theta_1} - x$$

de donde

$$\frac{\hat{\theta}_{n_0,n_1}(\omega)\, x}{\underline{\theta_1}} > x \left(1 - \frac{\gamma_0}{M+\gamma} \right) > (M+\gamma) \left(1 - \frac{\gamma}{M+\gamma}\right) = M$$

y el resultado se sigue de la elección de M. ■

Ahora se puede probar la convergencia casi segura del estimador $\hat{F}_0(t)$ a $F_0(t)$.

**Teorema 1.7 (Maté)**

*El estimador de la función de distribución dado por [1.11] verifica que*

$$\hat{F}_0(t) \longrightarrow F_0(t)$$

*con probabilidad uno, cuando* $n_i \to \infty$, *para* $i = 0,\ldots,k$, *para cada* $t \in [0,t^*]$, *donde* $t^* = \sup\{x:\ F_0(x) < 1\}$.

Demostración.

En primer lugar, se puede observar que la función de distribución empírica de todas las observaciones rescaladas se puede expresar de la siguiente forma

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} I_{[Z_{ij} \le t]} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k} n_i F_{n_i}(t)$$

donde

$$F_{n_i}(t) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} I_{[Z_{ij} \le t]}$$

es la función de distribución empírica de las observaciones rescaladas correspondientes al nivel de stress $V_i$. Además, se puede definir el siguiente estimador de la función de distribución $F_0(t)$

$$F^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} I_{[T_{ij}/\theta_i \le t]} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k} n_i F_i^*(t)$$

donde

$$F_i^*(t) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} I_{[T_{ij}/\theta_i \le t]},$$

e $I_{[\cdot]}$ es la notación utilizada para la función indicatriz del conjunto que se encuentra definido entre corchetes.

Se puede observar que

$$[Z_{ij} \le t] = \left[ \frac{T_{ij}}{\theta_i} \le \frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i} t}{\theta_i} \right]$$

con lo cual, para cada i = 0, 1 ,..., k se verifica que

$$F_{n_i}(t) = F_i^* \left( \frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i} t}{\theta_i} \right)$$

y, por tanto,

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k} n_i \; F_i^* \left( \frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i} t}{\theta_i} \right).$$

Para probar el resultado, demostremos que para i fijo

$$F_i^* \left( \frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i} t}{\theta_i} \right) \longrightarrow F_0(t)$$

uniformemente en $t \in [0,t^*]$ con probabilidad uno, cuando $n_i \longrightarrow \infty$, i = 0, 1, ..., k, ya que

$$|F_0(t)-\hat{F}_0(t)| = \left| \frac{1}{M+n}\left(M + \sum_{i=0}^{k} n_i\right)F_0(t) - \frac{\alpha(t)}{M+n} - \frac{\sum_{i=0}^{k} n_i\, F_{n_i}(t)}{M+n} \right| =$$

$$= \left| \frac{MF_0(t)-\alpha(t)}{M+n} + \frac{1}{M+n} \sum_{i=0}^{k} n_i\, [F_0(t) - F_{n_i}(t)] \right| \leq$$

$$\frac{1}{M+n}\, |MF_0(t)-\alpha(t)| + \left| \frac{1}{M+n} \sum_{i=0}^{k} n_i \left[F_0(t) - F_i^{*}\left(\frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i}\, t}{\theta_i}\right)\right] \right| .$$

Por el lema de Glivenko-Cantelli existe un suceso $A_i$, con probabilidad uno, tal que para $\omega \in A_i$ y $\varepsilon > 0$ $\exists$ un entero $N_2(i,\omega)$ para el cual

$$\left| F_{n_i}\left(\frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)t}{\theta_i}\right) - F_0\left(\frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)t}{\theta_i}\right) \right| < \varepsilon \qquad [1.13]$$

siempre que $n_0$, $n_i \geq N_2(i,\omega)$.

Definimos el suceso $C_i = A_i \cap B_i$ donde $B_i$ es el suceso definido en el lema anterior. Sea $\omega \in C_i$. Entonces, para

$$n_0,\ n_i \geq N_0(i,\omega) = \max_{j=1,2} \left\{ N_j(i,\omega) \right\},$$

se tiene que

$$\left| F_{n_i}\left(\frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)t}{\theta_i}\right) - F_0(t) \right| \leq \left| F_{n_i}\left(\frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)t}{\theta_i}\right) - F_0\left(\frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)t}{\theta_i}\right) \right| +$$

$$+ \left| F_0\left(\frac{\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)t}{\theta_i}\right) - F_0(t) \right| < 2\varepsilon,$$

por el lema aplicado a $F_0$ y por [1.13].

Por último, [1.13] y el Lema 1.6 se verifican para todo $i = 0,\ 1,\ \dots,\ k$, siempre que

$$\omega \in C = \bigcap_{m=1}^{k} C_m \quad y \quad n_i \geq \text{máx } \{N_0(m,\omega),\ m = 1,\ldots,k\} \quad \forall\ i = 0,1,\ldots,k.$$

Por tanto, se sigue el resultado, ya que el suceso C tiene probabilidad uno. ∎

**Observación.-** La convergencia de $\hat{F}_0$ se verifica sólo sobre $[0,t^*]$, ya que no se pueden obtener observaciones más grandes que $t^*$.

## 1.5. EL MODELO ALT-BN GENERAL

En la primera parte de este capítulo, para estimar la función de distribución bajo el nivel de stress usual, se han utilizado las observaciones de este nivel de stress $V_0$ y de otro nivel de stress $V_i$. No obstante, parece que lo más general sería utilizar las observaciones de cualquier par de niveles de stress, $V_i$ y $V_j$. Esto es lo que nos proponemos hacer ahora y para ello consideramos las siguientes hipótesis sobre el modelo ALT, apoyándonos en el Modelo ALT-BN Básico con FAL.

(H1G) La hipótesis H1.

(H2G) La hipótesis H2 admitiendo además la posibilidad de $i = 1, \ldots, k$ cuando no se disponga de datos sobre sistemas en el nivel de stress habitual $V_0$.

(H3G) La hipótesis H3.

(H4G) Si denotamos por $T_i$ la v.a. que representa el tiempo de funcionamiento del sistema hasta el fallo bajo el nivel de stress $V_i$, con $i = 0, \ldots, k$, se verifica que las funciones de distribución $F_i$, de las v.a. $T_i$, con $i = 0, \ldots, k$, pertenecen a una familia de distribuciones común pero desconocida; y que existe una función de distribución F que pertenece a la misma familia paramétrica que $F_i$, con $i = 0, \ldots, k$, que viene inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha$, siendo $\alpha$ una medida finita no nula y no atómica sobre $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}^+)$. Abreviadamente $F \in \mathcal{D}(\alpha)$.

(H5G) La relación entre $F_i$, con $i = 0, \ldots, k$, y F, mencionadas en H4G, viene dada por

$$F_i(t) = F\left(AV_i^{\gamma}t\right), \quad i = 0, \ldots, k \qquad [1.14]$$

donde $A > 0$ y $\gamma > 0$ son constantes desconocidas.

Las cinco hipótesis anteriores constituyen lo que se llamará "Modelo Bayesiano No Paramétrico General de ALT con Función de Aceleración Lineal". O, abreviadamente, Modelo ALT-BN General con FAL.

Para estimar $\gamma$ consideramos la notación $\theta_{ij}$ para el factor de escala entre $F_j$ y $F_i$, i.e.,

$$F_j(t) = F_i\left(\frac{t}{\theta_{ij}}\right)$$

Luego, según [1.14], se tiene

$$F\left(AV_j^{\gamma}t\right) = F\left(\frac{AV_i^{\gamma}}{\theta_{ij}}\, t\right)$$

de donde

$$\theta_{ij} = \left(\frac{V_i}{V_j}\right)^{\gamma}, \quad \text{con } i \neq j \qquad [1.15]$$

Tomando logaritmos se tiene que

$$\gamma = \frac{\ln\ \theta_{ij}}{\ln\ V_i - \ln\ V_j} \qquad [1.16]$$

con lo cual se podrá estimar $\gamma$ estimando previamente $\theta_{ij}$.

Según el desarrollo que se ha realizado en el epígrafe

1.2, se puede estimar $\theta_{ij}$ mediante un estimador $\hat{\theta}_{n_i,n_j}$ que minimice la distancia de Crámer-von Mises siguiente

$$W^2 = \int_0^\infty \left[\hat{F}_{i,n_i}(t/\theta_{ij}) - \hat{F}_{j,n_j}(t)\right]^2 dt \qquad [1.17]$$

donde $\hat{F}_{h,n_h}(t)$, con $h = i, j$, es el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática para $F_h$, que según Ferguson es combinación lineal convexa de la función de distribución empírica bajo el nivel de stress $V_h$ y de la función de distribución a priori bajo ese mismo nivel de stress.

Se puede demostrar, según lo que se ha desarrollado en el epígrafe 1.3, que $\hat{\theta}_{n_i,n_j}$ es consistente para estimar $\theta_{ij}$. Además, se puede obtener de cada par de niveles de stress que consideremos $V_i$, $V_j$, con $i \neq j$, un estimador $\hat{\gamma}_{n_i,n_j}$ de $\gamma$, por la relación siguiente

$$\hat{\gamma}_{n_i,n_j} = \frac{\ln\ \hat{\theta}_{n_i,n_j}}{\ln\ V_i - \ln\ V_j} \qquad [1.18]$$

Por tanto, hay $\binom{k}{2}$ formas de seleccionar dos niveles de stress entre los k, si suponemos excluido el stress habitual $V_0$, y, en consecuencia, tendremos $\frac{1}{2}k(k - 1)$ estimadores de $\gamma$ que se pueden promediar para dar el siguiente estimador

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\left(\ln\ \hat{\theta}_{n_i,n_j}\right)\left(\ln\ \frac{V_i}{V_j}\right)}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\left(\ln\ \left(\frac{V_i}{V_j}\right)\right)^2} \qquad [1.19]$$

que también se puede poner como

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\left(\ln\ \frac{V_i}{V_j}\right)^2 \hat{\gamma}_{n_i,n_j}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\left(\ln\ \left(\frac{V_i}{V_j}\right)\right)^2}\ . \qquad [1.20]$$

**Teorema 1.8 (Maté)**

*El estimador de $\gamma$ definido por [1.19] es fuertemente consistente para estimar $\gamma$.*

Demostración.

Según lo anterior, para cada par de niveles de stress $V_i$, $V_j$, con $i \neq j$, se verifica que

$$\hat{\theta}_{n_i,n_j} \xrightarrow[n_i,n_j \to \infty]{c.s.} \theta_{i,j} ,$$

entonces sabemos que también se verificará que

$$g(\hat{\theta}_{n_i,n_j}) \xrightarrow[n_i,n_j \to \infty]{c.s.} g(\theta_{i,j})$$

cuando g sea una función continua. Por tanto, si para cada $V_i$, $V_j$, con $i \neq j$ consideramos la función continua

$$g(x) = \frac{\ln x}{\ln \frac{V_i}{V_j}}$$

se tendrá que

$$\frac{\ln \hat{\theta}_{n_i,n_j}}{\ln \frac{V_i}{V_j}} \xrightarrow[n_i,n_j \to \infty]{c.s.} \frac{\ln \theta_{i,j}}{\ln \frac{V_i}{V_j}}$$

o, de manera equivalente, según [1.16] y [1.18], que

$$\hat{\gamma}_{n_i,n_j} \xrightarrow[n_i,n_j \to \infty]{c.s.} \gamma$$

Ahora tenemos que demostrar que existe un suceso B con probabilidad 1 tal que para cada $\omega \in B$ y cada $\varepsilon > 0$ $\exists N \,/\, \forall n \geq N$ se verifica $-\varepsilon < \hat{\gamma} - \gamma < \varepsilon$ donde $\hat{\gamma}$ viene dado por [1.20].

Al ser $\hat{\gamma}_{n_i,n_j}$ fuertemente consistente para estimar $\gamma$, para cada $V_i$, $V_j$, con $i \neq j$ resulta que $\exists$ un suceso $C_{i,j}$ con probabilidad uno tal que para cada $\omega \in C_{i,j}$ y dado $\varepsilon > 0$ $\exists N_{i,j}(w) \,/\,$ si $n_i, n_j \geq N_{i,j}(\omega)$ se verifica

$$-\varepsilon < \hat{\gamma}_{n_i,n_j} - \gamma < \varepsilon$$

Ahora definimos el suceso $B = \bigcap_{i=1}^{k} \bigcap_{j=i+1}^{k} C_{i,j}$, entonces para cada $\omega \in B$ y dado $\varepsilon > 0$ se puede tomar

$$n \geq \max_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=i+1,\dots,k}} \{N_{i,j}(w)\}$$

y si consideramos la notación

$$\eta_{i,j} = \frac{\left(\ln \dfrac{V_i}{V_j}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \left(\ln \left(\dfrac{V_i}{V_j}\right)\right)^2}$$

entonces se verifica que

$$\hat{\gamma} - \gamma = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \eta_{i,j} \hat{\gamma}_{n_i,n_j} - \gamma = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \eta_{i,j} \hat{\gamma}_{n_i,n_j} - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \eta_{i,j}\gamma =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \eta_{i,j}(\hat{\gamma}_{n_i,n_j} - \gamma)$$

donde

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \eta_{i,j} = 1.$$

Por tanto, como

$$-\varepsilon < \hat{\gamma}_{n_i,n_j} - \gamma < \varepsilon$$

resulta que

$$-\varepsilon < \hat{\gamma} - \gamma < \varepsilon.$$

El resultado queda demostrado ya que el suceso B tiene probabilidad uno. ■

Teniendo en cuenta [1.14], si $\gamma$ fuese conocido, podríamos transformar (rescalar) los tiempos hasta el fallo de cualquier nivel de stress, para que correspondieran a tiempos hasta el fallo de cualquier otro nivel de stress. Así, las observaciones $T_{i\ell}$ bajo el nivel de stress $V_i$, con $\ell = 1, \ldots, n_i$, serían equivalentes a las observaciones $\left(\frac{V_i}{V_j}\right)^{\gamma} T_{i\ell}$ bajo el nivel de stress $V_j$, con $\ell = 1, \ldots, n_i$.

Ya que $\gamma$ no es conocido, utilizaremos su estimación $\hat{\gamma}$ para rescalar nuestras observaciones. Por tanto, definimos las $n_i$ observaciones rescaladas $Z_{i\ell}$ por la expresión

$$Z_{i\ell} = \left(\frac{V_i}{V_j}\right)^{\gamma} T_{i\ell} \qquad i = 1, \ldots, k, \quad \ell = 1, \ldots, n_i \qquad [1.21]$$

Ahora, con las nuevas observaciones $Z_{i\ell}$, se procede a construir un estimador de la función de distribución $F_0$ bajo el nivel de stress usual $V_0$, para ello utilizamos el estimador propuesto por Ferguson (1973) y tendremos que

$$\hat{F}_0(t) = \frac{M}{M+n} [\alpha(t)/M] + \frac{n}{M+n} F_n(t) \qquad [1.22]$$

donde

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ es el número total de observaciones realizadas por el experimentador; y

$F_n(t)$ es la función de distribución empírica de las observaciones rescaladas $Z_{i\ell}$.

Siguiendo la argumentación del epígrafe 1.4 se demuestra que el estimador dado por [1.22] es fuertemente consistente para estimar $F_0(t)$.

## 1.6. CONTRASTES DE BONDAD DEL AJUSTE EN LOS MODELOS ALT-BN

En los modelos ALT-BN que hemos venido desarrollando en este capítulo hay un problema interesante que es el de contrastar el ajuste de los datos a una determinada distribución $F_1(t)$. Shaked and Singpurwalla (1982) propusieron contrastes de ajuste en el contexto no paramétrico de los ALT. En este epígrafe se presenta la alternativa Bayesiana No Paramétrica al desarrollo de dichos contrastes, tomando como base el artículo de García y Quesada (1985).

Para el contraste de bondad del ajuste

$$H_0:\ F(t) \equiv F_1(t),\ \forall\ t \in \mathbb{R}$$

$$H_1:\ F(t) \not\equiv F_1(t),\ \text{en algún } t \in \mathbb{R}$$

se sugiere el estadístico

$$V_n = \frac{n}{M+n} \sup_t |F_n(t) - F(t)| + \frac{M}{M+n} \sup_t |\tilde{F}_0(t) - F(t)|$$

que es una combinación lineal convexa de la máxima diferencia entre la función de distribución empírica de los datos rescalados, $F_n(t)$, y $F(t)$; y de la máxima diferencia entre la función de distribución a priori, $\tilde{F}_0(t)$, y $F(t)$.

Se puede observar que si $\tilde{F}_0$ es una estimación a priori muy buena, en la expresión del estimador [1.11] y en la del estadístico $V_n$ se verifica que

$$\frac{M}{M+n} \longrightarrow 1 \iff V_n \longrightarrow \sup_t |\tilde{F}_0(t) - F(t)|$$

Por tanto, si $\tilde{F}_0(t)$ es una buena estimación a priori de $F(t)$ y si $H_0$ es cierta, las diferencias entre $\tilde{F}_0(t)$ y $F_1(t)$ deberían ser pequeñas, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. De esta forma, valores grandes de $V_n$, bajo $H_0$, tienden a desacreditar la hipótesis nula y, así, se rechazará $H_0$ cuando $V_n > V_{n,\alpha}$. Por otra parte, si $\tilde{F}_0$ es una estimación a priori muy mala, en la expresión del estimador [1.11] y en la del estadístico se verifica que

$$M \longrightarrow 0 \iff \frac{M}{M+n} \longrightarrow 0 \iff V_n \longrightarrow D_n$$

siendo $D_n$ el estadístico de Kolmogorov-Smirnov. Por tanto, si $\tilde{F}_0(t)$ es una estimación a priori muy mala, el estadístico $V_n$ no pondera la información a priori y resulta el contraste de bondad del ajuste habitual que rechaza, de nuevo, $H_0$ para valores grandes de $V_n$.

En situaciones intermedias el estadístico $V_n$ ponderará de manera adecuada las dos componentes.

Así, para contrastar

$$H_0:\ F(t) \equiv F_1(t),\ \forall\ t \in \mathbb{R}$$
$$H_1:\ F(t) \not\equiv F_1(t),\ \text{en algún } t \in \mathbb{R}$$

con un nivel de significación $\alpha$, se rechazará $H_0$ si y sólo si $V_n > V_{n,\alpha}$, donde $V_{n,\alpha}$ es tal que

$$\alpha = P\left[V_n > V_{n,\alpha} \,/\, H_0\right] = P\left[D_n > \frac{V_{n,\alpha} - C\,\frac{M}{M+n}}{\frac{n}{M+n}} \,/\, H_0\right]$$

siendo

$$D_n = \sup_t \left|F_n(t) - F(t)\right|$$

el estadístico de Kolmogorov-Smirnov y

$$C = \sup_t \left|\tilde{F}_0(t) - F_1(t)\right|,$$

con C una constante tal que $C \le 1$. Si ahora llamamos $D_{n,\alpha}$ al valor tal que

$$P\left[D_n > D_{n,\alpha} \,/\, H_0\right] = \alpha,$$

que se puede determinar, como es habitual, de las tablas de Birnbaum, resulta que

$$\frac{(M+n)V_{n,\alpha} - CM}{n} = D_{n,\alpha}$$

de donde

$$V_{n,\alpha} = \frac{n}{M+n} D_{n,\alpha} + \frac{M}{M+n} C.$$

Por tanto, a un nivel de significación $\alpha$, el test rechazará $H_0$ cuando

$$V_n > \frac{n}{M+n} D_{n,\alpha} + \frac{M}{M+n} C$$

y, en caso contrario, se aceptará $H_0$.

**Observaciones.-**

(1) Puesto que

$$P\left[V_n > V_{n,\alpha} / H_1\right] = P\left[D_n > D_{n,\alpha} + \frac{M}{n}\left(C - \sup_t |\tilde{F}_0(t) - F(t)|\right) / H_1\right] <$$

$$< P\left[D_n > D_{n,\alpha} / H_1\right]$$

equivale a que

$$\text{bajo } H_1, \quad \forall\ t \in \mathbb{R} \quad |\tilde{F}_0(t) - F(t)| < C$$

concluimos que el test de Kolmogorov-Smirnov será más potente que el nuestro para una alternativa $F(t)$, si y sólo si, $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $F(t)$ está dentro de la banda $\tilde{F}_0(t) \pm C$. Con lo cual, si existe al menos un $t \in \mathbb{R}$ para el que $F(t)$ esté fuera de la banda, nuestro test será más potente que el de Komogorov-Smirnov. Vemos, también, que si la hipótesis nula $F_1(t)$ está próxima a nuestra estimación a priori $\tilde{F}_0(t)$, $C$ será más pequeño, y de esta forma obtendremos tests más potentes.

Cuando la hipótesis nula se acepta, se puede utilizar como una nueva estimación a priori, y, de esta forma, en lugar de cambiar nuestro conocimiento a priori a través del teorema de Bayes, podríamos cambiarlo a través de la contrastación de hipótesis, en la que incluimos nuestra estimación a priori, $\tilde{F}_0(t)$, una confiabilidad, M, y la información muestral, $F_n(t)$.

(2) En lugar de rechazar $H_0$ cuando $V_n > V_{n,\alpha}$, una manera diferente de proceder sería rechazar $H_0$ cuando $V_n > D_{n,\alpha}$. De esta forma se consigue hacer un mejor uso de la información a priori.

(3) Obviamente se pueden construir tests de bondad del ajuste unilaterales, que detectarían diferencias direccionales, utilizando los estadísticos siguientes

$$V_n^+ = \frac{n}{M+n} D_n^+ + \frac{M}{M+n} A = \frac{n}{M+n} \sup_t (F_n(t) - F(t)) + \frac{M}{M+n} \sup_t (F_0(t) - F(t))$$

y

$$V_n^- = \frac{n}{M+n} D_n^- + \frac{M}{M+n} B = \frac{n}{M+n} \sup_t (F(t) - F_n(t)) + \frac{M}{M+n} \sup_t (F(t) - F_0(t))$$

Para el contraste de hipótesis unilateral

$$H_0\colon F(t) \equiv F_1(t), \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

$$H_{1,+}\colon F(t) \geq F_1(t), \text{ en algún } t \in \mathbb{R}$$

la región de rechazo es $V_n^+ > V_{n,\alpha}^+$, donde

$$V_{n,\alpha}^+ = \frac{n}{M+n} D_{n,\alpha}^+ + \frac{M}{M+n} A,$$

y cuando el contraste unilateral tenga como alternativa

$$H_{1,-}\colon F(t) \leq F_1(t), \text{ en algún } t \in \mathbb{R}$$

se rechazará $H_0$ cuando $V_n^- > V_{n,\alpha}^-$ , donde

$$V_{n,\alpha}^- = \frac{n}{M+n} D_{n,\alpha}^- + \frac{M}{M+n} B;$$

siendo $D_{n,\alpha}^-$ y $D_{n,\alpha}^+$ los puntos críticos habituales en el test unilateral de bondad del ajuste de Komogorov-Smirnov.

(4) Cuando $n > 30$ los valores $V_{n,\alpha}$, $V_{n,\alpha}^-$ y $V_{n,\alpha}^+$ se pueden determinar de la distribución asintótica.

(5) Debido a las propiedades teóricas sobre la necesaria continuidad de F(t), que no se suponen aquí, ya que se supone una a

priori de Dirichlet, los tests que se han expuesto son, ciertamente, conservadores.

(6) Los tests que se acaban de describir se pueden extender fácilmente para contrastar funciones de fiabilidad, en lugar de funciones de distribución, ya que obviamente entre ambas funciones se verifica que $F(t) = 1 - R(t)$.

# CAPITULO 2

# MODELOS ALT-BN CON FUNCIONES DE ACELERACION GENERALES

El tratamiento de los modelos ALT con funciones de aceleración generales se ha desarrollado, en el caso paramétrico, en Viertl (1980, 1983). El contexto no paramétrico se ha analizado en Barlow and Scheuer (1971), donde se supone un orden estocástico, y en Steck, Zimmer and Williams (1974), donde se supone una relación funcional entre las funciones de distribución en el stress usual y en un stress cualquiera. Estos métodos no paramétricos presentaban el inconveniente de que era necesario disponer, al menos, de un pequeño conjunto de observaciones muestrales en el nivel de stress usual, y, en el caso del método de la relación funcional de Steck, Zimmer and Williams (1974), se exigía que se superponieran las observaciones aceleradas y las no aceleradas (i.e., algunas observaciones aceleradas tienen que ser mayores que algunas observaciones no aceleradas), con lo cual, en la práctica, el nivel de stress acelerado no podía ser mucho más grande que el stress usual.

Shaked, Zimmer and Ball (1979) propusieron un modelo no paramétrico de aceleración, en el que se supone que existe una relación funcional entre las correspondientes funciones de distribución, en dos niveles de stress diferentes cualesquiera.

No obstante, se puede observar que hasta el momento no se ha presentado un desarrollo de los modelos ALT en el caso bayesiano no paramétrico. Éste es precisamente el objetivo que se persigue en este capítulo, resultando, por tanto, un capítulo completamente novedoso.

En primer lugar, se analiza el concepto de función de aceleración y los tipos de funciones de aceleración más utilizados. A continuación se presenta una axiomática de los modelos ALT-BN bajo procesos de Dirichlet, que generaliza la axiomática presentada en Schäbe and Viertl (1991), y se establece el Teorema 2.10, completamente original, en el que se obtiene la función de distribución en un stres cualquiera V, a partir de la axiomática anterior.

Por último, se analizan una serie de modelos ALT y se obtiene, en dichos modelos, el estimador de la función de distribución bajo el nivel de stress usual $V_0$.

## 2.1. LAS FUNCIONES DE ACELERACION EN LOS MODELOS ALT

Sea $\mathcal{V}$ un conjunto en un espacio euclideano de dimensión finita, de manera que cada $V \in \mathcal{V}$ corresponde a un único nivel de stress bajo el cual puede funcionar un sistema. Normalmente $\mathcal{V}$ es un conjunto de números reales, pero $V \in \mathcal{V}$ puede ser un vector, cuando el entorno de funcionamiento del sistema venga descrito por más de una variable. Ya que la correspondencia entre los puntos de $\mathcal{V}$ y los niveles de stress se supone que es biyectiva, V denotará o bien un punto de $\mathcal{V}$, o el correspondiente nivel de stress. Sea $V_0 \in \mathcal{V}$ el stress normal y $V_1, \ldots, V_k$ los stress acelerados (más grandes que $V_0$) bajo los cuales se realizan k ensayos de vida. Se supone que k y $V_1, \ldots, V_k$ se determinan antes de que el ensayo de vida comience, y se mantienen constantes a lo largo de todo el experimento. Por tanto, sin pérdida de generalidad, se supone que $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$.

Se supone que existe una función conocida m tal que, para cada $V_i \in \mathcal{V}$ y $V_j \in \mathcal{V}$, se verifica que

$$F_{V_j}(t) = F_{V_i}\Big(m(\lambda, V_j, V_i, t)\Big), \qquad t \geq 0 \tag{2.1}$$

donde $F_V$ designa la función de distribución de un sistema sujeto al nivel de stress V y $\lambda$ es un parámetro desconocido ($\lambda$ puede ser un vector), que pertenece a un conjunto $\Lambda$. Esta función m resulta ser una transformación del tiempo, que en la literatura se conoce con el nombre de *función de aceleración*.

Estimar la función de aceleración m es un problema de gran dificultad y, por ello, todos los trabajos que se han desarrollado hasta ahora suponen un determinado modelo de función m. Básicamente se han considerado dos tipos que pasamos a describir a continuación.

### 2.1.1. FUNCIONES DE ACELERACION LINEALES

**Definición 2.1**

Se dice que una función de aceleración es lineal cuando es lineal en t, i.e.,

$$m(\lambda, V_j, V_i, t) = \tilde{g}(\lambda, V_j, V_i)t \tag{2.2}$$

donde $\tilde{g}$ es una función conocida.

Este tipo de funciones responden a la hipótesis de que un cambio de stress no cambia la forma de la función de distribución del sistema, sólo cambia su escala. Esta consideración ha primado en la mayoría de los modelos paramétricos estudiados y, como se verá más adelante, engloba a los modelos más utilizados que son el de la regla de la potencia, el de la regla de Arrhenius, el de Eyring, el de Levenbach, etc.

**Proposición 2.1**

*El modelo de ALT con función de aceleración [2.2] es equivalente al que tiene por función de aceleración*

$$m(\lambda, V_j, V_i, t) = \frac{g(\lambda, V_j)}{g(\lambda, V_i)}\, t \qquad [2.3]$$

Demostración.

Sean $V_i$, $V_j \in \mathcal{V}$ y $\lambda \in \Lambda$, entonces si $\tilde{g}(\lambda, V_j, V_i) = \dfrac{g(\lambda, V_j)}{g(\lambda, V_i)}$, se verifica que

$$\tilde{g}(\lambda, V_j, V_i) = [\tilde{g}(\lambda, V_i, V_j)]^{-1}$$

Si se define para un $\tilde{V} \in \mathcal{V}$ fijo, $g(\lambda, V) = \tilde{g}(\lambda, V, \tilde{V})$, $V \in \mathcal{V}$, $\lambda \in \Lambda$, resulta que la función [2.3] es equivalente a [2.2], ya que multiplicar g por una constante no cambia la naturaleza de [2.3]. ∎

### 2.1.2. FUNCIONES DE ACELERACION TIPO POTENCIA

**Definición 2.2**

Se dice que una función de aceleración m es tipo potencia cuando es una potencia de t, i.e.

$$m(\lambda,V_j,V_i,t) = t^{\tilde{g}(\lambda,V_j,V_i)} \qquad [2.4]$$

donde $\tilde{g}$ es alguna función conocida.

Este tipo de funciones responden a la hipótesis de que un cambio de stress cambia la forma de la función de distribución del sistema. Este tipo de funciones se han hecho necesarias cuando se supone que se está con distribuciones Weibull y el parámetro de forma es dependiente del nivel de stress, como se reflejó en los datos analizados en Barlow, Toland and Freeman (1979).

Al igual que en el caso de función de aceleración lineal, sin pérdida de generalidad, se puede sustituir [2.4] por

$$m(\lambda,V_j,V_i,t) = t^{g(\lambda,V_j)/g(\lambda,V_i)} \qquad [2.5]$$

De hecho, siempre que la transformación de tiempo sea de la forma

$$m(\lambda,V_j,V_i,t) = a\left[\tilde{g}(\lambda,V_j,V_i)\cdot b(t)\right],$$

donde a y b son cualquier par de funciones razonables, m se puede tomar, sin pérdida de generalidad, como

$$m(\lambda,V_j,V_i,t) = a\left[\frac{g(\lambda,V_j)}{g(\lambda,V_i)}\cdot b(t)\right].$$

Parece natural que en una aplicación concreta se tengan en cuenta algunas restricciones lógicas, a la hora de elegir una función g, en los dos casos analizados anteriormente.

En concreto, si $V_j > V_i$ y un V más grande corresponde a un stress mayor, entonces es razonable esperar que

$$F_{V_j}(t) > F_{V_i}(t), \quad t \geq 0 \qquad [2.6]$$

Bajo esta condición, la función g tiene que satisfacer la restricción obvia siguiente:

$$g(\lambda,V) \text{ es no decreciente en } V \in \mathcal{V},\ \forall\ \lambda \in \Lambda. \qquad [2.7]$$

También, ya que $g(\lambda,V_j)/g(\lambda,V_i) > 0$ para cualquier $V_i,V_j \in \mathcal{V}$ y $\lambda \in \Lambda$, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$g(\lambda,V) > 0, \quad V \in \mathcal{V},\ \lambda \in \Lambda.$$

Una generalización de la función de aceleración de tipo potencia que ha merecido atención especial en la literatura, Viertl (1983), es la función de aceleración siguiente

$$m(\lambda,V_j,V_i,t) = \tilde{g}(\lambda,V_j,V_i)\ t^{\tilde{h}(\lambda,V_j,V_i)} \qquad [2.8]$$

donde $\tilde{g}$ y $\tilde{h}$ son funciones conocidas.

Este tipo de función combina el aspecto lineal con el potencial, y responde a situaciones en las que un cambio en el nivel de stress puede llevar aparejado diferentes parámetros de escala y forma, en las funciones de distribución del sistema.

De la misma manera que en los dos casos anteriores, sin pérdida de generalidad, se puede sustituir [2.8] por

$$m(\lambda,V_j,V_i,t) = \frac{g(\lambda,V_j)}{g(\lambda,V_i)}\ t^{h(\lambda,V_j)/h(\lambda,V_i)} \qquad [2.9]$$

Además, las consideraciones anteriores para la función g se aplican de la misma forma a la función h.

## 2.2. AXIOMATICA DE LOS MODELOS ALT-BN CON FUNCIONES DE ACELERACION GENERALES

Los siguientes axiomas son básicos en el desarrollo posterior de la teoría de estos ensayos de vida.

(A1) Sea el tiempo de funcionamiento bajo el stress $V_i$, designado por $T_{V_i}$, una v.a. definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega_{V_i}, \mathcal{F}_{V_i}, \mathbb{P}_{V_i})$. El stress $V_i$ es un elemento del espacio de los niveles de stress que será designado por $\mathcal{V}$.

**Observación.-** El espacio $\mathcal{V}$ puede ser un espacio de números reales, vectores, matrices, funciones u otros objetos matemáticos y se deberá especificar en cada aplicación.

(A2) Existe una transformación medible, biyectiva y monótona

$$a_{i,j}: (\Omega_{V_i}, \mathcal{F}_{V_i}, \mathbb{P}_{V_i}) \longrightarrow (\Omega_{V_j}, \mathcal{F}_{V_j}, \mathbb{P}_{V_j})$$

donde

$$T_{V_j} = a_{i,j}(T_{V_i}), \quad \forall\, V_i, V_j \in \mathcal{V} \qquad [2.10]$$

**Observación.-** Esta ecuación define una aplicación entre espacios de probabilidad para varios niveles de stress. Además, [2.10] relaciona el tiempo de funcionamiento de los mismos items bajo niveles de stress diferentes.

**PROPIEDADES**

**P2.2 (CONVOLUCION)**

$$a_{i,\ell} = a_{j,\ell}(a_{i,j}), \quad \forall\, V_i,\ V_j,\ V_\ell \in \mathcal{V} \qquad [2.11]$$

Demostración.

Sean $V_i$, $V_j$, $V_\ell \in \mathcal{V}$, se verifica que

$$a_{i,j}(T_{V_i}) = T_{V_j} \quad \text{y} \quad a_{j,\ell}(T_{V_j}) = T_{V_\ell}$$

y no se puede dar que

$$a_{i,\ell}(T_{V_i}) = T^{*}_{V_\ell},$$

ya que la transformación $a_{g,h}$ es una transformación biyectiva $\forall\ V_g,\ V_h \in \mathcal{V}$. Por tanto, se tiene que

$$a_{j,\ell}(a_{i,j}(T_{V_i})) = a_{i,\ell}(T_{V_i}) = T_{V_\ell}. \ \blacksquare$$

**P2.3 (TRANSFORMACION INVERSA)**

*La transformación inversa de la $a_{i,j}$ viene dada por*

$$a^{-1}_{i,j} = a_{j,i}$$

Demostración.

Evidente al ser $a_{i,j}$ una aplicación biyectiva. $\blacksquare$

**P2.4 (SIMPLIFICACION)**

*El modelo de ensayos de vida acelerados se puede caracterizar por la transformación $a_{o,i}$ y una función de distribución*

$$F_0(t) = \mathbb{P}_{V_0}\left(T_{V_0} \le t\right).$$

Demostración.

Seleccionemos un stress $V_0 \in \mathcal{V}$, que puede ser el stress usual, o cualquier otro elemento fijo de $\mathcal{V}$. Entonces se definen las transformaciones:

$$a_i \equiv a_{0,i} \quad \text{y} \quad a^{-1}_i \equiv a^{-1}_{0,i}$$

En consecuencia, se verifica que

$$T_{V_i} = a_{0,i}(T_{V_0}) = a_i(T_{V_0}).$$

Puesto que $a_{g,h}$ es una transformación biyectiva $\forall\ V_g,\ V_h \in \mathcal{V}$, $\forall\ V_i$ se puede obtener $T_{V_i}$ y su función de distribución sii se conocen $F_0(t)$ y $a_i$. $\blacksquare$

NOTA.- Se empleará la notación $a_V(t)$ para designar a la transformación $a_{V_0,V}$ que relaciona el tiempo de funcionamiento de un item en el stress $V_0$ (habitualmente el usual) y en un stress genérico V. Cuando este stress genérico V sea notado por $V_i$, dicha transformación se notará por $a_i(t)$.

**P2.5 (ESTANDARIZACION)**

*Variando la escala y el origen de las unidades de la v.a.* $T_{V_0}$ *se puede conseguir*

$$a_i(0) = 0.$$

Los axiomas A1 y A2 se pueden completar con hipótesis adicionales. Éstas se utilizan para asegurar que la teoría será capaz de describir los efectos de la aceleración en los ensayos de vida.

(A3) Relación de orden parcial.

Supongamos que existe una relación de orden parcial notada por $<$ sobre el espacio $\mathcal{V}$ / $\forall\ V_1, V_2, V_3 \in \mathcal{V}$ se verifique:

i) $V_1 < V_2$ y $V_2 < V_3 \Rightarrow V_1 < V_3$

ii) $V_1 < V_1$

iii) $V_1 < V_2$ y $V_2 < V_1 \Rightarrow V_1 = V_2$.

Por tanto, $\mathcal{V}$ es un conjunto parcialmente ordenado.

(A4) Aceleración.

Si $V_1 < V_2$ entonces $T_{V_1} \overset{st}{>} T_{V_2}$, i.e.

$$\mathbb{P}\left(T_{V_1} \leq t\right) \leq \mathbb{P}\left(T_{V_2} \leq t\right),\ \forall\ t \geq 0.$$

Este axioma asegura que, dentro de nuestra teoría, un stress mayor conducirá a tiempos de vida estocásticamente más pequeños.

(A5) Continuidad con respecto al tiempo.

Supongamos que $a_i(t)$ es una función continua y diferenciable de t $\forall\ V_i \in \mathcal{V}$, con derivada $\dfrac{da_i(t)}{dt}$.

Esta condición es razonable ya que asegura que una distribución del tiempo de funcionamiento no atómica sobre un nivel de stress, se transforma en una distribución sobre otro nivel de stress que también está libre de átomos. Un átomo, en una distribución del tiempo de funcionamiento que ocurra sólo para algunos niveles de stress, significaría que el mecanismo de fallo del item bajo estudio había cambiado. En estos casos no se aplicaría la teoría de los ensayos de vida acelerados.

(A6) Continuidad con respecto al stress.

Sea $\mathcal{V}$ metrizable, i.e. $\exists$ una métrica

$$\rho(V_i,V_j):\ \mathcal{V}\times\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Supongamos que la función $a_i(t)$ es continua y diferenciable para t arbitrario pero fijo. Por tanto, se verifica que

$$\frac{a_1(t) - a_2(t)}{\rho(V_1,V_2)}$$

tiene límite cuando $\rho(V_1,V) \to 0$ y $\rho(V_2,V) \to 0$ (con lo cual $\rho(V_1,V_2) \longrightarrow 0$); dicho límite se notará por

$$\frac{\partial a_V(t)}{\partial V}.$$

Según este axioma, pequeños cambios en el stress proporcionarán sólo cambios moderados en el tiempo de funcionamiento.

Esta hipótesis se mantendrá en muchas aplicaciones prácticas, ya que el mecanismo de fallo será el mismo para todos los niveles de stress.

(A7) Distribución en el stress usual.

La distribución de la v.a. $T_{V_0}$, $F_{V_0}$, es la inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha$, siendo $\alpha$ una medida finita, no nula y no atómica sobre $(\mathbb{R}^+,\mathcal{B}^+)$.

Los Axiomas (A1)-(A7) se utilizarán a continuación para probar algunas propiedades de la función $a_V$. Obsérvese que ese conjunto de axiomas tan generales sólo pretende garantizar que la teoría es realmente capaz de describir fenómenos de ensayos de vida acelerados. Todavía no se ha especificado el stress V en sí mismo y se puede describir por objetos matemáticos bastante arbitrarios.

**Corolario 2.6**

*Bajo los axiomas anteriores,* $\forall t$ $a_V(t)$ *es una función no creciente de* $V$*, i.e., si* $V_1 < V_2$ *, entonces*

$$a_{V_1}(t) \geq a_{V_2}(t),\ \forall\ t \geq 0.$$

Demostración.

De la hipótesis $V_1 < V_2$ se sigue que

$$\mathbb{P}\left(T_{V_1} \leq t\right) \leq \mathbb{P}\left(T_{V_2} \leq t\right),\ \forall\ t \geq 0.$$

Al ser $a_V$ una aplicación biyectiva se puede escribir

$$\mathbb{P}\left(a_{V_1}(T_{V_0}) \leq t\right) \leq \mathbb{P}\left(a_{V_2}(T_{V_0}) \leq t\right).$$

Supongamos que $a_V$ es monótona no decreciente en t, $\forall$ V $\in \mathcal{V}$, con lo cual resulta que

$$\mathbb{P}\left(T_{V_0} \le a_{V_1}^{-1}(t)\right) \le \mathbb{P}\left(T_{V_0} \le a_{V_2}^{-1}(t)\right)$$

y, en consecuencia,

$$a_{V_1}^{-1}(t) \le a_{V_2}^{-1}(t), \quad \forall\ t \ge 0.$$

Ahora aplicamos esta desigualdad al caso particular de tomar como valor de t, $a_{V_1}(t)$, y se tiene

$$a_{V_1}^{-1}(a_{V_1}(t)) \le a_{V_2}^{-1}(a_{V_1}(t)) \Longleftrightarrow t \le a_{V_2}^{-1}(a_{V_1}(t)).$$

Si se aplica $a_{V_2}$ a esta última desigualdad, resulta

$$a_{V_2}(t) \le a_{V_2}(a_{V_2}^{-1}(a_{V_1}(t))) \Longleftrightarrow a_{V_2}(t) \le a_{V_1}(t).$$

Supongamos, ahora, que $a_V$ es monótona no creciente en t, $\forall\ V \in \mathcal{V}$. Por tanto, de

$$\mathbb{P}\left(a_{V_1}(T_{V_0}) \le t\right) \le \mathbb{P}\left(a_{V_2}(T_{V_0}) \le t\right)$$

se deduce

$$\mathbb{P}\left(a_{V_1}^{-1}(a_{V_1}(T_{V_0})) \ge a_{V_1}^{-1}(t)\right) \le \mathbb{P}\left(a_{V_2}^{-1}(a_{V_2}(T_{V_0})) \ge a_{V_2}^{-1}(t)\right)$$

o, equivalentemente, se verifica que

$$\mathbb{P}\left(T_{V_0} \ge a_{V_1}^{-1}(t)\right) \le \mathbb{P}\left(T_{V_0} \ge a_{V_2}^{-1}(t)\right)$$

y, en consecuencia,

$$a_{V_1}^{-1}(t) \ge a_{V_2}^{-1}(t), \quad \forall\ t \ge 0.$$

Ahora aplicamos esta desigualdad al caso particular de tomar como valor de t, $a_{V_1}(t)$, y se tiene

$$a_{V_1}^{-1}(a_{V_1}(t)) \ge a_{V_2}^{-1}(a_{V_1}(t)) \Longleftrightarrow t \ge a_{V_2}^{-1}(a_{V_1}(t)).$$

Si se aplica $a_{V_2}$ a esta última desigualdad, resulta

$$a_{V_2}(t) \le a_{V_2}(a_{V_2}^{-1}(a_{V_1}(t))) \Longleftrightarrow a_{V_2}(t) \le a_{V_1}(t). \quad \blacksquare$$

**Corolario 2.7**

*Bajo los axiomas (A1)-(A7) se verifica que*

$$\frac{\partial a_V(t)}{\partial V} \le 0, \quad \forall\ t \ge 0.$$

Demostración.

Si existe

$$\frac{\partial a_V(t)}{\partial V} = \lim_{\substack{\rho(V_1,V)\to 0 \\ \rho(V_2,V)\to 0}} \frac{a_{V_1}(t) - a_{V_2}(t)}{\rho(V_1,V_2)}$$

este valor no depende del método de cálculo seguido. Ahora supongamos que $V_1 \longrightarrow V$ y $V_2 \longrightarrow V$ en el espacio $\mathcal{V}$ con la métrica $\rho$, de tal forma que siempre sea $V_1 < V_2$.

Entonces, debido al Corolario 2.6, se tiene que

$$\frac{a_{V_1}(t) - a_{V_2}(t)}{\rho(V_1,V_2)} \le 0 \Rightarrow \frac{\partial a_V(t)}{\partial V} \le 0. \quad \blacksquare$$

**Lema 2.8**

*Existe una función $\gamma_V(t)$ tal que se verifica*

$$T_V = \int_0^{T_{V_0}} \gamma_V(t)\, dt$$

*a $\omega$ fijo.*

Demostración.

Al ser $a_V(t)$ una función diferenciable con respecto a t, esta función se puede expresar por medio de una función $\gamma$ /

$$a_V(t) = \int_{s_0}^{t} \gamma_V(s)\, ds$$

con $s_0$ elegido adecuadamente.

Pero la unidad de tiempo se puede elegir para que $a_V(0) = 0$ (Propiedad P2.5) y, en consecuencia, $s_0 = 0$. Por tanto, se tiene que

$$a_V(T_{V_0}) = \int_0^{T_{V_0}} \gamma_V(s)\, ds$$

y, como $T_V = a_V(T_{V_0})$, queda probado el lema. ∎

**Lema 2.9**

*Existe una función $\beta_V(t)$ tal que se verifica*

$$T_{V_0} = \int_0^{T_V} \beta_V(t)\, dt$$

*a $\omega$ fijo.*

Demostración.

Como $a_V(t)$ es diferenciable respecto a t, también lo es $a_V^{-1}(t)$ respecto a t, y siguiendo el argumento de la demostración del lema anterior, esta función se puede expresar por medio de una función $\beta$ /

$$a_V^{-1}(t) = \int_{r_0}^{t} \beta_V(s)\, ds$$

con $r_0$ elegido adecuadamente. Pero la unidad de tiempo se puede elegir para que $a_V^{-1}(0) = 0$ (Propiedad P2.5) y, en consecuencia, $r_0 = 0$. Por tanto, se verifica que

$$a_V^{-1}(T_V) = \int_0^{T_V} \beta_V(t)dt$$

y, como $T_{V_0} = a_V^{-1}(T_V)$, queda probado el lema. ∎

De las dos demostraciones anteriores se sigue que

$$\frac{\partial a_V(t)}{\partial t} = \gamma_V(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial a_V^{-1}(t)}{\partial t} = \beta_V(t)$$

Aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\partial(a_V \circ a_V^{-1})(t)}{\partial t} = \left.\frac{\partial a_V(t)}{\partial t}\right|_{t=a_V^{-1}(t)} \cdot \frac{\partial a_V^{-1}(t)}{\partial t}$$

El miembro izquierdo de esta igualdad es 1 y el derecho es

$$\gamma_V(a_V^{-1}(t)) \cdot \beta_V(t).$$

Por tanto, la relación entre las funciones $\gamma_V$ y $\beta_V$ es

$$\beta_V(t) = \frac{1}{\gamma_V(a_V^{-1}(t))} .$$

## 2.3. FUNCION DE DISTRIBUCION EN UN STRESS CUALQUIERA BAJO LA AXIOMATICA DE LOS MODELOS ALT-BN CON FUNCIONES DE ACELERACION GENERALES

El siguiente teorema establece que la función de distribución en un stress cualquiera, V, bajo la axiomática del epígrafe anterior, viene inducida por un proceso de Dirichlet con parámetro $\alpha_V$ que se define en el enunciado.

**Teorema 2.10 (Maté)**

*Si $\beta_V\ (t) \geq 0\ \forall\ V \in \mathcal{V}$, y $F_{V_0} \in \mathcal{D}(\alpha)$, entonces $F_V \in \mathcal{D}(\alpha_V)$*

*con*

$$\alpha_V\ (u) = \alpha\left(\int_0^u \beta_V(s)\ ds\right),\ \forall\ V \in \mathcal{V}.$$

Demostración.

Sabemos, por el Lema 2.9, que, a $\omega \in \Omega$ fijo, se tiene

$$T_{V_0} = \int_0^{T_V} \beta_V(s)\, ds$$

y, por tanto,

$$F_{V_0}(t) = \mathbb{P}\left(T_{V_0} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\int_0^{T_V} \beta_V(s)\, ds \leq t\right).$$

Ahora se puede expresar t en la forma

$$t = \int_0^u \beta_V(s)\, ds,$$

con lo cual tenemos

$$\mathbb{P}\left(\int_0^{T_V} \beta_V(s)\, ds \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\int_0^{T_V} \beta_V(s)\, ds \leq \int_0^u \beta_V(s)\, ds\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(T_V \leq u\right) = F_V(u).$$

Por tanto,

$$F_V(u) = F_{V_0}(t) = F_{V_0}\left(\int_0^u \beta_V(s)\, ds\right).$$

Por hipótesis $F_{V_0} \in \mathcal{D}(\alpha)$ y $F_{V_0}$ es un proceso neutral a la derecha que admite la representación

$$F_{V_0}(t) = 1 - e^{-Y_{V_0}(t)}$$

con $\left\{Y_{V_0}(t)\right\}_{t\, \in\, [0,\infty)}$ un proceso de incrementos independientes que satisface las cuatro propiedades de la definición y cuyo logaritmo de la función generatriz de momentos es

$$\log E\left[e^{-\theta\, Y_{V_0}(t)}\right] = \int_0^\infty \left[e^{-\theta z} - 1\right] dN_t(z)$$

en donde la medida de Lévy asociada está dada por

$$dN_t(z) = \frac{e^{-\alpha(\mathbb{R})\, z}\left[e^{\alpha(t) z} - 1\right]}{z\left[1 - e^{-z}\right]}\, dz$$

con $\alpha$ el parámetro del proceso de Dirichlet.

Por tanto, se tiene que

$$F_V(u) = F_{V_0}\left[\int_0^u \beta_V(s)\,ds\right] = 1 - e^{-Y_{V_0}\left[\int_0^u \beta_V(s)\,ds\right]} =$$
$$= 1 - e^{-Y_V(u)},$$

donde

$$Y_V(u) = Y_{V_o}\left[\int_0^u \beta_V(s)\,ds\right]$$

es un proceso que satisface las siguientes propiedades:

i) Es de incrementos independientes, ya que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\forall\, u_1 < \ldots . < u_n$, con $u_1, \ldots ., u_n \in [0,+\infty)$, se verifica que

$$Y_V(u_1),\ Y_V(u_2) - Y_V(u_1),\ \ldots,\ Y_V(u_n) - Y_V(u_{n-1})$$

son variables independientes, puesto que por hipótesis

$$Y_{V_0}(t_1),\ Y_{V_0}(t_2) - Y_{V_0}(t_1),\ \ldots,\ Y_{V_0}(t_n) - Y_{V_0}(t_{n-1})$$

son independientes, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, donde

$$t_i = \int_0^{u_i} \beta_V(s)\,ds \quad \text{y} \quad t_i \in [o,\infty), \quad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

ii) Es continuo por la derecha, ya que

$$Y_V(u^+) = Y_V(u) \quad \text{c.s.} \quad \forall\, u \in [0,+\infty)$$

por ser

$$Y_{V_0}(t^+) = Y_{V_0}(t) \quad \text{c.s} \quad \forall\, t \in [0,+\infty)$$

donde

$$t = \int_0^u \beta_V(s)\,ds.$$

iii) $\lim\limits_{u\to 0} Y_V(u) = \lim\limits_{u\to 0} Y_{V_o}\left[\int_0^u \beta_V(s)\,ds\right] = \lim\limits_{t\to 0} Y_{V_o}(t) = 0.$

iv) $\lim\limits_{u\to\infty} Y_V(u) = \lim\limits_{u\to\infty} Y_{V_0}\left[\int_0^u \beta_V(s)\,ds\right] = \lim\limits_{t\to\infty} Y_{V_0}(t) = +\infty.$

Por tanto, $F_V$ es un proceso neutral a la derecha al igual que $F_{V_0}$, en el que se tiene

$$\log E\left[e^{-\theta\, Y_V(u)}\right] = \int_0^{\infty}\left[e^{-\theta z} - 1\right] dN_{u,V}(z)$$

con

$$d\,N_{u,V}(z) = d\,N_{\int_0^u \beta_V(s)\,ds}(z) =$$

$$= \frac{e^{-\alpha\left(\int_0^{\infty}\beta_V(s)\,ds\right)}\left(e^{\alpha\left(\int_0^{u}\beta_V(s)\,ds\right) z} - 1\right)}{z\left(1 - e^{-z}\right)}$$

De esta forma, se ha obtenido la representación de Lévy del proceso $Y_V(u)$ como proceso de Dirichlet, y de dicha representación se deduce que

$$\alpha_V : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longrightarrow \alpha_V(u) = \alpha\left(\int_0^u \beta_V(s)\,ds\right)$$

es una medida finita no nula sobre $(\mathbb{R}^+,\mathcal{B}^+)$, ya que lo es $\alpha$, y $\alpha_V(\mathbb{R}^+) = \alpha(\mathbb{R}^+)$.

Luego, $F_V(u)$ es una función de distribución aleatoria cuya distribución viene inducida por un proceso Dirichlet de parámetro $\alpha_V$ y

$$\alpha_V(u) = \alpha\left(\int_0^u \beta_V(s)\,ds\right). \blacksquare$$

**Lema 2.11**

*Bajo los axiomas (A1) - (A7) se verifica que*

$$\frac{\partial\, \gamma_V\,(t)}{\partial\, V} \le 0.$$

Demostración.

Se tiene que

$$\frac{\partial\ a_V\ (t)}{\partial\ V} = \int_0^t \frac{\partial\ \gamma_V(s)}{\partial V}\ ds\ \le 0$$

para $t$ arbitrario pero fijo. Esta desigualdad es válida $\forall\ t \ge 0$ si y sólo si la afirmación del enunciado se verifica. ■

**Lema 2.12**

*Bajo los axiomas (A1) - (A 7) se verifica que*

$$\frac{\partial\ \beta_V\ (t)}{\partial\ V} \ge 0.$$

Demostración.

Expresando $\beta_V(\cdot)$ en función de $\gamma_V(\cdot)$, tenemos

$$\frac{\partial\ \beta_V(t)}{\partial\ V} = \frac{\partial}{\partial\ V}\left[\frac{1}{\gamma_V\left(a_V^{-1}(t)\right)}\right] = -\frac{\frac{\partial\gamma_V}{\partial\ V}\left(a_V^{-1}(t)\right)}{\left[\gamma_V\left(a_V^{-1}(t)\right)\right]^2}$$

y, por el lema 2.11, el numerador de la última expresión es $\le 0$, con lo cual dicha expresión es $\ge 0$, y queda probado este lema. ■

## 2.4. MODELOS BAJO LA AXIOMATICA ALT-BN CON FUNCIONES DE ACELERACION GENERALES

En esta sección presentaremos modelos concretos de ensayos de vida acelerados. Estos modelos vienen definidos por la función de distribución $F_{V_0}(\cdot)$ de $T_{V_0}$ y por la función de transformación $a_V(\cdot)$. Esta última puede venir dada utilizando $\gamma_V(\cdot)$ o, equivalentemente, $\beta_V(\cdot)$.

Por tanto, nos centraremos sobre la ecuación

$$T_{V_0} = \int_0^{T_V} \beta_V(t)\, dt \qquad [2.12]$$

y presentaremos varias variantes para la función $\beta$ dejando que $F_V$ sea un proceso de Dirichlet arbitrario.

### 2.4.1. TEORIA SIN EFECTOS POSTERIORES

Supongamos que la función $\beta_V(\cdot)$ no depende explícitamente del tiempo y que el stress V es independiente del tiempo. Con lo cual

$$\beta_V(t) = \beta_V$$

e integrando la ecuación [2.12] tendremos

$$T_{V_0} = \beta_V \; T_V.$$

Por tanto, $T_V$ tiene una función de distribución que viene dada por

$$F_{V_0}\left(\beta_V \; t\right).$$

Poniendo $g(V) = \dfrac{1}{\beta_V}$ vemos que se trata del modelo de transformación de escala que estudiamos con detalle en el capítulo 1, donde $\beta_{V_i} = \dfrac{1}{\theta_i}$ .

Por tanto, la hipótesis de ausencia de efectos posteriores, expresada matemáticamente por la ausencia de dependencia explícita del tiempo en $\beta_V(\cdot)$, conduce al modelo de transformación de escala. A su vez, utilizando un modelo de transformación de escala, suponemos implícitamente que no hay efectos posteriores.

### 2.4.2. FACTORIZACION DE $\beta_V(t)$

Suponemos que el stress V no depende del tiempo y que $\beta_V(\cdot)$ se puede expresar de la forma

$$\beta_V(t) = \beta_1(V)\cdot\beta_2(t),$$

lo que significa que la dependencia de V y de t se puede factorizar.

Entonces es claro que

$$T_{V_0} = \beta_1(V)\cdot B_2(T_V)$$

donde

$$B_2(T_V) = \int_0^{T_V} \beta_2(t)\ dt.$$

Puesto que

$$\beta_V(t) \geq 0, \quad \forall\ t \geq 0 \quad y \quad \forall\ V \in \mathcal{V},$$

$\beta_1(\cdot)$ y $\beta_2(\cdot)$ tendrán el mismo signo. En consecuencia, $\beta_2(\cdot)$ es una función no negativa o no positiva, con lo cual $B_2(\cdot)$ es una función monótona. Por tanto, la distribución del tiempo de funcionamiento bajo el stress V es

$$F_{V_0}\left(\beta_1(V)\cdot B_2(t)\right) \qquad [2.13]$$

La expresión [2.13] describe un modelo en el que el proceso de Dirichlet no sólo se ve afectado por una transformación de escala, también se produce un cambio en la forma del proceso.

### 2.4.3. REPRESENTACION DE $\beta_V(t)$ COMO UNA SUMA

Supongamos, de nuevo, que V es independiente del tiempo y que $\beta_V(t)$ se puede expresar como una suma de dos términos de la forma siguiente:

$$\beta_V(t) = \beta_1(V) + \beta_2(t),$$

entonces

$$T_{V_0} = \beta_1(V)\ T_V + B_2(T_V).$$

Ya que

$$\beta_V(t) \geq 0,\ \forall\ t \geq 0\ \text{ y }\ \forall\ V \in \mathcal{V},\ \text{y}\ a_V(0) = 0,$$

las dos funciones $\beta_1(\cdot)$ y $\beta_2(\cdot)$ tienen que ser no negativas. Por tanto, la distribución de $T_V$ viene dada por

$$F_{V_0}\left(\beta_1(V)t + B_2(t)\right)$$

donde

$$B_2(t) = \int_0^t \beta_2(s)\ ds.$$

### 2.4.4. EXPRESION DE $\beta_V(t)$ COMO UNA POTENCIA

Supongamos que V es independiente del tiempo y que $\beta_V(t)$ se puede expresar como una potencia generalizada de t de la forma siguiente:

$$\beta_V(t) = \beta_1(V)\ t^{\beta_2(V)}.$$

Puesto que $a_V(0) = 0$, concluimos que

$$\beta_2(V) \geq 0,\quad \forall\ V \in \mathcal{V},$$

y el hecho de ser

$$\beta_V(t) \geq 0,\quad \forall\ t \geq 0\ \text{ y }\ \forall\ V \in \mathcal{V},$$

nos proporciona

$$\beta_1(V) \geq 0,\quad \forall\ V \in \mathcal{V}.$$

Ahora procedemos a integrar la expresión [2.12], en este caso, resultando que

$$T_{V_0} = \int_0^{T_V} \beta_1(V) t^{\beta_2(V)} dt = \beta_1(V) \cdot \frac{T_V^{\beta_2(V)+1}}{\beta_2(V) + 1}$$

Si definimos las funciones

$$\gamma_1(V) = \frac{\beta_1(V)}{1 + \beta_2(V)} \quad \text{y} \quad \gamma_2(V) = 1 + \beta_2(V)$$

se tiene que

$$T_{V_0} = \gamma_1(V)\, T_V^{\gamma_2(V)}$$

Estas dos funciones satisfacen lo siguiente:

$$\gamma_2(V) \geq 1 \quad \forall\, V \in \mathcal{V} \quad \text{y} \quad \gamma_1(V) \geq 0 \quad \forall\, V \in \mathcal{V}$$

Finalmente, obtenemos la distribución del proceso de Dirichlet $T_V$ como

$$F_{V_0}\left(\gamma_1(V) t^{\gamma_2(V)}\right).$$

Este modelo se ha analizado en Viertl (1983, 1988).

## 2.5. ESTIMACION EN MODELOS ALT-BN ESPECIFICOS CON FUNCION DE ACELERACION LINEAL GENERALIZADA

En este epígrafe nos proponemos extender el procedimiento desarrollado en 1.5 a los dos modelos básicos de ensayos acelerados, con función de aceleración lineal generalizada, que se encuentran en la literatura.

En primer lugar, según el axioma A2, se sabe que $\forall\, V_i,\ V_j \in \mathcal{V}$ se verifica que existe una transformación medible, biyectiva y monótona, $a_{i,j}$, tal que

$$T_{V_j} = a_{i,j}\left(T_{V_i}\right).$$

Por tanto, según la axiomática, $\forall\ V_i,\ V_j \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$F_{V_j}(t) = \mathbb{P}\left(T_{V_j} \le t\right) = \mathbb{P}\left(a_{i,j}\left(T_{V_i}\right) \le t\right) = \mathbb{P}\left(T_{V_i} \le a^{-1}_{i,j}(t)\right) =$$
$$= F_{V_i}\left(a^{-1}_{i,j}(t)\right).$$

Por otra parte, de [2.1] se deduce que la relación entre las dos formas de expresar la función de acelaración es

$$m(\lambda, V_j, V_i, t) = a^{-1}_{i,j}(t).$$

La Propiedad P2.3 nos permite expresar esa relación de la forma

$$m(\lambda, V_j, V_i, t) = a_{j,i}(t).$$

En el caso de una función de aceleración lineal generalizada se tiene, según la Definición 2.1 y la Proposición 2.1, que dicha relación es

$$a_{j,i}(t) = \frac{g(\lambda, V_j)}{g(\lambda, V_i)}\ t, \qquad [2.14]$$

donde $g(\lambda, V) > 0$, $V \in \mathcal{V}$ y $\lambda \in \Lambda$, es una función no decreciente en $V \in \mathcal{V}$, $\forall\ \lambda \in \Lambda$.

Cuando se considera la transformación $a_V(t) \equiv a_{V_0,V}(t)$, siendo $V_0$ y $V \in \mathcal{V}$, con $V_0$ el stress habitual, resulta que

$$a^{-1}_V(t) = \frac{g(\lambda, V)}{g(\lambda, V_0)}\ t. \qquad [2.15]$$

Por otra parte, según el Lema 2.9, se tiene que la relación entre el tiempo de funcionamiento bajo los niveles de stress V y $V_0$ viene dada, a $\omega$ fijo, por

$$T_{V_0} = a_V^{-1}(T_V) = \int_0^{T_V} \beta_V(t)\ dt. \qquad [2.16]$$

### 2.5.1. MODELO ALT-BN DE LA REGLA DE LA POTENCIA

El modelo de la regla de la potencia, también denominado de la regla de la potencia inversa, se ha considerado en Mann, Schafer and Singpurwalla (1974, p.425) dentro del marco paramétrico no bayesiano; donde, para niveles de stress reales, se supone que en el nivel de stress i-ésimo $V_i$, para i = 0, 1, ..., k, se verifica que las funciones de distribución de los tiempos de funcionamiento son exponenciales con medias

$$\mu_i = A \cdot V_i^{-\lambda},$$

siendo $\lambda > 0$ y $A > 0$.

De la hipótesis de distribución exponencial resulta que

$$F_{V_i}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t/\mu_i} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}, \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

con lo cual, $\forall\ V_i,\ V_j \in \mathcal{V}$, se tiene que

$$F_{V_j}(t) = F_{V_i}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j} t\right).$$

Entonces

$$m(\lambda, V_j, V_i, t) = a_{j,i}(t) = \frac{\mu_i}{\mu_j}\ t = \left(\frac{V_i}{V_j}\right)^{-\lambda} t = \frac{V_j^{\lambda}}{V_i^{\lambda}}\ t$$

que corresponde a una situación donde la función g viene definida por

$$g(\lambda, V) = V^{\lambda},\ \lambda > 0.$$

Por tanto, se puede considerar el modelo ALT-BN de la regla de la potencia como aquel que tiene por función de aceleración entre los niveles de stress $V_i$ y $V_j$, con $V_i < V_j$, la definida por

$$a_{i,j}(t) = \left(\frac{V_i}{V_j}\right)^{\lambda} t, \text{ con } \lambda > 0, \ \forall\ t \geq 0.$$

Entonces, la transformación $a_V(t)$ viene dada por

$$a_V(t) = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\lambda} t, \text{ con } \lambda > 0, \ \forall\ t \geq 0.$$

Según [2.16], en el modelo ALT-BN de la regla de la potencia se verifica que

$$T_{V_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\lambda} T_V$$

y estamos en un caso particular del epígrafe 2.4.1 en el que

$$\beta_V(t) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\lambda}.$$

Según el Teorema 2.10, se verifica que, al estar el modelo ALT-BN de la regla de la potencia bajo la axiomática del epígrafe 2.2, entonces $F_V(u)$ es una función de distribución aleatoria cuya distribución viene inducida por un proceso Dirichlet de parámetro $\alpha_V$ y

$$\alpha_V(u) = \alpha\left(\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\lambda} u\right).$$

Este resultado nos permite construir un estimador consistente de la función de distribución bajo el stress usual, aplicando la metodología desarrollada en el Capítulo 1.

Para estimar $\lambda$ consideramos la notación $\theta_{ij}$ para el factor de escala entre $F_j$ y $F_i$, i.e.,

$$\theta_{ij} = \left(\frac{V_j}{V_i}\right)^{\lambda}, \text{ con } i \neq j \qquad [2.17]$$

Tomando logaritmos se tiene que

$$\lambda = \frac{\ln \theta_{ij}}{\ln V_i - \ln V_j}, \qquad [2.18]$$

con lo cual se podrá estimar $\lambda$, estimando previamente $\theta_{ij}$.

Según el desarrollo que se ha realizado en el epígrafe 1.2, se puede estimar $\theta_{ij}$ mediante un estimador $\hat{\theta}_{n_i,n_j}$ que minimice la distancia de Crámer-von Mises siguiente

$$W^2 = \int_0^\infty \left[\hat{F}_{i,n_i}(t/\theta_{ij}) - \hat{F}_{j,n_j}(t)\right]^2 dt \qquad [2.19]$$

donde $\hat{F}_{h,n_h}(t)$, con $h = i, j$, es el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática para $F_h$, que según Ferguson es combinación lineal convexa de la función de distribución empírica bajo el nivel de stress $V_h$ y de la función de distribución a priori bajo ese mismo nivel de stress.

Se puede demostrar, según lo que se ha desarrollado en el epígrafe 1.3, que $\hat{\theta}_{n_i,n_j}$ es consistente para estimar $\theta_{ij}$. Además, se puede obtener de cada par de niveles de stress que consideremos $V_i$, $V_j$, con $i \neq j$, un estimador $\hat{\lambda}_{n_i,n_j}$ de $\lambda$, por la relación siguiente

$$\hat{\lambda}_{n_i,n_j} = \frac{\ln \hat{\theta}_{n_i,n_j}}{\ln V_j - \ln V_i} \qquad [2.20]$$

Por tanto, hay $\binom{k}{2}$ formas de seleccionar dos niveles de stress entre los k, si suponemos excluido el stress habitual $V_0$, y, en consecuencia, tendremos $\frac{1}{2}k(k - 1)$ estimadores de $\lambda$ que se pueden promediar para dar el siguiente estimador

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \left(\ln \hat{\theta}_{n_i,n_j}\right)\left(\ln \frac{V_j}{V_i}\right)}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \left(\ln \left(\frac{V_j}{V_i}\right)\right)^2} \qquad [2.21]$$

que también se puede poner como

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \left(\ln \frac{V_j}{V_i}\right)^2 \hat{\lambda}_{n_i,n_j}}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \left(\ln \left(\frac{V_j}{V_i}\right)\right)^2} . \qquad [2.22]$$

**Teorema 2.13 (Maté)**

*El estimador de $\lambda$ definido por [2.21] es fuertemente consistente para estimar $\lambda$.*

Demostración.

Análoga a la del Teorema 1.8. ■

Teniendo en cuenta [2.17], si $\lambda$ fuese conocido, podríamos transformar (rescalar) los tiempos hasta el fallo de cualquier nivel de stress, para que correspondieran a tiempos hasta el fallo de cualquier otro nivel de stress. Así, las observaciones $T_{i\ell}$ bajo el nivel de stress $V_i$, con $\ell = 1, \ldots, n_i$, serían equivalentes a las observaciones $\left(\frac{V_i}{V_j}\right)^{\lambda} T_{i\ell}$ bajo el nivel de stress $V_j$, con $\ell = 1, \ldots, n_i$.

Ya que $\lambda$ no es conocido, utilizaremos su estimación $\hat{\lambda}$ para rescalar nuestras observaciones. Por tanto, definimos las $n_i$ observaciones rescaladas $Z_{i\ell}$ por la expresión

$$Z_{i\ell} = \left(\frac{V_i}{V_0}\right)^{\hat{\lambda}} T_{i\ell} \qquad i = 1, \ldots, k, \quad \ell = 1, \ldots, n_i \qquad [2.23]$$

Ahora, con las nuevas observaciones $Z_{i\ell}$, se procede a construir un estimador de la función de distribución $F_0$ bajo el nivel de stress usual $V_0$, para ello utilizamos el estimador propuesto por Ferguson (1973) y tendremos que

$$\hat{F}_0(t) = \frac{M}{M+n}\,[\alpha(t)/M] + \frac{n}{M+n}\,F_n(t) \qquad [2.24]$$

donde

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ es el número total de observaciones realizadas por el experimentador; y

$F_n(t)$ es la función de distribución empírica de las observaciones rescaladas $Z_{i\ell}$.

Siguiendo la argumentación del epígrafe 1.4 se demuestra que el estimador dado por [2.24] es fuertemente consistente para estimar $F_0(t)$.

## 2.5.2. MODELO ALT-BN DE LA REGLA DE ARRHENIUS

El modelo de la regla de Arrhenius se ha considerado en Mann, Schafer and Singpurwalla (1974, p.433) dentro del marco paramétrico no bayesiano; donde, para niveles de stress reales, se supone que en el nivel de stress i-ésimo $V_i$, para i = 0, 1, ..., k, se verifica que las funciones de distribución de los tiempos de funcionamiento son exponenciales con medias

$$\mu_i = A\cdot\exp\,\{\lambda\cdot V_i^{-1}\},$$

siendo $\lambda > 0$ y $A > 0$.

De la hipótesis de distribución exponencial resulta que $\forall$ $V_i$, $V_j \in \mathcal{V}$, se tiene que

$$F_{V_j}(t) = F_{V_i}\left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\,t\right).$$

Entonces

$$m(\lambda,V_j,V_i,t) = a_{j,i}(t) = \frac{\mu_i}{\mu_j}\ t = \frac{e^{\lambda/V_i}}{e^{\lambda/V_j}}\ t = e^{-\lambda\left[\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i}\right]} t$$

que corresponde a una situación donde la función g viene definida por

$$g(\lambda,V) = e^{-\lambda/V},\ \lambda > 0.$$

Por tanto, se puede considerar el modelo ALT-BN de la regla de Arrhenius como aquel que tiene por función de aceleración, entre los niveles de stress $V_i$ y $V_j$, con $V_i < V_j$, la definida por

$$a_{i,j}(t) = e^{-\lambda\left[\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_j}\right]} t,\ \text{con } \lambda > 0,\ \forall\ t \geq 0.$$

Entonces, la transformación $a_V(t)$ viene dada por

$$a_V(t) = e^{-\lambda\left[\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V}\right]} t,\ \text{con } \lambda > 0,\ \forall\ t \geq 0.$$

Según [2.16], en el modelo ALT-BN de la regla de Arrhenius se verifica que

$$T_{V_0} = e^{-\lambda\left[\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right]} T_V$$

y estamos en un caso particular del epígrafe 2.4.1 en el que

$$\beta_V(t) = e^{-\lambda\left[\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right]}.$$

Según el Teorema 2.10, se verifica que, al estar el modelo ALT-BN de la regla de Arrhenius bajo la axiomática del epígrafe 2.2, entonces $F_V(u)$ es una función de distribución aleatoria cuya distribución viene inducida por un proceso Dirichlet de parámetro $\alpha_V$ y

$$\alpha_V(u) = \alpha\left(e^{-\lambda\left[\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right]} u\right).$$

Este resultado nos permite construir un estimador consistente de la función de distribución bajo el stress usual, aplicando la metodología desarrollada en el Capítulo 1.

Para estimar $\lambda$ consideramos la notación $\theta_{ij}$ para el factor de escala entre $F_j$ y $F_i$, i.e.,

$$\theta_{ij} = e^{-\lambda\left[\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i}\right]}, \text{ con } i \neq j. \qquad [2.25]$$

Tomando logaritmos se tiene que

$$\lambda = \frac{\ln \theta_{ij}}{\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_j}}, \qquad [2.26]$$

con lo cual se podrá estimar $\lambda$, estimando previamente $\theta_{ij}$.

Según el desarrollo que se ha realizado en el epígrafe 1.2, se puede estimar $\theta_{ij}$ mediante un estimador $\hat{\theta}_{n_i,n_j}$ que minimice la distancia de Crámer-von Mises siguiente

$$W^2 = \int_0^\infty \left[\hat{F}_{i,n_i}(t/\theta_{ij}) - \hat{F}_{j,n_j}(t)\right]^2 dt \qquad [2.27]$$

donde $\hat{F}_{h,n_h}(t)$, con $h = i, j$, es el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática para $F_h$, que según Ferguson es combinación lineal convexa de la función de distribución empírica bajo el nivel de stress $V_h$ y de la función de distribución a priori bajo ese mismo nivel de stress.

Se puede demostrar, según lo que se ha desarrollado en el epígrafe 1.3, que $\hat{\theta}_{n_i,n_j}$ es consistente para estimar $\theta_{ij}$. Además, se puede obtener de cada par de niveles de stress que consideremos $V_i$, $V_j$, con $i \neq j$, un estimador $\hat{\lambda}_{n_i,n_j}$ de $\lambda$, por la relación siguiente

$$\hat{\lambda}_{n_i,n_j} = \frac{\ln \hat{\theta}_{n_i,n_j}}{\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_j}}. \qquad [2.28]$$

Por tanto, hay $\binom{k}{2}$ formas de seleccionar dos niveles de stress entre los k, si suponemos excluido el stress habitual $V_0$, y, en consecuencia, tendremos $\frac{1}{2}k(k - 1)$ estimadores de $\lambda$ que se pueden promediar para dar el siguiente estimador

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\left(\ln \hat{\theta}_{n_i,n_j}\right)\left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_j}\right)}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_j}\right)^2} \qquad [2.29]$$

que también se puede poner como

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_j}\right)^2 \hat{\lambda}_{n_i,n_j}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}\left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_j}\right)^2}. \qquad [2.30]$$

**Teorema 2.14 (Maté)**

*El estimador de $\lambda$ definido por [2.30] es fuertemente consistente para estimar $\lambda$.*

Demostración.

Análoga a la del Teorema 1.8. ■

Teniendo en cuenta [2.25], si $\lambda$ fuese conocido, podríamos transformar (rescalar) los tiempos hasta el fallo de cualquier nivel de stress, para que correspondieran a tiempos hasta el fallo de cualquier otro nivel de stress. Así, las observaciones $T_{i\ell}$ bajo el nivel de stress $V_i$, con $\ell = 1, \dots, n_i$, serían equivalentes a las observaciones

$$e^{-\lambda\left[\frac{1}{V_j} - \frac{1}{V_i}\right]} T_{i\ell}$$

bajo el nivel de stress $V_j$, con $\ell = 1, \ldots, n_i$.

Ya que $\lambda$ no es conocido, utilizaremos su estimación $\hat{\lambda}$ para rescalar nuestras observaciones. Por tanto, definimos las $n_i$ observaciones rescaladas $Z_{i\ell}$ por la expresión

$$Z_{i\ell} = e^{-\hat{\lambda}\left[\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_0}\right]} T_{i\ell}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \ell = 1, \ldots, n_i \qquad [2.31]$$

Ahora, con las nuevas observaciones $Z_{i\ell}$, se procede a construir un estimador de la función de distribución $F_0$ bajo el nivel de stress usual $V_0$, para ello utilizamos el estimador propuesto por Ferguson (1973) y tendremos que

$$\hat{F}_0(t) = \frac{M}{M+n}\,[\alpha(t)/M] + \frac{n}{M+n}\,F_n(t) \qquad [2.32]$$

donde

$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ es el número total de observaciones realizadas por el experimentador; y

$F_n(t)$ es la función de distribución empírica de las observaciones rescaladas $Z_{i\ell}$.

Siguiendo la argumentación del epígrafe 1.4 se demuestra que el estimador dado por [2.32] es fuertemente consistente para estimar $F_0(t)$.

# CAPITULO 3

## MODELOS ALT-BN CON DATOS CENSURADOS

Los modelos de ensayos de vida acelerados que se han estudiado en la literatura se concebían para muestras completas, con la excepción de los trabajos de Barlow and Scheuer (1971), Basu and Ebrahimi (1982) y McNichols and Padgett (1984). En muchas situaciones, las observaciones pueden estar censuradas aleatoriamente a la derecha, como ocurre, a menudo, cuando algunos sistemas:

(1) son eliminados del estudio o del servicio que realizan, en diferentes instantes de tiempo, antes de que fallen (para un análisis más completo o por otras razones),

(2) aún funcionan cuando termina el periodo de estudio,

(3) son eliminados del estudio o del servicio que realizan debido a que fallaron por una causa ajena e independiente a la que se está estudiando.

En otras situaciones, las observaciones pueden estar censuradas aleatoriamente a la izquierda, como ocurre cuando ciertos equipos de precisión se colocan en los faros de las costas. Se puede conocer el tiempo de funcionamiento de uno de estos equipos cuando se encuentra en un faro vigilado por personal, con lo que se tendrá una observación no censurada. Ahora bien, es posible que en alguno de estos faros no haya ninguna persona y se encuentre en una zona de difícil acceso, con lo cual se puede producir el fallo y no detectarse hasta después de un cierto tiempo.

Obviamente, se pueden presentar situaciones con muestras doblemente censuradas.

Los trabajos citados anteriormente son por completo no bayesianos, y es de destacar la escasa atención que se ha prestado al contexto bayesiano no paramétrico de los modelos de ensayos de vida acelerada, cuando se presentan muestras censuradas. Ultimamente, y dentro de este contexto, se ha potenciado el estudio del papel que desempeñan las covariables en los análisis de fiabilidad acelerada. Kalbfleisch (1978) presentó una aproximación semiparamétrica bayesiana al análisis de riesgos proporcionales de Cox, y Christensen and Johnson (1988) hicieron lo mismo en el modelo de tiempo de fallo acelerado. En ambos casos se contempla la posibilidad de observaciones censuradas por la derecha. Una aproximación totalmente Bayesiana al modelo de tiempo de fallo acelerado con datos no censurados ha sido estudiada por Christensen and Johnson (1989).

Por tanto, no se ha presentado hasta el momento ningún trabajo en el que se estudien las muestras censuradas, en los modelos de ensayos de vida acelerada, bajo un contexto bayesiano no paramétrico. Éste es precisamente el objetivo de este capítulo, que será, por tanto, completamente novedoso, y en el que se pretenden generalizar los resultados que han obtenido Basu and Ebrahimi (1982) y McNichols and Padgett (1984) al contexto bayesiano no paramétrico.

En primer lugar, se plantea el Modelo ALT-BN Básico con Datos Censurados Aleatoriamente por la Derecha, como una extensión del

Modelo ALT-BN Básico desarrollado en el Capítulo 1, donde el parámetro $\theta_i$, además de jugar el mismo papel que en dicho capítulo, factor de escala entre los tiempos de funcionamiento en los niveles de stress $V_i$ y $V_0$; representa el factor de escala existente entre los tiempos de funcionamiento censurados en los niveles de stress $V_i$ y $V_0$.

A continuación se analiza la construcción de un estimador consistente para el parámetro $\theta_i$.

Para construir un estimador consistente para $\bar{F}_0$ se considera un nivel de stress cualquiera $V_h$, con h = 0, 1, ..., k; y a partir de los datos censurados $(z_{h,j},\delta_{h,j})$, con j = 1, ..., $n_h$, se construye el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática de Susarla y Van Ryzin para $\bar{F}_h(t)$, al que se nota por $\hat{\bar{F}}_h(t)$. Esto permite definir como estimador de $\bar{F}_0(t)$ el resultado de evaluar el estimador $\hat{\bar{F}}_h(t)$ en el punto $\hat{\theta}_{n_0,n_h}t$, y notamos a dicho estimador por $\hat{\bar{F}}_{0,h}(t)$, luego

$$\hat{\bar{F}}_{0,h}(t) = \hat{\bar{F}}_h\left(\hat{\theta}_{n_0,n_h}t\right)$$

resultando ser fuertemente consistente para estimar $\bar{F}_0(t)$

Luego, en cada nivel de stress $V_h$, con h = 0, ..., k, se ha construido un estimador consistente para $\bar{F}_0$. Por tanto, hay k + 1 estimadores para $\bar{F}_0(t)$ y formamos la media aritmética ponderada para definir un nuevo estimador de $\bar{F}_0$, que notamos por $\hat{\bar{F}}_0(t)$. Así, el estimador de $\bar{F}_0$ se define por

$$\hat{\bar{F}}_0(t) = \frac{1}{n}\sum_{h=0}^{k} n_h\,\hat{\bar{F}}_{0,h}(t) \qquad [3.4]$$

y se demuestra que es un estimador fuertemente consistente para estimar $\bar{F}_0$.

En la última parte de este capítulo se analiza el Modelo ALT-BN con Datos Censurados bajo Riesgo o Azar Proporcional. Este modelo considera las mismas hipótesis del Modelo ALT-BN Básico con Datos Censurados Aleatoriamente por la Derecha, añadiendo la hipótesis de la existencia de una constante $\beta_i \in [0,\infty)$, que supondremos dependiente del nivel de stress, tal que, para i = 0, 1, ..., k, se verifica que las funciones de fiabilidad de los tiempos de funcionamiento censurado y verdadero en el nivel de stress $V_i$, $\bar{G}_i(t)$ y $\bar{F}_i(t)$, respectivamente, están relacionadas por

$$\bar{G}_i(t) = \left[\bar{F}_i(t)\right]^{\beta_i}, \ \forall t > 0.$$

A partir de los resultados obtenidos por Morales, Pardo y Quesada (1985, 1986), el Teorema 3.4 nos proporciona el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática de $\bar{F}_i(t)$, a t fijo, en un modelo de riesgo proporcional, notado por $\hat{\bar{F}}_{P,i}(t)$ para indicar que es estimador paramétrico. Para poder utilizar este estimador en la estimación del parámetro de escala $\theta_i$, es necesario proceder a la estimación del parámetro de censura $\beta_i$. Esta estimación se lleva a cabo mediante dos metodologías: Bayesiana y de los Momentos.

Para estimar el parámetro de escala $\theta_i$ se sustituye, en la expresión del Teorema 3.4, $\beta_i$ por su estimación $\hat{\beta}_i$ y se construye un estimador de $\theta_i$ como un valor de $\theta$ que minimice la distancia de Crámer-von Mises siguiente

$$W^2 = \int_0^\infty \left[ \hat{\bar{F}}_{P,0}(t \,/\, \theta) - \hat{\bar{F}}_{P,i}(t) \right]^2 dt.$$

Para cada i = 1, ..., k notemos por $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$ al estimador de $\theta_i$

que se acaba de definir. Con estos estimadores procedemos a rescalar las observaciones $Z_{i,j}$, $j = 1, \ldots, n_i$, por la relación

$$Z^*_{i,j} = \frac{Z_{i,j}}{\hat{\theta}_{n_0,n_i}}$$

con lo cual se dispone de los datos

$$(z^*_{i,j}, \delta_{i,j}),\ i = 0, 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, n_i$$

siendo $z^*_{0,j} = z_{0,j}$, al ser $\hat{\theta}_{n_0,n_0} = 1$.

Mediante la estimación del parámetro de censura $\hat{\beta}$, bien bayesiana o por el método de los momentos, a partir del número total de datos rescalados, y mediante dichos datos, se procede a construir el estimador bayesiano paramétrico de la función de fiabilidad bajo el nivel de stress usual, a t fijo, que presentaron Morales, Pardo y Quesada (1985, 1986).

## 3.1. EL MODELO ALT-BN BASICO CON DATOS CENSURADOS ALEATORIAMENTE POR LA DERECHA

En este apartado nos proponemos analizar un modelo para estudiar el problema de la censura aleatoria por la derecha, en los ensayos de vida acelerados (ALT), bajo el contexto bayesiano no paramétrico de los procesos de Dirichlet.

Las hipótesis sobre este modelo ALT-BN son las siguientes:

(H1) Existen k + 1 niveles de stress que se fijan antes de realizar el ensayo y que se notan por $V_0$, $V_1, \ldots, V_k$. Entre ellos se cumple $V_0 < V_1 < \ldots < V_k$, siendo $V_0$ el nivel de stress habitual y

$V_1, \ldots, V_k$ los niveles de stress acelerados.

(H2) En cada uno de los niveles de stress se someten a ensayo de vida $n_i$ sistemas, con $i = 0, \ldots, k$. Para el sistema o item $j$, en el nivel de stress $V_i$, se considera la notación siguiente:

$X_{i,j}$ representa la v.a. que indica el tiempo de funcionamiento verdadero del sistema $j$ en el nivel de stress $V_i$.

$Y_{i,j}$ representa la v.a., que indica el tiempo de funcionamiento censurado del sistema $j$ en el nivel de stress $V_i$.

$F_i$ es la función de distribución de la v.a. $X_{i,j}$, $\forall\ j = 1,\ldots,n_i$.

$\overline{F}_i$ es la función de fiabilidad de la v.a. $X_{i,j}$, $\forall\ j = 1,\ldots,n_i$.

$G_i$ es la función de distribución de la v.a. $Y_{i,j}$, $\forall\ j = 1,\ldots,n_i$.

$n = \sum_{i=0}^{k} n_i$ es el número total de sistemas en estudio.

El estadístico sólo tiene disponibles los datos $\left(Z_{i,j}, \Delta_{i,j}\right)$, para $j = 1, \ldots, n_i$, donde

$$Z_{i,j} = \min\left\{X_{i,j}, Y_{i,j}\right\}$$

$$\Delta_{i,j} = I_{[X_{i,j} \le Y_{i,j}]} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{i,j} \le Y_{i,j} \\ 0 & \text{si } X_{i,j} > Y_{i,j} \end{cases}$$

de tal forma que, si $\Delta_{i,j} = 0$, entonces se dice que $Z_{i,j}$ es "una pérdida", y si $\Delta_{i,j} = 1$, se dice que $Z_{i,j}$ es un "fallo". Los valores observados de $\left(Z_{i,j}, \Delta_{i,j}\right)$ serán notados por $\left(z_{i,j}, \delta_{i,j}\right)$.

Supongamos que, $\forall\ i = 0, \ldots, k$ y $\forall\ j = 1,\ldots,n_i$, se verifican las hipótesis siguientes :

1) $X_{i,j}$ son v.a.i.i.d. con distribución $F_i(t)$.

2) $Y_{i,j}$ son v.a.i.i.d. con distribución $G_i(t)$.

3) $Y_{i,j}$ son v.a. independientes de $X_{i,j}$.

(H3) Cada uno de los $n_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$, es suficientemente grande, de manera que sea factible la realización de un análisis asintótico.

(H4) La distribución de la v.a. $T_0$, notada por $F_0$, es la inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha$, siendo $\alpha$ una medida finita, no nula y no atómica sobre $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}^+)$. Abreviadamente, $F_0 \in \mathcal{D}(\alpha)$.

(H5) Si denotamos por $T_i$ la v.a. que representa el tiempo de funcionamiento del sistema hasta el fallo bajo el nivel de stress $V_i$, con $i = 1, \ldots, k$, se verifica que $F_i$, la función de distribución de la v.a. $T_i$, y $F_0$ difieren en un parámetro de escala $\theta_i$. Es decir, se tiene que

$$F_i(t) = F_0(t/\theta_i) \quad \text{para } i = 1, \ldots, k. \qquad [3.1]$$

(H6) Se verifica que

$$G_i(y) = G_0(y/\theta_i) \quad \text{para } i = 1, \ldots, k. \qquad [3.2]$$

siendo $\bar{G}_i(y) > 0$ y $\bar{G}_0(u) > 0$.

**Observaciones.-**

a) En el caso particular de ser $G_i$ la función de distribución de una v.a. degenerada, $Y_{i,j}$ son constantes y la censura se considera fija. A veces se considera que las v.a. $Y_{i,j}$ no están idénticamente distribuidas dentro del mismo nivel de stress $V_i$, pero de momento no se considera esta situación. Este caso se aborda por separado en el epígrafe 3.2 al no verificarse la hipótesis H6.

b) La hipótesis (H4) sitúa este modelo de ALT con datos censurados en el contexto bayesiano no paramétrico de los procesos de Dirichlet.

c) En la hipótesis (H5) se afirma que las funciones de fiabilidad $\bar{F}_i$, con $i = 0, 1, \ldots, k$, pertenecen a una familia común, pero desconocida, de funciones de fiabilidad y en la que un cambio de stress no cambia la forma de la distribución del tiempo de funcionamiento, sólo se modifica su escala por el parámetro desconocido $\theta_i$.

d) La hipótesis (H6) afirma que un cambio en el nivel de stress cambia la escala, pero no la forma, de los tiempos de censura y, además, ese cambio se produce con el mismo factor de escala que en los tiempos no censurados. Esta hipótesis parece plausible, ya que suponer que la escala empleada con los tiempos de censura acorta más, o menos, que en el caso de los tiempos de funcionamiento, supondría que se está haciendo un tratamiento diferente para los dos tipos de información y, como al final se han de juntar ambas informaciones, podrían aparecer resultados imprevisibles.

Bajo el modelo anterior nos proponemos estimar $\bar{F}_0$ y las medidas de fiabilidad asociadas a $\bar{F}_0$, a partir de las observaciones en el nivel de stress usual y en otros niveles, siguiendo un esquema similar al del Capítulo 1.

### 3.1.1. CONSTRUCCION DE UN ESTIMADOR CONSISTENTE PARA $\theta_i$

El parámetro $\theta_i$ se podrá estimar a partir de las observaciones $(z_{h,j},\delta_{h,j})$, $h = 0,\ i$, $j = 1, \ldots, n_h$, mediante los estimadores de Kaplan-Meier para $\bar{F}_h(t) = 1 - F_h(t)$, según se desarrolla a continuación.

Sea $i = 1, \ldots, k$, fijo. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que en el nivel de stress $V_h$, con $h = 0,\ i$, se verifica

$$z_{h,1} \le z_{h,2} \le \ldots \le z_{h,n_h}$$

con las $m_h$ primeras observaciones no censuradas y las $n_h - m_h$ siguientes observaciones censuradas.

Para la obtención del estimador de $\theta_i$ se consideran las transformaciones siguientes para, $h = 0,\ i$,

$$X_h^* = \ln X_h$$
$$Y_h^* = \ln Y_h$$

con lo cual las observaciones $z_{h,j}$ se transforman en $z_{h,j}^* = \ln z_{h,j}$ y $\delta_{h,j}$ se transforma en $\delta_{h,j}^*$, siendo

$$\delta_{h,j}^* = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{h,j}^* \le y_{h,j}^* \\ 0 & \text{si } x_{h,j}^* > y_{h,j}^* \end{cases}$$

para $h = 0,\ i$.

Por tanto, se pasa de $X_i \overset{D}{=} \theta_i X_0$ a $X_i^* \overset{D}{=} \Delta_i + X_0^*$ y de $Y_i \overset{D}{=} \theta_i Y_0$ a $Y_i^* \overset{D}{=} \Delta_i + Y_0^*$, con $\Delta_i = \ln \theta_i$. Es decir, el parámetro de escala $\theta_i$ se transforma en un parámetro de localización $\Delta_i$.

Sea $h = 0,\ i$, si se denota por $F_h^*$ a la función de distribución de las variables aleatorias $X^{*}_{h,j}$, con $j = 1, \ldots, n_h$, resulta que el estimador de Kaplan-Meier para $\bar{F}^{*}_{h}$, el cual será notado por $\hat{\bar{F}}^{*}_{KM,h}$, adopta la expresión

$$\hat{\bar{F}}^{*}_{KM,h}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le z^{*}_{h,1} \\ \prod_{r=1}^{u-1} \left( \dfrac{n_h - r}{n_h - r + 1} \right)^{\delta_{h,r}} & \text{si } x \in (z^{*}_{h,u-1}, z^{*}_{h,u}],\ u = 2, \ldots, n_h \\ 0 & \text{si } x > z^{*}_{h,n_h} \end{cases}$$

Designemos, para $h = 0, 1$, los saltos de $\hat{\bar{F}}^{*}_{KM,h}(x)$ en las observaciones $z^{*}_{h,r}$ por $a_{h,r}$ (si $\delta^{*}_{h,r} = 0$, el salto es cero). Esto es,

$$a_{h,r} = \begin{cases} \hat{\bar{F}}^{*}_{KM,h}\left(z^{*}_{h,r}\right) - \hat{\bar{F}}^{*}_{KM,h}\left(z^{*}_{h,r+1}\right), & r = 1, \ldots, n_h - 1 \\ \hat{\bar{F}}^{*}_{KM,h}\left(z^{*}_{h,n_h}\right), & r = n_h \end{cases}$$

Construimos un estimador $\hat{\Delta}_{n_0,n_1}$ de $\Delta_1$, como un valor de $\Delta$ que minimice la distancia de Crámer-von Mises

$$W^2 = \int_0^{\infty} \left[ \hat{\bar{F}}^{*}_{KM,0}(t - \Delta) - \hat{\bar{F}}^{*}_{KM,1}(t) \right]^2 dt,$$

resultando que $\hat{\Delta}_{n_0,n_1}$ es una mediana de la distribución de probabilidad discreta cuya función de masa de probabilidad es

$$h_{n_0,n_1}(v) = \begin{cases} a_{0,r} \cdot a_{1,s}, & \text{si } v = z^{*}_{0,r} - z^{*}_{1,s},\ r = 1, \ldots, n_0,\ s = 1, \ldots, n_1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos $\hat{\theta}_{n_0,n_1} = e^{\hat{\Delta}_{n_0,n_1}}$. Entonces, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.1**

*Si para $i = 0, \ldots, k$ se verifica que*

$$\underset{X}{SUP}\left\{x \;/\; G_i(x) < 1\right\} \geq \underset{X}{SUP}\left\{x \;/\; F_i(x) < 1\right\},$$

*entonces $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$ es un estimador fuertemente consistente de $\theta_i$.*

Demostración.

Análoga a la demostración del Capítulo 1. ∎

### 3.1.2. CONSTRUCCION DE UN ESTIMADOR CONSISTENTE PARA $\overline{F}_0$

Sea un nivel de stress cualquiera $V_h$, con $h = 0, 1, \ldots, k$. En este nivel de stress se desconoce la función de fiabilidad $\overline{F}_h(t)$, pero se puede estimar a partir de los datos censurados $(z_{h,j}, \delta_{h,j})$, con $j = 1, \ldots, n_h$, según el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática de Susarla y Van Ryzin para $\overline{F}_h(t)$, que notamos por $\hat{\overline{F}}_h(t)$. Precisamente estos dos autores demostraron en 1978 que este estimador es fuertemente consistente para estimar $\overline{F}_h(t)$. Por tanto, en cada nivel de stress $V_h$ se tiene un estimador consistente de $\overline{F}_h(t)$. Ahora vamos a utilizar cada uno de estos estimadores para obtener un estimador de $\overline{F}_0$. Notemos por $\hat{\overline{F}}_{0,h}(t)$ al estimador de $\overline{F}_0$ obtenido a partir del estimador $\overline{F}_h(t)$ en el punto $\hat{\theta}_{n_0,n_h} t$, luego

$$\hat{\overline{F}}_{0,h}(t) = \hat{\overline{F}}_h\left(\hat{\theta}_{n_0,n_h} t\right)$$

Es claro que en el caso de $h = 0$, $\hat{\theta}_{n_0,n_h} = 1$ y el estimador de $\overline{F}_0(t)$

es directamente el de Susarla y Van Ryzin en el punto t.

Por tanto, para $i = 1, \ldots, k$, se define

$$\hat{\bar{F}}_{0,i}(t) = \hat{\bar{F}}_i(\hat{\theta}_{n_0,n_i} t). \qquad [3.3]$$

**Teorema 3.2 (Maté)**

*El estimador definido por [3.3] es fuertemente consistente para estimar* $\bar{F}_0$.

Demostración.

Debido a la consistencia fuerte de $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$ existe un suceso $B_i$ que tiene probabilidad uno, tal que para cada $\omega \in B_i$ se tiene que

$$\theta_i = \lim_{n_0,n_i \to \infty} \hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega).$$

Si aplicamos ahora el Lema 1.6 a la función de distribución $F_i$ del nivel de stress $V_i$, por ser continua y creciente, resulta que para ese suceso $B_i$ de probabilidad uno se tiene que, para cada $\omega \in B_i$ y dado $\varepsilon > 0$, existe un entero $N_1(i,\omega)$/ para $n_0, n_i \geq N_1(i,\omega)$ se verifica

$$\left| F_i\left(\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega) t\right) - F_i\left(\theta_i t\right) \right| < \varepsilon/2,$$

tomando $x = \theta_i t$ en la correspondiente expresión del Lema 1.6. Por tanto, también se tiene, bajo las mismas condiciones anteriores, que

$$\left| \bar{F}_i\left(\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega) t\right) - \bar{F}_i\left(\theta_i t\right) \right| < \varepsilon/2.$$

Por otra parte, al ser el estimador $\hat{\bar{F}}_i$ consistente para estimar $F_i$, existe un suceso $A_i$ que tiene probabilidad uno tal que; para cada $\omega \in A_i$ y dado $\varepsilon > 0$, existe un entero $N_2(i,\omega)$ / para $n_i \geq N_2(i,\omega)$ se verifica

$$\left|\hat{\bar{F}}_i(t)(\omega) - \bar{F}_i(t)\right| < \varepsilon/2.$$

Por tanto, si consideramos el suceso $C_i = A_i \cap B_i$, para cada $\omega \in C_i$ se tiene que

$$\left|\hat{\bar{F}}_{0,i}(t)(\omega) - \bar{F}_0(t)\right| = \left|\hat{\bar{F}}_i\left(\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)t\right) - \bar{F}_i(\theta_i t)\right| \leq$$

$$\left|\hat{\bar{F}}_i\left(\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)t\right) - \bar{F}_i\left(\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)t\right)\right| + \left|\bar{F}_i\left(\hat{\theta}_{n_0,n_i}(\omega)t\right) - \bar{F}_i(\theta_i t)\right|,$$

y, dado $\varepsilon > 0$ y tomando $n_0, n_i \geq N_0(i,\omega) = \max_j \{N_j(i,\omega)\}$, se tiene que

$$\left|\hat{\bar{F}}_{0,i}(t) - \bar{F}_0(t)\right| < \varepsilon.$$

El resultado se sigue al tener el suceso $C_i$ probabilidad uno. ■

Luego, en cada nivel de stress $V_h$, con $h = 0, \ldots, k$, se ha construido un estimador consistente para $\bar{F}_0$. Por tanto, hay $k + 1$ estimadores para $\bar{F}_0(t)$ y formamos la media aritmética ponderada para definir un nuevo estimador de $\bar{F}_0$, que notamos por $\hat{\bar{F}}_0(t)$. Así, el estimador de $\bar{F}_0$ se define por

$$\hat{\bar{F}}_0(t) = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{k} n_h \hat{\bar{F}}_{0,h}(t) \qquad [3.4]$$

Se verifica el siguiente resultado.

**Teorema 3.3 (Maté)**

*El estimador definido por [3.4] es fuertemente consistente para estimar $\bar{F}_0$.*

Demostración.

Tenemos que demostrar que existe un suceso B con probabilidad uno tal que, para cada $\omega \in B$ y dado $\varepsilon > 0$, $\exists$ N/ $\forall$ n $\geq$ N

$$\left| \hat{\bar{F}}_0(t) - \bar{F}_0(t) \right| < \varepsilon.$$

Por el Teorema 3.2 sabemos que para cada $h = 0, \ldots, k$ existe un suceso $C_h$ con probabilidad uno tal que, para $\omega \in C_h$ y dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, N_0(h,\omega)$ / si $n_0, n_h \geq N_0(h,\omega)$ se verifica que

$$\left| \hat{\bar{F}}_{0,h}(t) - \bar{F}_0(t) \right| < \varepsilon.$$

Definimos el suceso $B = \bigcap_{h=0}^{k} C_h$, entonces, para cada $\omega \in B$ y dado $\varepsilon > 0$, se pueden tomar $n_0, n_h \geq \max_{h=0,\ldots,k} \{N_0(h,\omega)\}$, $\forall$ $h = 0, \ldots, k$, con lo cual se tiene que

$$\left| \hat{\bar{F}}_0(t) - \bar{F}_0(t) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{k} n_h \hat{\bar{F}}_{0,h}(t) - \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{k} n_h \bar{F}_0(t) \right| =$$

$$= \frac{1}{n} \left| \sum_{h=0}^{k} n_h \left( \hat{\bar{F}}_{0,h}(t) - \bar{F}_0(t) \right) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{k} n_h \left| \hat{\bar{F}}_{0,h}(t) - \bar{F}_0(t) \right| =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{k} n_h \, \varepsilon = \varepsilon.$$

El teorema se sigue al tener el suceso B probabilidad uno. ∎

## 3.2. EL MODELO ALT-BN CON DATOS CENSURADOS Y ESTIMADORES PARAMETRICOS BAJO RIESGO PROPORCIONAL

En los apartados anteriores se ha utilizado como estimador para la función de fiabilidad en el stress $V_i$, notada por $\bar{F}_i$, a partir de los datos en dicho nivel de stress, el estimador propuesto por

Susarla y Van Ryzin en 1976. Ahora nos proponemos utilizar como estimador para $\bar{F}_i$ el que presentaron, en 1986, Morales, Pardo y Quesada. Por lo tanto, vamos, en primer lugar, a analizar dicho estimador.

### 3.2.1. ESTIMACION PARAMETRICA EN EL MODELO ALT-BN CON DATOS CENSURADOS

Sea $V_i$ un nivel de stress fijo, con $i = 0, \ldots, k$, y sean $X_{i,1}, \ldots, X_{i,n_i}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, según la función de fiabilidad $\bar{F}_i(t) = P[X_i > t]$, las cuales representan el tiempo de funcionamiento de sistemas que son censurados a la derecha por los tiempos de censura representados por las variables aleatorias $Y_{i,1},\ldots,Y_{i,n_i}$, que también se suponen independientes e idénticamente distribuidas, pero ahora según la función de fiabilidad $\bar{G}_i(t) = P[Y_i > t]$. Se supone, además, que las variables aleatorias $X_{i,j}$ son independientes de las $Y_{i,j}$. Según se vio en el apartado 3.1, el estadístico, en la práctica, sólo dispone de los datos $(Z_{i,j},\Delta_{i,j})$, con $j = 1, \ldots, n_i$, donde

$$Z_{i,j} = \min\left\{X_{i,j},Y_{i,j}\right\},\ \Delta_{i,j} = I_{[X_{i,j}\leq Y_{i,j}]}\ .$$

A veces, en la realidad, sucede que las variables aleatorias $Z_{i,j}$ y $\Delta_{ij}$ son independientes, i.e., el tiempo observado de fallo o censura es independiente de que la observación sea censurada o no. Por tanto, parece plausible aceptar como hipótesis que $Z_{i,j}$ y $\Delta_{i,j}$ son variables aleatorias independientes. Este tipo de modelo, denominado de riesgo o azar proporcional, queda caracterizado por la existencia de una constante $\beta_i \in [0,\infty)$, que supondremos dependiente del nivel de stress, tal que, para i = 0, 1, ..., k, se verifica que

$$\bar{G}_i(t) = \left[\bar{F}_i(t)\right]^{\beta_i}, \ \forall t > 0.$$

Para i = 0, 1, ..., k, sea $\Omega_i$ el espacio muestral donde toman sus valores las variables aleatorias $X_i$ e $Y_i$. Dada una muestra $(Z_{i,1},\delta_{i,1})$, ..., $(Z_{i,n},\delta_{i,n})$ consideramos un tiempo fijo t y la siguiente partición de $\Omega_i$:

$$A_{i,1} = \left\{\omega \in \Omega_i \ / \ X_i(\omega) \le Y_i(\omega) \text{ y } X_i(\omega) \le t\right\} \quad \text{(fallo antes de t)}$$

$$A_{i,2} = \left\{\omega \in \Omega_i \ / \ Y_i(\omega) < X_i(\omega) \text{ e } Y_i(\omega) \le t\right\} \quad \text{(censura antes de t)}$$

$$A_{i,3} = \left\{\omega \in \Omega_i \ / \ X_i(\omega) \le Y_i(\omega) \text{ y } X_i(\omega) > t\right\} \quad \text{(fallo después de t)}$$

$$A_{i,4} = \left\{\omega \in \Omega_i \ / \ Y_i(\omega) < X_i(\omega) \text{ e } Y_i(\omega) > t\right\} \quad \text{(censura después de t)}$$

Para un nivel de stress $V_i$, con i = 0, 1, ..., k, sea el vector aleatorio

$$v_i(t) = \left(v_{i,1}(t), v_{i,2}(t), v_{i,3}(t), v_{i,4}(t)\right),$$

donde

$v_{i,1}(t)$ representa el número de sistemas que han fallado en la muestra de tamaño $n_i$ antes de t,

$v_{i,2}(t)$ representa el número de sistemas censurados en la muestra de tamaño $n_i$ antes de t,

$v_{i,3}(t)$ representa el número de sistemas que han fallado en la muestra de tamaño $n_i$ después de t,

$v_{i,4}(t)$ representa el número de sistemas censurados en la muestra de tamaño $n_i$ después de t.

Se verifica que la v.a. multidimensional $v_i(t)$ sigue una distribución multinomial de parámetros

$$\left(n_i; p_{i,1}(t), p_{i,2}(t), p_{i,3}(t), p_{i,4}(t)\right),$$

siendo

$$p_{i,\ell}(t) = P(A_{i,\ell}), \quad \text{para } \ell = 1,\ 2,\ 3\ ,\ 4.$$

En términos de las funciones de fiabilidad $\bar{F}_i$ y $\bar{G}_i$, estas probabilidades aleatorias toman los valores

$$p_{i,1}(t) = -\int_0^t \bar{G}_i(x)\ d\bar{F}_i(x)$$

$$p_{i,2}(t) = 1 - \bar{F}_i(t)\bar{G}_i(t) + \int_0^t \bar{G}_i(x)\ d\bar{F}_i(x)$$

$$p_{i,3}(t) = -\int_t^\infty \bar{G}_i(x)\ d\bar{F}_i(x)$$

$$p_{i,4}(t) = \bar{F}_i(t)\bar{G}_i(t) + \int_t^\infty \bar{G}_i(x)\ d\bar{F}_i(x)$$

y, bajo el supuesto de riesgo proporcional, se tiene que

$$\cancel{p_{i,1}(t) = \frac{1}{\beta_i+1}} \left(1 - \left[\bar{F}_i(t)\right]^{\beta_i+1}\right)$$

$$p_{i,2}(t) = \frac{\beta_i}{\beta_i+1} \left(1 - \left[\bar{F}_i(t)\right]^{\beta_i+1}\right)$$

$$p_{i,3}(t) = \frac{1}{\beta_i+1} \left[\bar{F}_i(t)\right]^{\beta_i+1}$$

$$p_{i,4}(t) = \frac{\beta_i}{\beta_i+1} \left[\bar{F}_i(t)\right]^{\beta_i+1}$$

El problema, por tanto, desde el punto de vista paramétrico, es el de considerar a cualquiera de las $p_{i,\ell}(t)$ como un parámetro aleatorio de una distribución multinomial, con una distribución a priori dada a partir de las distribuciones marginales de los procesos $\bar{F}_i(t)$ y $\bar{G}_i(t)$, y obtener el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática del parámetro variable aleatoria $\overline{F}_i(t)$ a t fijo. Dicho estimador será la media a posteriori $E[\overline{F}_i(t)/v_i(t)]$.

Según los resultados obtenidos por Morales, Pardo y Quesada (1986), se puede formular el siguiente teorema que proporciona la expresión del estimador $\hat{\overline{F}}_i(t)$.

**Teorema 3.4**

*Dada la muestra observable $(Z_{i,j},\Delta_{i,j})$, con $j = 1,\dots,n_i$, relativa a las variables $X_i$ e $Y_i$, y supuesto que la función de fiabilidad de $X_i$, $\overline{F}_i(t)$, es un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha_i$, el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática de $\overline{F}_i(t)$, a t fijo, en un modelo de riesgo proporcional, notado por $\hat{\overline{F}}_{P,i}(t)$ para indicar que es estimador paramétrico, viene dado por*

$$\hat{\overline{F}}_{P,i}(t) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n_i-u_i(t)} (-1)^j \binom{n_i - u_i(t)}{j} \frac{\Gamma\left(M - \alpha_i(t) + (\beta_i + 1)(n_i-j) + 1\right)}{\Gamma\left(M + (\beta_i + 1)(n_i - j) + 1\right)}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n_i-u_i(t)} (-1)^j \binom{n_i - u_i(t)}{j} \frac{\Gamma\left(M - \alpha_i(t) + (\beta_i + 1)(n_i-j)\right)}{\Gamma\left(M + (\beta_i + 1)(n_i - j)\right)}}$$

*donde* $M = \alpha_i(\mathbb{R}^+)$ *y* $u_i(t) = v_{i,3}(t) + v_{i,4}(t)$.

### 3.2.2. ESTIMACION BAYESIANA DE LOS PARAMETROS DE CENSURA

En este apartado, dado un nivel de stress $V_i$, $i = 0, \dots, k$, se propone una estimación bayesiana del parámetro de censura $\beta_i$, a partir de la información obtenida en la muestra observable $(Z_{i,j},\Delta_{i,j})$, con $j = 1, \dots, n_i$, en el nivel de stress $V_i$, y del conocimiento a priori sobre $\beta_i$ en dicho nivel de stress.

Sabemos que en el modelo de riesgo proporcional se tiene

$$\bar{G}_i(t) = [\bar{F}_i(t)]^{\beta_i}$$

Sea ahora el parámetro $\tau_i = \frac{1}{1+\beta_i}$. Se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.5 (Maté)**

*En las hipótesis del modelo de riesgo proporcional se verifica que, dado un nivel de stress* $V_i$*, si la distribución a priori para* $\tau_i$ *es una beta de parámetros* $a_i$ *y* $b_i$*, la distribución a posteriori de* $\tau_i$*, dada la muestra observada* $(z_{i,j},\delta_{i,j})$*, con* $j = 1,\ldots,n_i$*; es una beta de parámetros* $a_i + N_{i,u}$ *y* $b_i + N_{i,c}$*, donde*

$N_{i,u} = \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{i,j}$ *determina el número de observaciones no censuradas en el nivel de stress* $V_i$ *y*

$N_{i,c} = n_i - N_{i,u}$ *determina el número de observaciones censuradas en el nivel de stress* $V_i$.

Demostración.

Si notamos por $\pi(\tau_i)$ a la función de densidad de la distribución a priori, se tiene que, dado el vector de observaciones muestrales $(z_i,\delta_i)$, la distribución a posteriori tiene por función de densidad

$$\pi\left(\tau_i/_{z_i,\delta_i}\right) = \pi(\tau_i/\delta_i) \propto \pi(\tau_i)\cdot P_{\tau_i}(\delta_i = r_i)$$

ya que $Z_i$ y $\delta_i$ son independientes, y donde

$$P_{\tau_i}(\delta_i = r_i) = P_{\tau_i}\left(\delta_{i,1} = r_{i,1}, \ldots, \delta_{i,n_i} = r_{i,n_i}\right) =$$

$$= \binom{n_i}{\sum_{j=1}^{n_i} r_{i,j}} \prod_{j=1}^{n_i} P_{\tau_i}(\delta_{i,j} = r_{i,j})$$

siendo $r_{i,j} = 0, 1, \ \forall\ j = 1, \ldots, n_i$.

Ahora, podemos observar que

$$P(\delta_{i,j} = 1) = P[X_i \le Y_i] = \int_0^\infty \overline{G}_i(x)dF_i(x) = -\int_0^\infty \overline{G}_i(x)d\overline{F}_i(x) =$$

$$= -\int_0^\infty [\overline{F}_i(x)]^{\beta_i}\, d\overline{F}_i(x) = \frac{1}{\beta_i+1} = \tau_i$$

y

$$P[\delta_{i,j} = 0] = P[X_i > Y_i] = 1 - P[X_i \le Y_i] = 1 - \tau_i.$$

Luego

$$P_{\tau_i}[\delta_{i,j} = r_{i,j}] = \tau_i^{r_{i,j}}(1 - \tau_i)^{1-r_{i,j}}, \text{ con } r_{i,j} = 0, 1,$$

es decir, $\delta_{i,j}$ sigue una distribución de Bernoulli de parámetro $\tau_i$. Por tanto, se tiene que

$$P_{\tau_i}[\delta_i = r_i] = \binom{n_i}{\sum_{j=1}^{n_i} r_{i,j}} \prod_{j=1}^{n_i} P_{\tau_i}(\delta_{i,j} = r_{i,j}) =$$

$$= \binom{n_i}{\sum_{j=1}^{n_i} r_{i,j}} \prod_{j=1}^{n_i} \tau_i^{r_{i,j}} (1 - \tau_i)^{1-r_{i,j}} =$$

$$= \binom{n_i}{\sum_{j=1}^{n_i} r_{i,j}} \tau_i^{\sum_{j=1}^{n_i} r_{i,j}} (1 - \tau_i)^{n_i - \sum_{j=1}^{n_i} r_{i,j}}$$

con $r_{i,j} = 0, 1$.

Luego, $\delta_i/\tau_i$ sigue una distribución binomial de parámetros $n_i$ y $\tau_i$. Como la familia de distribuciones beta es conjugada cuando se muestrea de la binomial, resulta que la distribución a posteriori es una beta de parámetros $a_i + N_{i,u}$ y $b_i + N_{i,c}$, donde

$$N_{i,u} = \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{i,j} \quad \text{y} \quad N_{i,c} = n_i - \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{i,j}. \ \blacksquare$$

Ahora, si utilizamos pérdida cuadrática, el estimador Bayes para $\tau_i$ será la media de la distribución a posteriori, luego

$$\hat{\tau}_i = \frac{a_i + N_{i,u}}{a_i + b_i + n_i}$$

y, por tanto,

$$\hat{\beta}_i = \frac{1}{1 + \hat{\tau}_i} = \frac{a_i + b_i + n_i}{2a_i + b_i + n_i + N_{i,u}}.$$

### 3.2.3. ESTIMACION DE LOS PARAMETROS DE CENSURA POR EL METODO DE LOS MOMENTOS

En este apartado, dado un nivel de stress $V_i$, $i = 0, \ldots, k$, se propone una estimación del parámetro de censura $\beta_i$, a partir de la información obtenida en la muestra observable $(Z_{i,j}, \Delta_{i,j})$, con $j = 1, \ldots, n_i$, en el nivel de stress $V_i$, por el método de los momentos.

Se verifica que la proporción teórica de observaciones censuradas en el nivel de stress $V_i$ es $P(\Delta_{i,j} = 0)$, donde

$$P(\Delta_{i,j} = 0) = P(Y_i < X_i) = p_{i,2}(t) + p_{i,4}(t) = \frac{\beta_i}{\beta_i + 1}.$$

Por otra parte, la frecuencia relativa de las observaciones censuradas, en el nivel de stress $V_i$, es $N_{i,c} / n_i$. Igualando proporción teórica a frecuencia observada se tiene

$$\frac{N_{i,c}}{n_i} = \frac{\beta_i}{\beta_i + 1}$$

de donde el estimador de $\beta_i$ por el método de los momentos será

$$\hat{\beta}_i = \frac{N_{i,c}}{n_i - N_{i,c}} .$$

### 3.2.4. CONSTRUCCION DE UN ESTIMADOR PARA $\theta_i$

Sustituyendo en la expresión del Teorema 3.4 $\beta_i$ por su estimación $\hat{\beta}_i$, resulta que ya podemos estimar el parámetro de escala $\theta_i$ entre el nivel de stress usual $V_0$ y el nivel de stress $V_i$. En efecto, para h = 0, i, se verifica que el estimador bayesiano paramétrico de $\bar{F}_h(t)$ viene dado por

$$\hat{\bar{F}}_{P,h}(t) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n_h-u_h(t)} (-1)^j \binom{n_h - u_h(t)}{j} \frac{\Gamma\left(M - \alpha_h(t) + (\hat{\beta}_h + 1)(n_h - j) + 1\right)}{\Gamma\left(M + (\hat{\beta}_h + 1)(n_h - j) + 1\right)}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n_h-u_h(t)} (-1)^j \binom{n_h - u_h(t)}{j} \frac{\Gamma\left(M - \alpha_h(t) + (\hat{\beta}_h + 1)(n_h - j)\right)}{\Gamma\left(M + (\hat{\beta}_h + 1)(n_h - j)\right)}}$$

donde $M = \alpha_h(\mathbb{R}^+)$ y $u_h(t) = v_{h,3}(t) + v_{h,4}(t)$. Además, se verifica, por el Lema 1.1, que $\alpha_i(t) = \alpha_0(t / \theta_i) = \alpha(t / \theta_i)$, ya que $\alpha_0 \equiv \alpha$.

A continuación, construimos un estimador de $\theta_i$ como un valor de $\theta$ que minimice la distancia de Crámer-von Mises siguiente

$$W^2 = \int_0^\infty \left[ \hat{\bar{F}}_{P,0}(t / \theta) - \hat{\bar{F}}_{P,i}(t) \right]^2 dt.$$

### 3.2.5. CONSTRUCCION DE UN ESTIMADOR PARA $\bar{F}_0$

Para cada $i = 1, \ldots, k$ notemos por $\hat{\theta}_{n_0,n_i}$ al estimador de $\theta_i$ definido en la sección anterior. Con estos estimadores procedemos a rescalar las observaciones $Z_{i,j}$, $j = 1, \ldots, n_i$, por la relación

$$Z^*_{i,j} = \frac{Z_{i,j}}{\hat{\theta}_{n_0,n_i}}$$

con lo cual se dispone de los datos

$$(z^*_{i,j}, \delta_{i,j}), \; i = 0, 1, \ldots, k, \; j = 1, \ldots, n_i$$

siendo $z^*_{0,j} = z_{0,j}$, al ser $\hat{\theta}_{n_0,n_0} = 1$.

Sea

$n = \sum_{i=0}^{k} n_i$ el número total de datos (censurados o no) rescalados

$N_u = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{i,j}$ el número total de datos rescalados no censurados

$N_c = n - N_u$ el número total de datos rescalados censurados

y notemos, para un tiempo fijo t, por

$v^*_1(t)$ al número total de datos rescalados que corresponden a fallos antes de t, en la muestra de tamaño n,

$v^*_2(t)$ al número total de datos rescalados que corresponden a datos censurados antes de t, en la muestra de tamaño n,

$v^*_3(t)$ al número total de datos rescalados que corresponden a fallos después de t, en la muestra de tamaño n,

$v^*_4(t)$ al número total de datos rescalados que corresponden a datos censurados después de t, en la muestra de tamaño n.

Sea $\hat{\beta}$ la estimación del parámetro de censura, bien bayesiana o por el método de los momentos, a partir del número total de datos rescalados.

Entonces, el estimador bayesiano paramétrico de la función de fiabilidad bajo el nivel de stress usual será

$$\hat{\bar{F}}_{P,0}(t) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n-u^{*}(t)} (-1)^{j}\binom{n-u^{*}(t)}{j} \frac{\Gamma\left(M-\alpha(t)+(\hat{\beta}+1)(n-j)+1\right)}{\Gamma\left(M+(\hat{\beta}+1)(n-j)+1\right)}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{n-u^{*}(t)} (-1)^{j}\binom{n-u^{*}(t)}{j} \frac{\Gamma\left(M-\alpha(t)+(\hat{\beta}+1)(n-j)\right)}{\Gamma\left(M+(\hat{\beta}+1)(n-j)\right)}}$$

siendo

$$u^{*}(t) = v_{3}^{*}(t) + v_{4}^{*}(t).$$

# CONCLUSIONES

1) Es viable un estudio de los ensayos de vida acelerados en el contexto bayesiano no paramétrico.

2) Los modelos ALT-BN con función de aceleración lineal tienen la propiedad de que la distribución del tiempo hasta el fallo, así como la de su logaritmo, en un stress $V_i$, viene inducida por un proceso de Dirichlet, cuando la distribución en el stress usual $F_0 \in \mathcal{D}(\alpha)$.

3) Los estimadores de mínima distancia de Crámer-von Mises, para los parámetros de un modelo ALT-BN con función de aceleración lineal, son fuertemente consistentes para estimar dichos parámetros.

4) El estimador Bayes bajo pérdida cuadrática de la función de distribución en el stress usual es fuertemente consistente.

5) Se ha presentado un desarrollo de los contrastes de bondad del ajuste, en un contexto bayesiano no paramétrico, cuando se tienen datos de un ensayo de vida acelerado.

**6)** Se ha desarrollado una axiomática de los modelos ALT-BN con función de aceleración general y se ha demostrado, en el importante resultado original del Teorema 2.10, que si $\beta_V(t) > 0$, $\forall\ V \in \mathcal{V}$, estando garantizada su existencia y tal que se verifica la siguiente relación

$$T_{V_0} = \int_0^{T_V} \beta_V(t)\ dt$$

a $\omega$ fijo; y si $F_{V_0} \in \mathcal{D}(\alpha)$, entonces $F_V \in \mathcal{D}(\alpha_V)$ con

$$\alpha_V\ (u) = \alpha\left(\int_0^u \beta_V(s)\ ds\right),\ \forall\ V \in \mathcal{V}.$$

**7)** Los modelos básicos de ensayos de vida acelerados (regla de la potencia, regla de Arrhenius) se han estudiado bajo la axiomática anterior, y se han construido estimadores para la función de distribución en el stress usual.

**8)** El tratamiento de datos censurados se puede llevar a cabo en un modelo ALT-BN, estimando previamente los parámetros del modelo a través de los estimadores de Kaplan-Meier, y después promediando los k + 1 estimadores de $\overline{F}_0(t)$ definidos, para h = 0, 1, ..., k; por

$$\hat{\overline{F}}_{0,h}(t) = \hat{\overline{F}}_h\left(\hat{\theta}_{n_0,n_h}\ t\right)$$

donde $\hat{\overline{F}}_h(t)$ es el estimador Bayes bajo pérdida cuadrática de Susarla y Van Ryzin para $\overline{F}_h(t)$.

**9)** Los estimadores anteriores tienen la propiedad, demostrada en los resultados originales de los Teoremas 3.2 y 3.3, de ser fuertemente consistentes.

**10)** Bajo un modelo ALT-BN de riesgo o azar proporcional se han obtenido estimadores de los parámetros de dicho modelo. Esto ha permitido construir el estimador bayesiano paramétrico, propuesto por Morales, Pardo y Quesada (1986), de la función de fiabilidad bajo el nivel de stress usual, a t fijo.

# POSIBLES AMPLIACIONES

1) Estudiar modelos ALT-BN con distribuciones inducidas por procesos diferentes a los de Dirichlet, como procesos neutrales a la derecha, gamma exponenciales, homogéneos simples, gamma extendidos y procesos Beta.

2) Analizar los modelos del Capítulo 3 cuando los datos sean doblemente censurados, tomando como referencia el trabajo de Pardo (1987).

3) Estimar, bajo los diferentes niveles de stress, la función de supervivencia o de fiabilidad residual en el instante t, tomando como referencia el artículo de Lahiri and Park (1988).

4) Proponer modelos ALT-BN con estimación Bayes empírica.

5) Extender los modelos ALT-BN desarrollados al caso de sistemas generales: serie, paralelo, puente, k de n, k consecutivos de n, etc. Analizar la componente más importante en un sistema cuando se sometan a ensayos de vida acelerados, dentro de un contexto bayesiano no paramétrico.

# APENDICE A

## PSEUDOCODIGO PARA PROGRAMAR EL MODELO ALT-BN BASICO

**PARTE I: INTRODUCCION DE DATOS NUMERICOS Y DEFINICION DE SUBRUTINAS DE FUNCIONES**

1: LEER VALOR DE M.

2: DEFINICION DE LA FUNCION ALFA (T).

3: DEFINIR VECTOR N DE TAMAÑOS MUESTRALES CON DIMENSION 100.

4: LEER TAMAÑO DE LA MUESTRA PARA EL NIVEL USUAL DE STRESS: N(0).

5: LEER NUMERO DE NIVELES DE STRESS: K.

6: DEFINIR MATRIZ DE DATOS DE TIEMPOS DE FALLOS: T(I,J).

7: PARA I TOMANDO VALORES DESDE 1 A K

- LEER TAMAÑO MUESTRAL PARA EL NIVEL DE STRESS I: N(I).

8: PARA I TOMANDO VALORES DESDE 0 A K

- PARA J TOMANDO VALORES DESDE 1 A N(I)
    - LEER LOS INSTANTES DE FALLO PARA EL NIVEL DE STRESS I: T(I,J).

**PARTE II: DEFINICION DE LA FUNCION ESTIMADORA AUXILIAR BASICA**

9: DEFINICION DE LA SUBRUTINA FUNCION DE DISTRIBUCION EMPIRICA BAJO STRESS USUAL: FN(T).

10: DEFINIR LA FUNCION DE DISTRIBUCION ESTIMADORA DE FERGUSON BAJO STRESS USUAL

$$FNE(T) = \frac{N(0)}{M + N(0)}\ FN(T) + \frac{M}{M + N(0)}\ \frac{ALFA(T)}{M} =$$

$$= \left(N(0)\cdot FN(T) + M\cdot ALFA(T)\right) / \left(M + N(0)\right)$$

**PARTE III: ESTIMACION DE LOS PARAMETROS ZETA (I)**

Nota 1: EL TIEMPO SE CONSIDERA DIVIDIDO EN UNIDADES ELEMENTALES. LA UNIDAD ELEMENTAL H ES EL MAXIMO COMUN DIVISOR DE LOS DIFERENTES TIEMPOS MUESTRALES CONSIDERADOS.

Nota 2: EL PARAMETRO ZETA (I) VARIA, LOGICAMENTE, ENTRE 0 Y 1.

Nota 3: EL ALGORITMO PARA OBTENER EL VALOR OPTIMO DE ZETA (I) ES EL METODO DE OBTENCION DE EXTREMOS DE FIBONACCI.

Nota 4: EL ALGORITMO PARA EVALUAR LA INTEGRAL ES EL DE SIMPSON. EL VALOR H DEL PASO ES LA UNIDAD DE TIEMPO.

11: DEFINIR EL VECTOR ZETA (I) DE PARAMETROS DE ESCALA Y EL VECTOR DE ERRORES DE ESTIMACION E(I).

12: PARA I TOMANDO VALORES DESDE 1 A K

- ERROR EN LA ESTIMACION DE ZETA (I): E(I).
- CALCULAR VALOR DE LA SUCESION BASICA DE FIBONACCI INMEDIATAMENTE SUPERIOR A 1 / E(I).
- DEFINIR LA SUCESION DE FIBONACCI: FIBO (L).
- LIMITAR EL LIMITE SUPERIOR DE LA INTEGRAL AL MAXIMO ENTRE EL DOBLE DEL MAXIMO DE LOS VALORES MUESTRALES OBSERVADOS BAJO EL STRESS USUAL Y EL STRESS I, Y EL VALOR DE T BAJO EL CUAL LA FUNCION ALFA (T) SE HACE INFERIOR A UN VALOR DADO EPSILON, SEA MAX ESTE VALOR.
- IR A SUBRUTINA DE FIBONACCI CON LOS DATOS ANTES CALCULADOS.
    - IR A SUBRUTINA DE SIMPSON CON LOS DATOS

CALCULADOS.

- EVALUAR, PARA EL NIVEL DE STRESS I, LA FUNCION DE DISTRIBUCION ESTIMADORA DE FERGUSON FNE (I,T).
- EVALUAR INTEGRANDO.
- APLICAR FORMULA DE SIMPSON.

• ALMACENAR VALOR ESTIMADO ZETA (I).

**PARTE IV: ESTIMACION FUNCION DE DISTRIBUCION EN STRESS USUAL**

13: RESCALAR DATOS

- PARA I TOMANDO VALORES DESDE 1 A K
  - PARA J TOMANDO VALORES DESDE 1 A N(I)
    - Z(I,J) = T(I,J) / ZETA (I).

14: SUBRUTINA DE REORDENACION DE MENOR A MAYOR DE TODOS LOS DATOS MUESTRALES, RESCALADOS DE MENOR A MAYOR, INCLUYENDO LOS OBTENIDOS BAJO STRESS USUAL.

15: TOTAL DE OBSERVACIONES: NTOTAL

- PARA I TOMANDO VALORES DESDE 0 A K
  - NTOTAL = NTOTAL + N(I).

16: SUBRUTINA DE CONSTRUCCION DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION EMPIRICA DE TODOS LOS DATOS: FNTOTAL (T).

17: ESTIMACION DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION BAJO STRESS USUAL

$$\mathrm{FESTIM(T)} = \frac{M}{M + N}\ \frac{\mathrm{ALFA(T)}}{M} + \frac{N}{M + N}\ \mathrm{FNTOTAL(T)}.$$

18: IMPRESION DE UNA TABLA DE VALORES DE FESTIM(T).

19: FIN.

# APENDICE B

## EJEMPLO DE APLICACION CON EL MODELO ALT-BN BASICO CON DATOS CENSURADOS

McNichols and Padgett (1984), adaptando unos datos de Carfagno and Gibson (1980), presentaron un ejemplo numérico utilizando datos de ensayos de vida acelerados sobre el tiempo de funcionamiento hasta el fallo, en horas, de unos anillos empleados en centrales nucleares.

Tomando como referencia estos datos, los ensayos de vida se realizaron sobre 30 de estos anillos. A la temperatura normal de funcionamiento, $200^0$ F, se ensayaron 10 de estos anillos, y, en cada uno de los dos niveles de temperatura acelerada, $250^0$ F y $275^0$ F, se ensayaron 10 anillos, sabiendo que no actuaban otras variables de stress. El fallo de los anillos se podía atribuir bien a una fractura radial, o a roturas en la circunferencia de los mismos debidas, normalmente, al fallo de un diámetro exterior. Por tanto, existen dos causas de fallo, que se suponen son independientes, y los datos de fallo debidos a roturas en la circunferencia de los anillos actuan como datos censurados aleatoriamente a la derecha, designándose a estos datos por un "+" en la Tabla B-1 donde se muestran todos los datos, censurados o no.

Tabla B-1 Tiempos de Fallo de los Anillos, en Horas

| $200^{0}$ F | $250^{0}$ F | $275^{0}$ F |
|---|---|---|
| 1683.08 | 399.56 | 147.23 |
| 1784.32 | 422.40+ | 147.90 |
| 1683.50+ | 333.07 | 128.87+ |
| 1784.49 | 444.72+ | 147.86 |
| 1862.32+ | 367.80 | 165.13 |
| 1784.84 | 367.49 | 147.20 |
| 1683.16 | 393.55 | 147.16 |
| 1784.70+ | 393.10 | 165.82+ |
| 1683.71+ | 314.63 | 147.89 |
| 1784.23 | 292.88 | 147.79 |

El problema es estimar la distribución del tiempo hasta el fallo para la causa de fallo más habitual, la fractura radial.

**1) ESTIMACION DE LOS PARAMETROS DEL MODELO**

Se verifica que $n_i = 10$, para $i = 0, 1, 2$, y todos los $\delta_{ij} = 1$, excepto $\delta_{03}$, $\delta_{05}$, $\delta_{08}$, $\delta_{09}$, $\delta_{12}$, $\delta_{14}$, $\delta_{23}$ y $\delta_{28}$, que son cero.

El cálculo de las estimaciones de los factores de escala se realiza estimando los parámetros de localización, $\Delta_1$ y $\Delta_2$, de tal forma que

$$\hat{\Delta}_{n_0,n_1} = - 1.5382$$

$$\hat{\Delta}_{n_0,n_2} = - 2.490622$$

con lo cual, se verifica que

$$\hat{\theta}_{n_0,n_1} = \exp\left( \hat{\Delta}_{n_0,n_1} \right) = 0.2147721$$

$$\hat{\theta}_{n_0,n_2} = \exp\left( \hat{\Delta}_{n_0,n_2} \right) = 0.08286.$$

**2) ESTIMACION DE SUSARLA-VAN RYZIN EN EL NIVEL DE STRESS USUAL $V_0 = 200^0$ F**

Al existir datos en $V_0 = 200^0$ F, se puede construir el estimador Bayesiano no Paramétrico de $\bar{F}_0(t)$ supuesto que la distribución bajo la temperatura usual $V_0$ viene inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha(t)$ con una confiabilidad $M = \alpha(\mathbb{R}^+)$, siendo $\alpha(t) = P(T_0 > t)$ la función de fiabilidad a priori.

La estimación resultante de la función de fiabilidad de estos anillos, en el nivel de stress $V_0$, para la causa de fallo más habitual, a partir de los datos recogidos bajo $V_0$, la cual se nota por $\hat{\bar{F}}_{0,0}(u)$, viene dada en la Tabla B-2.

**3) ESTIMACION DE SUSARLA-VAN RYZIN EN EL NIVEL DE STRESS $V_1 = 250^0$ F**

Empleando los datos obtenidos bajo el nivel de temperatura acelerada $V_1 = 250^0$ F, se puede construir el estimador Bayesiano no Paramétrico de $\bar{F}_1(t)$, sabiendo que la distribución bajo $V_1$ viene inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha_1(t)$ con una confiabilidad $M = \alpha_1(\mathbb{R}^+)$, siendo $\alpha_1(t) = \alpha\left(t / \theta_1\right)$

La estimación de la función de fiabilidad de los anillos, en el nivel de stress $V_1$, para el fallo por fractura, mediante los datos recogidos bajo $V_1$, se nota por $\hat{\bar{F}}_1(u)$ y se muestra en la Tabla B-3.

Tabla B-2

| Intervalo | Expresión del estimador $\hat{\bar{F}}_{o,o}(u)$ |
|---|---|
| [0, 1683.08) | $\frac{\alpha(u)+10}{M+10}$ |
| [1683.08, 1683.16) | $\frac{\alpha(u)+9}{M+10}$ |
| [1683.16, 1683.50) | $\frac{\alpha(u)+8}{M+10}$ |
| [1683.50, 1683.71) | $\frac{\alpha(u)+7}{M+10}\cdot\frac{\alpha(1683.5)+8}{\alpha(1683.5)+7}$ |
| [1683.71, 1784.23) | $\frac{\alpha(u)+6}{M+10}\cdot\frac{\alpha(1683.5)+8}{\alpha(1683.5)+7}\cdot\frac{\alpha(1683.71)+7}{\alpha(1683.71)+6}$ |
| [1784.23, 1784.32) | $\frac{\alpha(u)+5}{M+10}\cdot\frac{\alpha(1683.5)+8}{\alpha(1683.5)+7}\cdot\frac{\alpha(1683.71)+7}{\alpha(1683.71)+6}$ |
| [1784.32, 1784.49) | $\frac{\alpha(u)+4}{M+10}\cdot\frac{\alpha(1683.5)+8}{\alpha(1683.5)+7}\cdot\frac{\alpha(1683.71)+7}{\alpha(1683.71)+6}$ |
| [1784.49, 1784.70) | $\frac{\alpha(u)+3}{M+10}\cdot\frac{\alpha(1683.5)+8}{\alpha(1683.5)+7}\cdot\frac{\alpha(1683.71)+7}{\alpha(1683.71)+6}$ |
| [1784.70, 1784.84) | $\frac{\alpha(u)+2}{M+10}\cdot\frac{\alpha(1683.5)+8}{\alpha(1683.5)+7}\cdot\frac{\alpha(1683.71)+7}{\alpha(1683.71)+6}\cdot\frac{\alpha(1784.7)+3}{\alpha(1784.7)+2}$ |
| [1784.84, 1862.32) | $\frac{\alpha(u)+1}{M+10}\cdot\frac{\alpha(1683.5)+8}{\alpha(1683.5)+7}\cdot\frac{\alpha(1683.71)+7}{\alpha(1683.71)+6}\cdot\frac{\alpha(1784.7)+3}{\alpha(1784.7)+2}$ |
| [1862.32, + ∞) | $\frac{\alpha(u)}{M+10}\cdot\frac{\alpha(1683.5)+8}{\alpha(1683.5)+7}\cdot\frac{\alpha(1683.71)+7}{\alpha(1683.71)+6}\cdot\frac{\alpha(1784.7)+3}{\alpha(1784.7)+2}\cdot\frac{\alpha(1862.32)+1}{\alpha(1862.32)}$ |

Tabla B-3

| Intervalo | Expresión del estimador $\hat{\bar{F}}_1(u)$ |
|---|---|
| [0, 292.88) | $\dfrac{\alpha_1(u) + 10}{M + 10}$ |
| [292.88, 314.63) | $\dfrac{\alpha_1(u) + 9}{M + 10}$ |
| [314.63, 333.07) | $\dfrac{\alpha_1(u) + 8}{M + 10}$ |
| [333.07, 367.49) | $\dfrac{\alpha_1(u) + 7}{M + 10}$ |
| [367.49, 367.8) | $\dfrac{\alpha_1(u) + 6}{M + 10}$ |
| [367.8, 393.1) | $\dfrac{\alpha_1(u) + 5}{M + 10}$ |
| [393.1, 393.55) | $\dfrac{\alpha_1(u) + 4}{M + 10}$ |
| [393.55, 399.56) | $\dfrac{\alpha_1(u) + 3}{M + 10}$ |
| [399.56, 422.4) | $\dfrac{\alpha_1(u) + 2}{M + 10}$ |
| [422.4, 444.72) | $\dfrac{\alpha_1(u) + 1}{M + 10} \cdot \dfrac{\alpha_1(422.4) + 2}{\alpha_1(422.4) + 1}$ |
| [444.72, + ∞) | $\dfrac{\alpha_1(u)}{M + 10} \cdot \dfrac{\alpha_1(422.4) + 2}{\alpha_1(422.4) + 1} \cdot \dfrac{\alpha_1(444.72) + 1}{\alpha_1(444.72)}$ |

donde $\alpha_1(u) = \alpha(u / \theta_1)$, y queda perfectamente determinada la expresión del estimador mediante el conocimiento a priori $\alpha(u)$ en $V_0$ y mediante el estimador $\hat{\theta}_{n_0,n_1}$ de $\theta_1$.

**4) ESTIMACION DE SUSARLA-VAN RYZIN EN EL NIVEL DE STRESS $V_2 = 275^0$ F**

Tabla B-4

| Intervalo | Expresión del estimador $\hat{\bar{F}}_2(u)$ |
|---|---|
| [0, 128.87) | $\dfrac{\alpha_2(u) + 10}{M + 10}$ |
| [128.87, 147.16) | $\dfrac{\alpha_2(u) + 9}{M + 10} \cdot \dfrac{\alpha_2(128.87) + 10}{\alpha_2(128.87) + 9}$ |
| [147.16, 147.2) | $\dfrac{\alpha_2(u) + 8}{M + 10} \cdot \dfrac{\alpha_2(128.87) + 10}{\alpha_2(128.87) + 9}$ |
| [147.2, 147.23) | $\dfrac{\alpha_2(u) + 7}{M + 10} \cdot \dfrac{\alpha_2(128.87) + 10}{\alpha_2(128.87) + 9}$ |
| [147.23, 147.79) | $\dfrac{\alpha_2(u) + 6}{M + 10} \cdot \dfrac{\alpha_2(128.87) + 10}{\alpha_2(128.87) + 9}$ |
| [147.79, 147.86) | $\dfrac{\alpha_2(u) + 5}{M + 10} \cdot \dfrac{\alpha_2(128.87) + 10}{\alpha_2(128.87) + 9}$ |
| [147.86, 147.89) | $\dfrac{\alpha_2(u) + 4}{M + 10} \cdot \dfrac{\alpha_2(128.87) + 10}{\alpha_2(128.87) + 9}$ |
| [147.89, 147.9) | $\dfrac{\alpha_2(u) + 3}{M + 10} \cdot \dfrac{\alpha_2(128.87) + 10}{\alpha_2(128.87) + 9}$ |
| [147.9, 165.13) | $\dfrac{\alpha_2(u) + 2}{M + 10} \cdot \dfrac{\alpha_2(128.87) + 10}{\alpha_2(128.87) + 9}$ |
| [165.13, 165.82) | $\dfrac{\alpha_2(u) + 1}{M + 10} \cdot \dfrac{\alpha_2(128.87) + 10}{\alpha_2(128.87) + 9}$ |
| [165.82, + ∞) | $\dfrac{\alpha_2(u)}{M + 10} \cdot \dfrac{\alpha_2(128.87) + 10}{\alpha_2(128.87) + 9} \cdot \dfrac{\alpha_2(165.82) + 1}{\alpha_2(165.82)}$ |

Empleando los datos obtenidos bajo el nivel de temperatura acelerada $V_2 = 275^0$ F, se puede construir el estimador Bayesiano no

Paramétrico de $\bar{F}_2(t)$, sabiendo que la distribución bajo $V_2$ viene inducida por un proceso de Dirichlet de parámetro $\alpha_2(t)$ con una confiabilidad $M = \alpha_2(\mathbb{R}^+)$, siendo $\alpha_2(t) = \alpha\left(t \,/\, \theta_2\right)$

La estimación de la función de fiabilidad de los anillos, en el nivel de stress $V_2$, para el fallo por fractura, mediante los datos recogidos bajo $V_2$, se nota por $\hat{\bar{F}}_2(u)$ y se muestra en la Tabla B-4, donde $\alpha_2(u) = \alpha(u \,/\, \theta_2)$, y queda perfectamente determinada la expresión del estimador mediante el conocimiento a priori $\alpha(u)$ en $V_0$ y mediante el estimador $\hat{\theta}_{n_0,n_2}$ de $\theta_2$.

**5) CONSTRUCCION DEL ESTIMADOR FUERTEMENTE CONSISTENTE PARA $\bar{F}_0(t)$**

Se ha obtenido, en cada nivel de stress $V_h$, con $h = 0, 1, 2$, un estimador consistente de $\bar{F}_h(t)$. Ahora vamos a utilizar cada uno de estos estimadores para obtener un estimador de $\bar{F}_0$. Notemos por $\hat{\bar{F}}_{0,h}(t)$ al estimador de $\bar{F}_0$ obtenido a partir del estimador $\bar{F}_h(t)$ en el punto $\hat{\theta}_{n_0,n_h} t$, luego

$$\hat{\bar{F}}_{0,h}(t) = \hat{\bar{F}}_h\left(\hat{\theta}_{n_0,n_h} t\right)$$

donde, para $h = 0$, se tiene $\hat{\theta}_{n_0,n_0} = 1$ y cada uno de estos estimadores se ha obtenido con $n_h = 10$ observaciones.

Por tanto, hay 3 estimadores para $\bar{F}_0(t)$ y formamos la media aritmética ponderada para definir un nuevo estimador de $\bar{F}_0$, que notamos por $\hat{\bar{F}}_0(t)$. Así, el estimador de $\bar{F}_0$ se define por

$$\hat{\bar{F}}_0(t) = \frac{1}{3}\left[\hat{\bar{F}}_{0,0}(t) + \hat{\bar{F}}_{0,1}(t) + \hat{\bar{F}}_{0,2}(t)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\,\hat{\bar{F}}_{0,0}(t) + \hat{\bar{F}}_{1}(0.2147721\cdot t) + \hat{\bar{F}}_{2}(0.08286\cdot t)\right],$$

donde la expresión de $\hat{\bar{F}}_{0,h}(t)$, para h = 1, 2, viene recogida en las Tablas B-5 y B-6, y $\hat{\bar{F}}_{0,0}(t)$ ya se obtuvo en la Tabla B-2.

Tabla B-5

| Intervalo | Expresión del estimador $\hat{\bar{F}}_{0,1}(t)$ |
|---|---|
| [0, 1363.68) | $\dfrac{\alpha(u/0.2147721) + 10}{M + 10}$ |
| [1363.68, 1464.95) | $\dfrac{\alpha(u/0.2147721) + 9}{M + 10}$ |
| [1464.95, 1550.81) | $\dfrac{\alpha(u/0.2147721) + 8}{M + 10}$ |
| [1550.81, 1711.07) | $\dfrac{\alpha(u/0.2147721) + 7}{M + 10}$ |
| [1711.07, 1712.51) | $\dfrac{\alpha(u/0.2147721) + 6}{M + 10}$ |
| [1712.51, 1830.31) | $\dfrac{\alpha(u/0.2147721) + 5}{M + 10}$ |
| [1830.31, 1832.41) | $\dfrac{\alpha(u/0.2147721) + 4}{M + 10}$ |
| [1832.41, 1832.45) | $\dfrac{\alpha(u/0.2147721) + 3}{M + 10}$ |
| [1832.45, 1966.74) | $\dfrac{\alpha(u/0.2147721) + 2}{M + 10}$ |
| [1966.74, 2070.66) | $\dfrac{\alpha(u/0.2147721) + 1}{M + 10}\cdot\dfrac{\alpha(1966.74) + 2}{\alpha(1966.74) + 1}$ |
| [2070.66, + ∞) | $\dfrac{\alpha(u/0.2147721)}{M + 10}\cdot\dfrac{\alpha(1966.74) + 2}{\alpha(1966.74) + 1}\cdot\dfrac{\alpha(2070.66) + 1}{\alpha(2070.66)}$ |

Tabla B-6

| Intervalo | Expresión del estimador $\hat{\bar{F}}_{0,2}(t)$ |
|---|---|
| [0, 1555.27) | $\dfrac{\alpha(u/0.08286)+10}{M+10}$ |
| [1555.27, 1776.01) | $\dfrac{\alpha(u/0.08286)+9}{M+10}\cdot\dfrac{\alpha(1555.27)+10}{\alpha(1555.27)+9}$ |
| [1776.01, 1776.49) | $\dfrac{\alpha(u/0.08286)+8}{M+10}\cdot\dfrac{\alpha(1555.27)+10}{\alpha(1555.27)+9}$ |
| [1776.49, 1776.85) | $\dfrac{\alpha(u/0.08286)+7}{M+10}\cdot\dfrac{\alpha(1555.27)+10}{\alpha(1555.27)+9}$ |
| [1776.85, 1783.61) | $\dfrac{\alpha(u/0.08286)+6}{M+10}\cdot\dfrac{\alpha(1555.27)+10}{\alpha(1555.27)+9}$ |
| [1783.61, 1784.46) | $\dfrac{\alpha(u/0.08286)+5}{M+10}\cdot\dfrac{\alpha(1555.27)+10}{\alpha(1555.27)+9}$ |
| [1784.46, 1784.82) | $\dfrac{\alpha(u/0.08286)+4}{M+10}\cdot\dfrac{\alpha(1555.27)+10}{\alpha(1555.27)+9}$ |
| [1784.82, 1784.94) | $\dfrac{\alpha(u/0.08286)+3}{M+10}\cdot\dfrac{\alpha(1555.27)+10}{\alpha(1555.27)+9}$ |
| [1784.94, 1992.88) | $\dfrac{\alpha(u/0.08286)+2}{M+10}\cdot\dfrac{\alpha(1555.27)+10}{\alpha(1555.27)+9}$ |
| [1992.88, 2001.21) | $\dfrac{\alpha(u/0.08286)+1}{M+10}\cdot\dfrac{\alpha(1555.27)+10}{\alpha(1555.27)+9}$ |
| [2001.21, + ∞) | $\dfrac{\alpha(u/0.08286)}{M+10}\cdot\dfrac{\alpha(1555.27)+10}{\alpha(1555.27)+9}\cdot\dfrac{\alpha(2001.21)+1}{\alpha(2001.21)}$ |

# BIBLIOGRAFIA

[1] Bain, L. J. (1978). *Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models: Theory and Methods.* Dekker, New York.

[2] Barlow, R. E., and Scheuer, E. M. (1971), "Estimation from Accelerated Life Tests", *Technometrics*, 13, 145-149.

[3] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing - Probability Models*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

[4] Barlow, R. E., Toland, R. H., and Freeman, T. (1979). "Stress - Rupture Life of Kevlar / Epoxy Spherical Pressure Vessels", Technical Report UCID - 17755, Part 3, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, California.

[5] Basu, A. P., and Ebrahimi, N. (1982). "Nonparametric Accelerated Life Testing", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-31, No. 5, 432-435.

[6] Carfagno, S. P., and Gibson, R. J. (1980). *A Review of Equipment Aging Theory and Technology*, NP-1558, Research Project 890 - 1, Franklin Research Center, Philadelphia, Pa.

[7] Christensen, R., and Johnson, W. (1988). "Modelling Accelerated Failure Time with a Dirichlet Process", *Biometrika*, **75**, 4, 693 - 704.

[8] Christensen, R., and Johnson, W. (1989). "Nonparametric Bayesian Analysis of the Accelerated Failure Time Model", *Statistics and Probability Letters*, 8, 179 - 184.

[9] Doksum, K. (1974). "Tailfree and Neutral Random Probabilities and Their Posterior Distributions", *The Annals of Probability*, Vol. 2, Nro. 2, págs. 183-201.

[10] Doob, J. L. (1953). *Stochastic Processes*. John Wiley. New York.

[11] Drossos, C. A., and Philippou, A. N. (1980). "A Note on Minimum Distance Estimates", *Ann. Inst. Statist. Math.* **32** A, 121 - 123.

[12] Elandt-Johnson, R.C., and Johnson, N. L. (1980). *Survival Models and Data Analysis*, Wiley, New York.

[13] Feller, W. (1966). *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. Vol 2, John Wiley, New York.

[14] Ferguson, T. S. and Klass, M. J. (1972). "A Representation of Independent Increment Processes without Gaussian Components", *Ann. Math. Statist.*, 43, 1634 - 1643.

[15] Ferguson, T. S. (1973). "A Bayesian Analysis of Some Nonparametric Problems", *The Annals of Statistics*, Vol. 1, Nro. 2, págs. 209-230.

[16] García, A. (1982). *Problemas de Decisión No Paramétrica: Aproximación Lineal*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense, Madrid.

[17] García, A., y Quesada, V. (1985). "Nonparametric Bayesian Estimation and Goodness of Fit", *Qüestió*, V. 9, n° 2, 77 - 87.

[18] Kalbfleisch, J. D. (1978). "Nonparametric Bayesian Analysis of Survival Time Data", *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **40**, 214 - 221.

[19] Kaplan, E. L., and Meier, P. (1958). "Nonparametric Estimation from Incomplete Observations", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **53**, 457 - 481.

[20] Lahiri, P., and Park, D. H. (1988). "Nonparametric Bayes and Empirical Bayes Estimation of the Residual Survival Function at Age t", *Communication in Statistics - Theory and Methods*, 17 (12), 4085 - 4098.

[21] Mann, N. R., Schafer, R. E., and Singpurwalla, N. D. (1974). *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, John Wiley.

[22] Martz, H. F., and Waller, R. A. (1982). *Bayesian Reliability Analysis*, John Wiley.

[23] McNichols, D. T., and Padgett, W. J. (1984). "Nonparametric Estimation from Accelerated Life Tests with Random Censorship", in *Reliability Theory and Models. Stochastic Failure Models, Optimal Maintenace Policies, Life Testing, and Structures*, Mohamed Abdelhameed, E. Çinlar, and J. Quinn, Eds., Orlando: Academic Press, 155-167.

[24] Morales, D., Pardo, L., y Quesada, V. (1985). "Método de Estimación Bayesiana de Funciones de Supervivencia con Datos Censurados", *Estadística Española*, Núm. 109. 5 - 13.

[25] Morales, D., Pardo, L., y Quesada, V. (1986). "Estimación Paramétrica Bayesiana No Paramétrica de Funciones de Supervivencias con Observaciones Parcialmente Censuradas", *Trabajos de Estadística*, Vol. 1, Num. 1, 70 - 87.

[26] Nelson, W. B. (1972). "Graphical Analysis of Accelerated Life Test Data with Inverse Power Law Model", IEEE Transactions on Reliability, R - 21, 2 - 11; correction, R - 21, 195.

[27] Nelson, W. B. (1982). *Applied Life Data Analysis*. John Wiley. New York.

[28] Nelson, W. B. (1991). *Accelerated Testing, Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis*. John Wiley. New York.

[29] Padgett, W. J., and Wei, L. J. (1982). "Estimation of the Ratio of Scale Parameters in the Two Sample Problem with Arbritary Censorship", *Biometrika*, Vol. 69, 252-256.

[30] Padgett, W. J. (1984). "Inference from Accelerated Life Tests", in *Reliability Theory and Models. Stochastic Failure Models, Optimal Maintenace Policies, Life Testing, and Structures*, Mohamed Abdelhameed, E. Çinlar, and J. Quinn, Eds., Orlando: Academic Press, 177 - 198.

[31] Pardo, L. (1987). *Estimación de la Función de Supervivencia con Datos Doblemente Censurados desde un Punto de Vista Bayesiano No Paramétrico*. Trabajo Original de Investigación.

[32] Raiffa, H., and Schlaifer, R. (1961). *Applied Statistical Decision Theory*. MIT Press, Cambridge.

[32] Royden, H. L. (1968). *Real Analysis*. Second Edition. Collier Macmillan, London.

[33] Schäbe, H., and Viertl, R. (1991). "An Axiomatic Approach to Accelerated Life Testing". Comunicación privada.

[34] Shaked, M. (1978). "Accelerated Life Testing for a Class of Linear Hazard Rate Type Distributions", *Technometrics*, 20, 457 - 466.

[35] Shaked, M., Zimmer, W. J., and Ball, C. A. (1979). "A Nonparametric Approach to Accelerated Life Testing", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. **74**, No. 367, 694-699.

[36] Shaked, M., and Singpurwalla, N. D. (1982). "Nonparametric Estimation and Goodness of Fit Testing of Hypotheses for Distributions in Accelerated Life Testing", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R - 31, No. 1, 69 - 74.

[37] Steck, G. P., Zimmer, W. J., and Williams, R. E. (1974). "Estimation of Parameters in Accelerated Models", *Proc. 1974 Annual Reliability and Maintainability Symposium*, IEEE, Piscataway, N. J., 428 - 431.

[38] Susarla, V., and Van Ryzin, J. (1976). "Nonparametric Bayesian Estimation of Survival Curves from Incomplete Observations", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 71, No. 356, 897 - 902.

[39] Tsokos, C. P., and Shimi, I. N., Eds. (1977). *The Theory and Application of Reliability with Emphasis on Bayesian and Nonparametric Methods*, Vol. I - *Theory*, Vol. II - *Application*,

Academic, New York.

[40] Viertl, R. (1980). "Acceleration Functions in Reliability Theory", *Methods of Operations Research*, **36**, 321 - 326.

[41] Viertl, R. (1983). "Nonlinear Acceleration Functions in Life Testing", *Methods of Operations Research*, **47**, 115-122.

[42] Viertl, R. (1988). *Statistical Methods in Accelerated Life Testing*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

[43] Wilks, S. (1962). *Mathematical Statistics*. John Wiley.