

Aproximación al conocimiento especializado del maestro de Educación Infantil sobre la longitud y su medida en un contexto colaborativo de desarrollo profesional

Mónica Ramírez-García ^{a,b}

Juan M. Belmonte ^b

Noemí Pizarro ^c

Nuria Joglar-Prieto ^b

^a Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle, Área de Educación, Madrid, España

^b Universidad Complutense de Madrid, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas, Madrid, España

^c Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Departamento de Matemática, Santiago de Chile, Chile.

Recibido para su publicación 2 dic. 2020. Aceptado tras revisión 26 jul. 2021.

Editora designada: M. Mar Liñán García

RESUMEN

Antecedentes: para enseñar matemáticas en Educación Infantil consideramos que se necesita un conocimiento sólido y riguroso. Investigadores en Educación Matemática hacen un llamamiento a la caracterización de este conocimiento especializado. **Objetivos:** avanzar en la caracterización del conocimiento que el maestro de Infantil necesita para diseñar e implementar actividades sobre longitud y su medida. **Diseño:** considerando el modelo analítico *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* y partiendo de una revisión de la literatura sobre enseñanza de medida longitud en Educación Infantil, nos aproximamos, utilizando una metodología cualitativa e interpretativa, al conocimiento especializado del maestro de Educación Infantil desde dos ángulos: el conocimiento que formadores-investigadores consideran que el maestro necesita movilizar para diseñar la actividad, y el conocimiento movilizado por maestras cuando reflexionan sobre esa actividad. **Contexto y participantes:** la investigación tuvo lugar en 2019 en un contexto de desarrollo profesional colaborativo en el que participaron 4 formadores y 2 maestras. **Recolección de datos y análisis:** Las sesiones colaborativas fueron grabadas en vídeo. Todos los análisis fueron triangulados por los autores del trabajo. **Resultados:** los formadores dan importancia al conocimiento matemático de los contenidos y a teorías de enseñanza-aprendizaje. Las reflexiones de las maestras siempre parten de las características y acciones de los estudiantes, incluyendo aspectos emocionales. **Conclusiones:** el trabajo conjunto enriquece a ambos grupos y permite una caracterización del conocimiento

Corresponding author: Nuria Joglar Prieto. Email: njoglar@ucm.es

entretejiendo lo teórico y formal con lo intuitivo y empírico, lo cual redundará en la formación inicial del profesorado de infantil.

Keywords: Desarrollo profesional; Educación Matemática; Educación Infantil; Medida de longitud, Construcción de magnitudes.

Abordagem ao conhecimento especializado do professor de educação infantil sobre comprimento e sua medição em um contexto colaborativo de desenvolvimento profissional

RESUMO

Antecedentes: para ensinar matemática na Educação Infantil é necessário um conhecimento sólido e rigoroso. Pesquisadores em Educação Matemática clamam pela caracterização desse conhecimento especializado. **Objetivos:** avançar na caracterização dos conhecimentos de que o professor infantil necessita para conceber e implementar atividades sobre comprimento e sua medição. **Desenho:** considerando o modelo analítico do *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* e a partir de uma revisão da literatura sobre o ensino da medição de comprimentos na Educação Infantil, abordamos, por meio de uma metodologia qualitativa e interpretativa, o conhecimento especializado desse profissional sob dois ângulos: o conhecimento que os instrutores-pesquisadores consideram que o professor necessita de se mobilizar para conceber a atividade e os saberes mobilizados pelos professores quando refletem sobre essa atividade. **Contexto e participantes:** a pesquisa ocorreu em 2019 em um contexto de desenvolvimento profissional colaborativo no qual participaram 4 formadores e 2 professores. **Coleta e análise de dados:** as sessões colaborativas foram gravadas em vídeo. Todas as análises foram trianguladas pelos autores do trabalho. **Resultados:** os formadores dão importância ao conhecimento matemático dos conteúdos e às teorias de ensino-aprendizagem. As reflexões dos professores partem sempre das características e ações dos alunos, incluindo aspectos emocionais. **Conclusões:** o trabalho conjunto enriquece os dois grupos e permite uma caracterização dos saberes entrelaçando o teórico e formal com o intuitivo e empírico, o que resultará na formação inicial de professores de educação infantil.

Keywords: Desenvolvimento Profissional; Educação Matemática; Educação Infantil; Medida de Comprimento, Construção de magnitude.

INTRODUCCIÓN

Para enseñar matemáticas en Educación Infantil facilitando un aprendizaje reflexivo en un entorno lúdico y funcional, se necesita un

conocimiento sólido y riguroso sobre las bases de la propia disciplina (Ma, 1999). Solo los profesores con un conocimiento profundo de las matemáticas que enseñan serán capaces de afrontar con éxito este reto (Ball & Bass, 2000). Sin embargo, durante su formación inicial no se suele exigir una formación amplia y específica en matemáticas a estos profesionales (Oppermann *et al.*, 2016; Alsina, 2020; Nolla *et al.*, 2021), y, desde el punto de vista de la investigación, la atención a la etapa de Educación Infantil es relativamente reciente y escasa. Lo último se evidencia en la revisión realizada por Parks y Wager (2015) de artículos publicados en las dos décadas anteriores en las cuatro revistas más relevantes sobre esta etapa (*Early Childhood Research Quarterly*, *The Journal of Early Childhood Teacher Education*, *the Journal of Research in Mathematics Education* y *The Journal of Mathematics Teacher Education*). Estos autores constatan que estas revistas dan poca atención a la investigación sobre la formación matemática del profesorado de infantil y, que las dos revistas específicas de matemáticas dedican mínima atención a la Educación Infantil.

Ya Shulman (1986) planteó la necesidad de considerar la especificidad del contenido que se está enseñando. Para ello introdujo la distinción entre el conocimiento de la materia y su conocimiento didáctico, entendiendo este último diferente del conocimiento pedagógico general. En el caso de las matemáticas, Ball *et al.* (2008) construyeron el modelo MKT (*Mathematical Knowledge for Teaching*) para caracterizar el conocimiento especializado que necesita un profesor para enseñarlas. Esto no quiere decir que aspectos del conocimiento pedagógico general del profesor no jueguen un papel también relevante en su práctica, ligados, además, de formas muy concretas con los especializados sobre todo en la etapa de Educación Infantil.

En esta propuesta, asumimos la conceptualización del conocimiento del profesor presente en el modelo analítico *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo *et al.*, 2018), pues esta se ha mostrado adecuada en varias investigaciones recientes con el objetivo de comprender y analizar el conocimiento especializado del maestro de Educación Infantil sobre diferentes temas matemáticos, tanto desde un enfoque teórico como desde el análisis de su práctica (Muñoz-Catalán *et al.*, 2017; Muñoz-Catalán *et al.*, 2019; Muñoz-Catalán *et al.*, en prensa b).

Habitualmente el maestro de Educación Infantil prescinde del aparataje simbólico y formal propio de los contenidos matemáticos de etapas posteriores. El conocimiento especializado de la materia (*Mathematical Knowledge*, MK) debe incluir elementos de la esencia matemática de los contenidos que trabaja,

sus rasgos fundamentales y el papel que juegan sobre la construcción del propio concepto matemático. Sin embargo, en algunos casos, las categorías existentes dentro del modelo MTSK parecen limitadas según su definición actual para identificar y expresar aspectos específicos del conocimiento del maestro de infantil. Esta limitación parece más recurrente en los subdominios del MK que en los del Conocimiento Pedagógico del Contenido (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK) (Muñoz-Catalán *et al.*, en prensa b), por lo que hemos decidido en este capítulo partir de nuestra reflexión acerca de los primeros.

Parece asumible considerar que el contenido matemático que un profesor conoce y cómo lo conoce está muy condicionado, por un lado, por la etapa educativa en la que trabaja y el modo en que lo aborda en clase, y, por otro, por cómo ha accedido a ese conocimiento tanto en su formación inicial como a través de actividades de desarrollo profesional. Es decir, la experiencia profesional y la formación son las dos vías fundamentales a través de las cuales va construyendo su conocimiento profesional, en particular, el especializado necesario para enseñar matemáticas.

La simple observación de la práctica puede no evidenciar los aspectos específicos mencionados del conocimiento del maestro en Educación Infantil. Por esto en este trabajo se ha optado por una colaboración entre investigadores-formadores de profesorado y maestras, en la que los primeros diseñan y llevan a las aulas de las segundas una actividad para ser analizada en conjunto inmediatamente después.

El objetivo de este trabajo es avanzar en la caracterización del conocimiento especializado que los maestros de Infantil necesitan movilizar para diseñar y llevar al aula actividades de introducción a la longitud y su medida.

En concreto los investigadores diseñan e implementan en las aulas de dos maestras (un grupo de alumnos de 4 años y otro de alumnos de 5 años) una actividad para introducir la longitud y su medida en la etapa. Así se desarrollarán dos análisis complementarios del conocimiento especializado del maestro cuando enseña matemáticas en la etapa de Educación Infantil.

Por un lado, y desde una aproximación teórica, se identifican e interpretan elementos del conocimiento especializado del maestro que los investigadores piensan que es necesario movilizar para diseñar y llevar al aula la actividad. El punto de partida de esta aproximación ha sido la revisión de la literatura sobre la enseñanza de la medida de magnitud, y en particular la

longitud, en la etapa de infantil, para buscar elementos comunes y diferenciadores según los distintos autores.

Por otro lado, y desde una aproximación práctica, se identifican e interpretan los elementos del conocimiento especializado que las maestras ponen en juego, al analizar en una sesión de reflexión conjunta, episodios sobre la puesta en práctica de la actividad en dos grupos de alumnos de 4 y 5 años. La colaboración entre maestras e investigadores-formadores del profesorado es un camino para el desarrollo profesional de ambos grupos y en particular para el desarrollo de la investigación centrada en un conocimiento especializado para enseñar evidenciado en la práctica, entendiendo la práctica docente como un ciclo continuo de planificación, instrucción y reflexión (Baumfield & Butterworth, 2007).

ANTECEDENTES Y FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Por la naturaleza de esta investigación, los fundamentos teóricos se articulan en torno a dos pilares: el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas y los estudios sobre enseñanza de la medida de longitud.

Conocimiento Especializado Del Profesor De Matemáticas

Desde hace unos años, la investigación sobre la práctica docente ha ido en aumento, dado que el proceso de enseñanza se ha entendido como un escenario complejo, incierto y cambiante, donde se producen interacciones interesantes para observar, relacionar, contrastar, cuestionar y reformular (Gergen, 2001), con el objetivo de comprender cómo se desarrollan los procesos de enseñanza y cómo podrían mejorarse. Estas investigaciones han posicionado al profesorado como el factor interno más importante en el aprendizaje (Hargreaves & Fullan, 2014).

La mayoría de los modelos de conocimiento del profesor parten del trabajo de Shulman (1986), quien planteó la necesidad de considerar la especificidad del contenido que se está enseñando, enfocando el conocimiento necesario para enseñar a través de la visión de la propia disciplina. Este autor introdujo la distinción entre Conocimiento de la Materia (*Subject Matter Knowledge, SMK*) y Conocimiento Pedagógico del Contenido (*Pedagogical Content Knowledge, PCK*), entendiendo el PCK como una categoría diferente del Conocimiento Pedagógico General (*General Pedagogical Knowledge*,

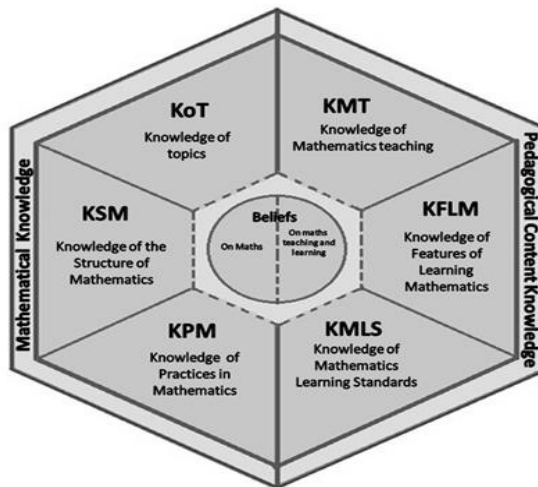
GPK). Este último engloba principios generales de la organización y la gestión del aula, o conocimiento de teorías generales de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, gracias al PCK, el profesor puede comprender lo que facilita o dificulta el aprendizaje de un contenido concreto, o cómo un tema particular, un problema o una cuestión se puede organizar, representar y adaptar a la diversidad de intereses y competencias de los estudiantes al presentarlo en el aula. Se trata pues de pensar en el PCK como el conocimiento que el profesor necesita *para* enseñar la materia concreta y de verlo entrelazado con el conocimiento propiamente de la materia (SMK) que necesita también el profesor.

Consideramos, al igual que Ball *et al.*, (2008), que el conocimiento que necesita un profesor para enseñar matemáticas es especializado, pues supone un modo de conocer las matemáticas que es específico del profesor, y que debe enraizarse en la propia matemática, dado que la naturaleza abstracta de los contenidos repercute necesariamente en su aprendizaje y enseñanza. Sin embargo, para nosotros esto no significa que algunos elementos de este conocimiento no puedan ser compartidos con otros profesionales (por ejemplo, con matemáticos que no se dedican a la enseñanza), sino que el conjunto de esos elementos es el que se considera especializado (Scheiner *et al.*, 2017). Esta, junto a la existencia de subdominios que se solapan o la adopción de un enfoque evaluativo del conocimiento del profesor, han resultado ser algunas de las limitaciones del modelo de Ball *et al.* (2008) como muestran en Carrillo *et al.* (2018). Por lo tanto, adoptamos en la propuesta aquí presentada la conceptualización del conocimiento del profesor presente en el modelo analítico *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK)* (Carrillo *et al.*, 2018), entendiendo conocimiento como aquel que el profesor necesita y utiliza, el que tiene a su disposición (Schoenfeld, 2000) y, por tanto, sustenta sus acciones. Este modelo se ha mostrado útil para comprender el conocimiento especializado que el maestro de Educación Infantil moviliza para enseñar matemáticas (Muñoz-Catalán *et al.*, 2019; Muñoz-Catalán *et al.*, 2017; Muñoz-Catalán *et al.*, en prensa b).

El modelo MTSK distingue 6 subdominios de conocimiento y está organizado, siguiendo a Shulman (1986), entre dominio matemático (*MK*, en nuestro caso) y dominio del Conocimiento Pedagógico del Contenido (*PCK*, en nuestro caso). También incluye el dominio de las creencias y concepciones como elemento que permea todo el conocimiento (el cual no va a ser objeto de estudio en este trabajo) (figura 1).

Figura 1

Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2018).



Dentro del dominio matemático se distinguen tres subdominios: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) y Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM). A su vez, se consideran tres subdominios dentro del PCK: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características de Aprendizaje de los alumnos (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje (KMLS). Cada uno de los subdominios está organizado en categorías o indicadores, a las que haremos referencia en el análisis posterior (Carrillo *et al.*, 2018)

Así, el MTSK es el modelo de análisis que nos permite ubicar aspectos del conocimiento especializado deseable para enseñar el concepto de longitud y su medida en Educación Infantil desde dos ángulos. Por un lado, las características del conocimiento especializado del maestro que los investigadores consideran óptimo, a partir de sus sensibilidades teóricas, para el diseño de actividades que propicien la necesidad de medir. Por otro, el conocimiento movilizado por dos maestras, con más de 25 años de experiencia, cuando analizan una actividad de introducción a la medida de longitud,

diseñada e implementada en un aula de Educación Infantil por formadores-investigadores en sus aulas con alumnos de 4 y 5 años.

Enseñanza de la medida de longitud

A continuación, se incluye la información más relevante sobre el segundo pilar teórico de nuestro trabajo: la magnitud longitud en Educación Infantil.

No son abundantes los estudios que se han centrado en la especificidad de la enseñanza de las matemáticas en la Educación Infantil, mucho menos en magnitudes y su medida (Alsina, 2006; Belmonte, 2005; Clements, 2010). Ni siquiera existe un consenso sobre los contenidos matemáticos que han de aprender los maestros de esta etapa (Alsina, 2020; Nolla *et al.*, 2021). Además, las propuestas curriculares presentan en muchas ocasiones un vocabulario flotante que pone de manifiesto la confusión entre los distintos aspectos que intervienen en la medida.

La enseñanza de las magnitudes y su medida está incluida en el currículo de la educación elemental, sin embargo, las propuestas concretas en Educación Infantil han sido generalmente débiles, a pesar de su relevancia social y la necesidad de establecer buenos cimientos para las etapas educativas posteriores.

No tiene sentido abordar la enseñanza de la medida sin conocer qué características de los objetos y fenómenos son medibles. Para ello, es necesario asegurar el contacto de los niños con contextos que les provoquen el descubrimiento de las magnitudes, para poder comparar objetos y fenómenos por su cantidad de magnitud y apropiarse de referencias de las unidades de medida, entre otros (Buys & Veltman, 2005; Fernández & Mantecón, 2018).

La longitud es usualmente la primera magnitud en ser enseñada porque es una de las cualidades más elementales y tangible de los objetos. Además, se construye paralelamente con el número natural, porque se complementan en su comprensión (Clements & Stephan, 2004). De esta forma, en los primeros años la longitud se trata como una medida discreta, a pesar de ser continua. Para operar se puede recurrir a actividades de ensamblado.

Sobre la construcción de la longitud y su medida en Educación Infantil, diversos autores han dado directrices centradas en sus ideas principales, tanto generales como particularizadas a la longitud, que recogemos en la siguiente tabla.

Tabla 1

Conceptos asociados a la construcción de la longitud y su medida.

Autores	Año	Conceptos asociados a la construcción de las magnitudes y su medida	Conceptos asociados a la construcción de la longitud y su medida
Fernández y Mantecón	2018	Comparación directa, comparación indirecta, principios de conservación y transitividad.	Identificar, definir o reconocer; relacionar y operar.
Copley	2017	Transitividad, iteración y partición equitativa, conservación, origen. Se hace énfasis en la precisión del lenguaje.	
Arteaga y Macías	2016	Comparación perceptiva, desplazamiento del objeto, operatividad de la propiedad transitiva. Etapas: Estimación sensorial, comparación directa, comparación indirecta, elección de la unidad, sistema de medidas irregulares, sistema de medidas regulares, sistema métrico decimal.	Comparación directa, comparación indirecta, elección de una unidad, sistema de medida irregular, sistema de medida regular.
Lupiañez y Castro	2016	Selección de objeto y atributo, elección de unidad apropiada, comparar el objeto con la unidad de medida, expresar el número de unidades y el nombre de la unidad.	

Clements y Sarama	2014		Comprensión del atributo, conservación, transitividad, equipartición, la unidad de medida y la repetición de unidades, acumulación, origen y relación entre número y la unidad de medida.
Van den Heuvel- Panhuizen y Elia	2011		Comparación cualitativa, ordenación, asignación de valor numérico, uso de instrumentos.
Buyts y Veltman	2008	Comparación y ordenación, medición con unidades naturales y estandarizadas, uso de instrumentos de medida.	Comparación y ordenación, medición con unidades naturales y estandarizadas, uso de instrumentos de medida.
Belmonte	2005	Consideración y percepción de una magnitud, conservación de la magnitud, ordenación respecto a la magnitud, correspondencia de números a cantidades de magnitud. Comparación perceptiva, desplazamiento del objeto, operatividad de la propiedad transitiva. Unidad objetual, unidad situacional, unidad figural.	Conservación de la distancia, simetría de la distancia, desigualdad de la distancia. Adquisición de vocabulario propio de la longitud, disposición de objetos variados para el trabajo de la longitud en clasificación, comparación, composición, ordenación, etc.

De acuerdo con la tabla anterior, se observan ideas comunes entre varios autores sobre la enseñanza de la longitud y su medida, que se detallan a continuación y que son nuestro punto de apoyo para caracterizar contenidos específicos del subdominio del KoT:

- Conservación de la magnitud: ante determinadas transformaciones, se debe identificar qué cambios en el objeto dejan invariante la propiedad característica de la longitud.
- Comparación directa: no se recurre a ninguna medida común ni desplazamiento. El quehacer infantil usa de manera natural el ordenamiento de objetos, lo que es intrínseco a la noción de magnitud.
- Comparación indirecta: aquí emerge la transitividad. Se pueden construir razonamientos como: “si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$ ”. Donde el elemento b es el intermediario en la comparación. Naturalmente esta etapa está ligada a la conservación de las cantidades, ya que éstas se desplazan y sin su conservación no tiene sentido el razonamiento.
- Uso de patrones: en un primer momento este intermediario es más grande que los objetos a comparar, para pasar después a servirse de un patrón más pequeño, convenciéndose de que la precisión será mayor.

Aunque no forma parte del propio proceso, para Belmonte (2005) es al final del mismo cuando se desarrolla la noción de unidad, de acuerdo a los siguientes conceptos matemáticos:

- Correspondencia de cantidades de magnitud a números: esta correspondencia hace que no sólo sepamos que una cantidad de magnitud es mayor que otra, sino que también cuánto es mayor.
- Unidad objetual: la unidad está asociada a un único objeto, con relación incluso con el objeto que se quiere medir. Por ejemplo, en el caso de la longitud es normal que use como unidad algunas partes constitutivas del objeto a medir.
- Unidad figural: la unidad va perdiendo la relación con los objetos a medir, aunque todavía se asocian a figuras concretas. La unidad sigue identificándose con alguna forma determinada.
- Unidad: Cuando la unidad se libera totalmente de la figura, tamaño y objeto a medir se consigue la construcción de la verdadera noción de unidad. Es importante destacar que la unidad es una cantidad de magnitud particular, pero no una figura concreta.

METODOLOGÍA

El diseño y el desarrollo de esta investigación se ha realizado en el seno de un seminario de formación permanente, *ARANMATINF*, en el que colaboran maestras de Educación Infantil y formadores-investigadores. En general, el formato de los seminarios consiste en que las maestras plantean problemáticas matemáticas acontecidas en el aula y los formadores-investigadores proponen ideas generales y recursos para que, en conjunto, el grupo diseñe una actividad concreta que aborde la problemática planteada. Posteriormente, cada maestra, o alguno de los formadores, lleva al aula una versión, adaptada a sus contextos y realidades, de la actividad. Las sesiones son analizadas conjuntamente en sesiones inmediatamente posteriores en un seminario, sirviendo estos análisis como un punto de partida para nuevas problemáticas, comenzando un nuevo ciclo (Baumfield & Butterworth, 2007). Las sesiones del grupo *ARANMATINF* son recogidas en vídeo. Los investigadores-formadores pueden ver las grabaciones tantas veces como consideren necesario para analizar con detalle y desde diferentes perspectivas, como microanálisis o análisis profundos, los eventos puntuales que ocurren en las sesiones de reflexión conjunta (Erickson, 2006; Roschelle, 2000).

Por la naturaleza del estudio presentado, es conveniente que se realice una investigación cualitativa, bajo paradigmas interpretativos, para comprender la aproximación al conocimiento docente dado que el modelo sugiere que los informadores, es decir los formadores-investigadores y las maestras, deben ser observados como documentos que reflejan su propia cultura (Pérez Serrano, 2014). Se observará cómo los participantes interpretan la actividad y qué significa para ellos (Latorre, del Rincón, & Arnal, 2005).

Todos los investigadores que han formado parte de esta experiencia son formadores del profesorado, pero no trabajan en el aula de Educación Infantil con frecuencia, ni se han formado como maestros de Educación Infantil. De esta forma, el trabajo conjunto se hace necesario, por un lado, para complementar y mejorar el conocimiento del formador y su práctica, situándose en un contexto de enseñanza de la medida de la longitud en el aula infantil; por otro, para que las maestras de esta etapa complementen su conocimiento especializado del dominio MK, al que no se le ha dado énfasis en su formación inicial (McIntyre, 2005; Oppermann *et al.*, 2016).

En una de estas sesiones, el grupo concluyó que era necesario diseñar una actividad cuya resolución exigiera el uso de comparaciones indirectas con patrones que se repiten al medir. Se remarcó la importancia de que la lógica interna de la actividad estableciera por sí misma la necesidad de establecer las

comparaciones, creando así la necesidad de medir y que estuviera contextualizada con sentido para el alumnado de la etapa. En el diseño de la actividad, los formadores-investigadores, ponen de manifiesto el conocimiento especializado, que entienden, sería deseable que tuvieran los maestros para diseñar y llevar al aula esa actividad, cuyo diseño se observa en la Tabla 2.

Tabla 2
Actividad diseñada por los formadores-investigadores.

Características	Descripción
Material	Un estuche con tres posibles plantillas donde se ajustan algunos lapiceros. La plantilla verde (A) se compone de tres huecos iguales paralelos y con extremos coincidentes, la roja (B) de tres huecos iguales, pero no paralelos y la amarilla (C) tres huecos distintos y no paralelos. Cilindros encajables (altura 2 cm.) Lapiceros (unos 30) de cuatro longitudes distintas (longitudes de los lapiceros 10, 9, 8, 7 cilindros).
Organización de la clase	El estuche vacío está en una mesa, junto con algunos cilindros encajables. Los lapiceros están mezclados en una bandeja en el otro extremo de la clase, donde también disponen de cilindros encajables.
Objetivo del alumno	Conseguir de un solo viaje tres lapiceros de la misma longitud que los huecos de la plantilla del estuche
Consigna	“Aquí tenéis un estuche donde deben ir tres lapiceros. El estuche debe viajar, así que queremos llenarlo con tres lapiceros que encajen bien en los huecos que hay. Los lapiceros deben ajustarse de manera que llenen todo el hueco sin salirse. Pero hay una condición, los lápices están

en aquella mesa, no podéis llevaros el estuche y debéis traerlos en un solo viaje. Si queréis, podéis ayudaros de estos cilindros, que están al lado del estuche y junto a los lápices.”

**Estrategia
óptima**

Reconstruir una barra con los cilindros encajables de longitud igual a los huecos. Si es posible transportar la barra, llevarla junto a los lapiceros y encontrar aquellos igual de largos que la barra. Si el traslado no fuera posible, contar los cilindros que componen la barra, desplazarse por los lapiceros, construir allí otra barra con el mismo número de cilindros y buscar los lapiceros de igual longitud

**Verificación
de las
estrategias**

La actividad sanciona directamente los procedimientos del alumno. Basta comprobar si los lapiceros elegidos encajan correctamente en los huecos. Las longitudes estaban elegidas de manera que sólo encajaba un tamaño. Era muy evidente cuando el tamaño no era el adecuado

Pasamos a describir el diseño de la actividad, el contexto, los participantes y cómo se llevó al aula:

Se presentó a alumnos de 4 y 5 años una situación que, para su resolución, necesitaban establecer una comparación indirecta basada en el uso de un patrón que se repite, lo que conduce a la idea de unidad. Este trabajo de los alumnos es crucial para preparar aspectos posteriores del aprendizaje de la noción de magnitud y su medida y, como veremos, tiene sentido realizarlo en la etapa de Educación Infantil.

Uno de los aspectos importantes, destacados por la maestra en la sesión previa al diseño de la actividad, tiene que ver con la narrativa de la situación: una de las investigadoras es chilena, por ello tiene un acento distinto y eso podría llamar la atención a los estudiantes. Esta característica es el eje del contexto: hay que preparar un regalo para un niño chileno a quien le gusta dibujar, por lo que se acuerda enviarle unos lápices típicos españoles a su país. Los estudiantes observan en un mapa el viaje que deberá realizar el estuche,

comprenden que los lápices deben estar fijos en el estuche para que no se muevan durante el viaje y el regalo llegue en óptimas condiciones.

Dos investigadores diseñaron un estuche con unos huecos establecidos donde encajaban algunos lapiceros. Éstos estaban lejos del estuche y los niños debían elegir exactamente aquellos que se ajustaban a los huecos entre los distintos tamaños. Se decidió utilizar unos cilindros encajables, como material para provocar el uso de la iteración de un patrón en la comparación indirecta, ver Figura 2.

Figura 2

Estuches, lápices y cilindros encajables utilizados en la actividad.



Sobre la implementación en el aula de la actividad, conviene destacar que en la clase de 4 años sólo se utilizó la plantilla verde (A, huecos paralelos), se estableció un único viaje, pero se permitió el transporte de la barra intermediaria. Sólo se planteó como objetivo movilizar la propiedad transitiva que sustenta las comparaciones indirectas.

En la clase de 5 años, se utilizaron las plantillas verde (A) y roja (B) y tras unos primeros intentos permitiendo el traslado de la barra intermediaria, se prohibió provocando la emergencia del número como memoria de la cantidad, lo que supone un ejercicio temprano de la medida.

Las maestras proporcionaron los formularios de consentimiento informado firmados como participantes de la presente investigación sobre su conocimiento especializado¹

¹ Los autores del artículo asumen cualquier responsabilidad y eximen a Acta Scientiae, de cualquier acción que de ello se produzca, incluida la plena asistencia y la posible indemnización a cualquier daño que resulte para cualquiera de los participantes en la investigación, de conformidad con la Resolución 510 del Consejo, de 7 de abril de 2016

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis de resultados se organiza desde los dos ángulos establecidos en la metodología. En primer lugar, se especifican categorías de los diferentes subdominios del MTSK que emergen al diseñar la actividad de forma teórica y, en segundo lugar, desde la reflexión conjunta con las maestras sobre la implementación de la misma en el aula.

Diseño de la actividad

Los investigadores idearon una situación que obligara a encontrar un objeto de igual longitud a otro dado aún en la ausencia de éste (KMT; Estrategias, técnicas, tareas, y ejemplos). Para provocar el uso de la iteración de un patrón en la comparación indirecta (KoT; Procedimientos, Definiciones, propiedades y fundamentos), se les proporcionaría algún material encajable que pudiera utilizarse para construir un objeto de igual longitud al modelo (KMT; Recursos materiales y virtuales, Estrategias, técnicas, tareas, y ejemplos). La propiedad transitiva posibilitaría la elección del lapicero a partir de la información del intermediario (KoT; Procedimientos, Definiciones, propiedades y fundamentos).

Los investigadores identificaron la dificultad de encontrar material didáctico para realizar una actividad con las características anteriormente mencionadas, por lo que se diseñó expresamente un estuche con unos huecos establecidos donde se encajan lapiceros (KoT; Fenomenología y aplicaciones). Como se ha visto anteriormente, el estuche diseñado contiene tres posibles plantillas. Los investigadores secuencian el uso de las plantillas debido a las características de las posiciones de cada hueco que suponen procedimientos más o menos complejos (KMT; Estrategias, técnicas, tareas, y ejemplos), (KMLS; Secuenciación con temas anteriores y posteriores), (KoT; Definiciones, propiedades y fundamentos).

Los investigadores ajustaron las 4 longitudes de los lapiceros con diferencia de un cilindro entre ellas (KMT; Teorías sobre enseñanza). El uso de cilindros más gruesos que el hueco a rellenar pretende ir abandonando la unidad

Salud Nacional del Brasil. Dada la constitución del taller colaborativo por interés de las propias maestras e investigadores, no se consideró la necesidad de solicitar un informe emitido por un comité ético externo.

objetal por la figural (KFLM; Teorías sobre aprendizaje, Fortalezas y dificultades). Tanto en la mesa del estuche con una plantilla colocada, como al lado de la caja con todos los lapiceros mezclados, se proporciona algunos cilindros encajables, con la idea que los niños puedan elegir utilizar como patrón los cilindros encajables (KMT; Estrategias, técnicas, tareas, y ejemplos).

El objetivo de la tarea es conseguir de un solo viaje tres lapiceros de la misma longitud que los huecos de la plantilla del estuche (KMT; Estrategias, técnicas, tareas, y ejemplos). La consigna es muy cuidadosa para dar información precisa a los niños sobre lo que tiene que conseguir sin dar indicación de cómo lo puede conseguir. En particular, se evita el uso de palabras como *longitud*, *medida* o *tan largo como* para provocar el uso espontáneo de la medida de longitud para la resolución de la tarea (KMT; Estrategias, técnicas, tareas, y ejemplos), (KoT; Registros de representación).

La estrategia óptima para resolver la actividad exige comprender la noción de medida de la longitud y obliga a utilizar el número como memoria de cantidad a través de la discretización de la longitud (KMLS; Expectativas de aprendizaje), (KMT; Estrategias, técnicas, tareas, y ejemplos), (KoT; Procedimientos, Definiciones, propiedades y fundamentos). Para llegar a la estrategia óptima como objetivo de aprendizaje, los niños pasan por estrategias intermedias a lo largo de un camino de aprendizaje (KMLS; Secuenciación con temas anteriores y posteriores), (KFLM; Teorías de aprendizaje), que van modificándose con la gestión de las variables didácticas indicadas (KMT; Estrategias, técnicas, tareas, y ejemplos). La actividad diseñada permite la verificación de las estrategias utilizadas por los niños, ya que sanciona directamente los procedimientos del alumno (KMT; Estrategias, técnicas, tareas, y ejemplos).

La concreción de las variables didácticas (Briand y Chevalier, 1995; Brousseau, 1991) muestra el conocimiento especializado que pretenden adquieran los maestros, entrelazando el contenido matemático de la tarea (KoT; Procedimientos, Definiciones, propiedades y fundamentos) con aspectos didácticos tanto de las expectativas de aprendizaje (KMLS; Expectativas de aprendizaje), como las teorías de enseñanza, estrategias y recursos (KMT; Teorías sobre enseñanza, Estrategias, técnicas, tareas, y ejemplos, Recursos materiales y virtuales), que permiten llegar a estos estándares respetando el desarrollo del aprendizaje de los niños sobre ese contenido concreto (KFLM; Teorías sobre aprendizaje, Fortalezas y dificultades). A continuación, se describen para cada variable didáctica, algunos aspectos de las categorías indicadas antes.

- Número de tamaños distintos de lapiceros: se decidió utilizar 4 tamaños distintos para evitar el uso de aspectos cualitativos, como pequeño, mediano y grande, en la diferenciación visual de las cantidades de longitud.
- Diferencia entre los tamaños de los lápices: las longitudes de los lapiceros se diferenciaban justo en la altura de un cilindro. Se trata de longitudes visualmente distintas pero esa diferencia no hace posible una memoria directa de la longitud.
- Relación longitudes de los lápices con la de los cilindros: la longitud de todos los lapiceros se podía descomponer en una cantidad entera de alturas de los cilindros (7, 8, 9 y 10 cilindros). Si se quiere provocar el uso del número (medida) para poder trasladar la longitud, es necesario que sea natural (trabajo en Infantil).
- Tamaño de los huecos de las plantillas: se decidió construir dos plantillas con todos los huecos iguales, por lo que sólo había que reproducir una cantidad de longitud. La plantilla amarilla (C) tiene huecos de tres tamaños distintos, lo que exige tres procesos de reconstrucción distintos por lo que aumenta su dificultad.
- Disposición espacial de los huecos: la disposición paralela (plantilla A) permite percibir más fácilmente la igualdad o no de las longitudes.
- Ubicación de los lápices y el estuche: para forzar comparaciones indirectas, el estuche y los lápices deben estar lo suficientemente separados para que no se puedan establecer comparaciones perceptivas.
- Número de viajes: la limitación del número de viajes inhabilita estrategias de aproximación sucesiva (ensayo y error) hasta dar con el tamaño correcto.
- Desplazamiento del intermediario: la prohibición del desplazamiento de la barra de cilindros intermediaria exige el uso del número de cilindros (patrones) como única información posible para reconstruir una longitud igual.

Reflexión conjunta sobre el desarrollo de la actividad

Pasamos ahora a discutir el conocimiento especializado de las maestras que emerge durante la reflexión conjunta. La sesión de discusión se enmarca también dentro de los talleres colaborativos ARANMATINF en los que formadores-investigadores y maestras en ejercicio proponen, plantean, diseñan, ponen en práctica y reflexionan conjuntamente sobre prácticas de aula con el doble objetivo de la formación profesional y la investigación.

La sesión comienza con la presentación de la actividad por los formadores-investigadores y, a continuación, estos plantean cuestiones para la reflexión con el objetivo de que las maestras participantes muestren evidencias sobre su conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas (en concreto de la longitud y su medida). Es decir, vamos a centrarnos en el análisis de las maestras sobre el desarrollo en el aula de la actividad.

Llama la atención que todas las observaciones que realizan las maestras suelen dirigirse hacia el alumno, interpretando inicialmente sus acciones desde las características de su aprendizaje y desarrollo, desde un punto de vista pedagógico general y didáctico matemático (KFLM). Ellas mismas lo verbalizan: “nos preocupamos por su propio pensamiento”. En el debate entre formadores-investigadores y maestras sobre los comportamientos de los niños, surgen ideas que permiten aproximarnos a la identificación de elementos característicos sobre el conocimiento del KoT y del KMT de las maestras. Este conocimiento puede describirse como artesanal y empírico, ya que emerge de la experiencia en el aula y se muestra limitado a la hora de identificar y explicitar conceptos matemáticos, como se muestra a continuación.

Cuando las maestras se fijan en las semejanzas y diferencias entre las estrategias utilizadas por los niños, identifican los procedimientos de comparación directa y uso de patrones al decir: “bueno primero que cuenta, cuenta directamente cuántos son, saben que hay un patrón que se repite varias veces y contando” (KoT; Procedimientos). Otro aspecto que la maestras identifican en las respuestas de los niños, es el uso de la comparación indirecta, por ejemplo: “y después, el segundo, el que tomaba el lapicero, no los cilindros encajables, sino el lapicero, con otro lapicero y otro lapicero, pues es que tiene que ser igual que éste, se dan cuenta que esa medida se va a mantener aunque no lo mida con los cilindros encajables, con las nueve veces...”, comentario con el que intuyen la conservación de la longitud implícita en la comparación indirecta (KoT; Definiciones, propiedades y sus fundamentos). Además, las maestras añaden, “... esta estrategia es más abstracta, ya no necesita el material, sabe que con nueve voy a conseguir... yo no sé matemáticas... pero me gusta que haga esto” que evidencia que intuyen la transitividad de manera informal

basada en el uso de la propiedad en el procedimiento de comparar varias cantidades de longitud (KoT; Definiciones, propiedades y sus fundamentos) y que el número es la información suficiente para expresar la cantidad de magnitud (KoT; Definiciones, propiedades y sus fundamentos, Procedimientos), (KFLM; Teorías de aprendizaje), (KSM; Conexiones auxiliares). En ese sentido, añaden que: "... yo creo que eso sería más evolucionado... el de no tener que utilizar la referencia, él se fija ya en esa cualidad, en esa longitud, los que van ya no necesitan el referente", por lo que se puede deducir que distinguen la comparación indirecta como una estrategia más evolucionada que la comparación directa (KFLM; Teorías de aprendizaje).

Durante el debate, los investigadores plantean cuestiones sobre posibles dificultades presentadas en las estrategias de los niños, como el aislamiento de una magnitud, en este caso, la longitud en un objeto tridimensional. Los niños intentan encajar la barra de cilindros en la ranura del estuche y resulta ser más ancha ("gordita") que el hueco. Las maestras identifican esta limitación del material (KMT; Recursos materiales y virtuales), pero enfatizan que no supone dificultad para ellos (KFLM; Fortalezas y dificultades), que simplemente "es un paso más" (KMLS; Secuenciación con temas anteriores y posteriores):

[...] los niños debían tener la intuición de que valía pero que no cabía [...] la igualdad... el grosor, sirve para que se den cuenta que no son iguales ... no son iguales, uno es más gordo y otro no, pero la longitud sí que es igual. yo creo que tiene que ser a veces ... un paso más, aunque ellos veían que no cabían, sí que era un material que les permitía medir, que era lo que querían, ellos lo que buscaban algo que fuese, que cupiese, tener en cuenta una..., [...] una dimensión, una característica.

De nuevo, las maestras han movilizizado, respondiendo a cuestiones concretas, un elemento del KoT fijándose en las respuestas de los niños: el aislamiento de la longitud (KoT; Definiciones, propiedades y sus fundamentos), (KFLM; Formas de interacción con un contenido matemático).

Una formadora plantea cuál es la diferencia entre dos estrategias de comparación utilizadas por los niños, representándolas con los lapiceros: en una, apoya el extremo de los dos lapiceros de forma perpendicular a la mesa y en la otra, los compara en el aire. Las maestras comentan: "Partiendo de la base es más segura la longitud para llegar a la altura que es lo que estamos trabajando, A lo mejor los de cuatro años no tienen conciencia de la longitud de la altura a partir de una base concreta...hay que medir esto con esto y esto

con esto... [hace coincidir los extremos]”, lo que muestra que identifican la necesidad de origen común en el procedimiento de comparación de longitudes (KoT; Procedimientos). El uso de los cilindros encajables lo consideran adecuado por la familiaridad que tienen, pero entienden que no encajar bien las tuberías supondría una técnica de medida deficiente (KoT; Procedimientos).

Por otra parte, en lo que se refiere a las prácticas matemáticas, las maestras se dan cuenta de que los niños podrían anticiparse realizando una clasificación de los lapiceros que iban descartando: “... un adulto en esa situación, el lápiz que no vale, lo saca fuera de la caja”, lo que facilita la resolución de la tarea. La identificación de la estrategia de “ensayo y error” que utilizan algunos niños como estrategia para resolver la actividad puede ser interpretado como un proceso asociado a la resolución de problemas como forma de reproducir matemáticas (KPM). Cabe destacar que la estrategia de “ensayo y error” no ha sido considerada en el diseño de la actividad, ha emergido directamente de las acciones de los niños. Además, las maestras destacan como positivo que la actividad permita la validación por parte del alumno, ya que “no quieren ser las que dicen si está bien o mal”.

Finalmente, destacamos la aparición, de nuevo de forma intuitiva desde su experiencia, de elementos relacionados con el conocimiento de teorías de enseñanza de las matemáticas cuando identifican características de las plantillas que condicionan las estrategias de los alumnos: “... en la plantilla verde (A) se ve claro que los tres son iguales, aunque los niños no se fían y lo comprueban. [...] en la verde (A) se puede comprobar visualmente, pero en la roja (B) no se puede comprobar”, por lo que identifican que las características de las plantillas suponen una variable didáctica (KMT; Teorías de enseñanza). Además, en este comentario las maestras reconocen la percepción visual como estrategia de comparación (KoT; Procedimientos).

Las maestras comentan el uso del error como aliado didáctico: “... el error no lo aprovechamos, el error hay que aprovecharlo, utilizar el error para avanzar, ayuda a los demás, y luego también recoger, ...”. Así, identifican el error como algo que se debe aprovechar en el proceso de enseñanza-aprendizaje (GPK, teorías de aprendizaje general como el constructivismo).

A lo largo de todo el debate, las maestras muestran la preocupación por atender la parte emocional de los niños: “...en el proceso de aprendizaje, el niño tiene que estar emocionalmente equilibrado, necesita seguridad... no solo en las matemáticas, en la lectura, en la creatividad... [las maestras] nos preocupamos por su propio pensamiento”. En un momento dado remarcaron

incluso que la formadora se mostró “fría” ante el bloqueo de una niña: “... hay niños que sabes que les puedes exigir para que reflexionen y otros que sienten más frustración... a veces necesitan un abrazo...”.

Para cerrar la sesión, las maestras, en una reflexión general, hacen notar que los formadores-investigadores se centran en el diseño de la tarea apoyándose en el contenido matemático y las teorías de enseñanza. En algunas ocasiones, olvidando la narrativa global que da significado a la actividad una vez se ha conseguido el objetivo didáctico de la tarea: “cuando lleváis a cabo la actividad no os ha preocupado mezclar los 3 lápices al final y eso para ellos es importante, porque era la motivación de la tarea...”. Por el contrario, las maestras, se centran más en el desarrollo íntegro de los niños: “... vosotros [los formadores] estáis atentos a los aspectos matemáticos de la tarea que están haciendo los niños, nosotros [las maestras] estamos atentos a que los niños no pierdan el interés, que no se aburran. Cuando lo están haciendo, decimos, date la vuelta para que lo vean todos...”. Las maestras se preocupan de que todos los niños hayan comprendido la tarea: “...lo he visto como que han entendido la actividad...”.

CONCLUSIONES

Este trabajo ha tenido como objetivo avanzar en la caracterización del conocimiento especializado que los maestros de Educación Infantil necesitan movilizar para diseñar y llevar al aula actividades de introducción a la longitud y su medida, lo que conlleva a la mejora de la formación inicial y continua del profesorado de la etapa.

Por un lado, se describe el conocimiento especializado que los investigadores-formadores del profesorado entienden que es deseable que tengan los maestros de Educación Infantil al analizar, desde el modelo MTSK, el diseño realizado por investigadores de una actividad sobre el aprendizaje de la medida de la longitud. Por otro lado, se ha analizado el conocimiento especializado movilizado de dos maestras con mucha experiencia al estar presentes durante la implementación de dicha actividad y reflexionar de manera conjunta con los formadores-investigadores. Así, nuestra propuesta da una respuesta a la problemática detectada por Zeichner (2010): el profesor de aula no está, en general, al tanto del conocimiento que se imparte actualmente en la universidad, el formador de profesores no está familiarizado con el trabajo de aula.

En el diseño de la actividad, los formadores-investigadores dan importancia al conocimiento matemático de los contenidos implicados en la tarea, y utilizan las teorías de enseñanza y aprendizaje para construir la actividad. En concreto, evidencian la movilización de conocimientos de las siguientes categorías del KoT: Definiciones, propiedades y sus fundamentos, Procedimientos, Fenomenología y aplicaciones, y Registros de representación; y, paralelamente, de las categorías Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; y Teorías de Enseñanza dentro del subdominio KMT. Según va avanzando el desarrollo de la tarea, surgen elementos de categorías de los otros dos subdominios del PCK (KFLM y KMLS).

Por otro lado, el punto de partida de todos los comentarios de las maestras siempre son las características de los estudiantes, sus acciones y el nivel de demanda cognitiva que las sustentan (KFLM). En la profundización de estas ideas, surgen indicios de otros subdominios como KMT o KoT, que pueden ser interpretados como gérmenes de algunas categorías de los mismos y que emergen, en muchas ocasiones, de eventos pedagógicos generales o afectivos a los que ellas dan mucha importancia. En la reflexión conjunta se hace explícita la preocupación de los formadores-investigadores porque la tarea desarrolle capacidades matemáticas muy concretas, mientras que las maestras se preocupan por el bienestar de los estudiantes, mantener su interés y su estado emocional (GPK).

Durante las discusiones en el seno del grupo colaborativo, las maestras declaran, abiertamente, sentir limitaciones al explicitar conceptos matemáticos presentes en la actividad y en las acciones de los estudiantes. Por otra parte, los formadores-investigadores refuerzan su limitación al no conocer la cultura del aula de Educación Infantil. De esta forma, se estrecha la brecha entre las dos aproximaciones a la enseñanza.

A partir de lo anterior, se ratifica la importancia de la formación de maestros de Educación Infantil desde una doble aproximación: teórica, aportada por los formadores-investigadores y empírica, centrada en aula, aportada por las maestras, para conformar un modelo del conocimiento especializado de este profesional para enseñar matemáticas, en nuestro caso, longitud y su medida.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

N. P. y N. J-P. concibieron la idea general y los objetivos del estudio aquí presentado. J. M. B., N. P. y M. R-G. se encargaron de la revisión teórica y del diseño de la intervención. M. R-G. y N. J-P. se encargaron de coordinar las sesiones colaborativas en las que se recogió la información y adaptaron la metodología al contexto del estudio. Todos los autores participaron activamente en la discusión de resultados, en la redacción del trabajo y revisaron y aprobaron la versión final del documento.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que sustentan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente, Nuria Joglar-Prieto, previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto: “Conocimiento Especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado” (RTI2018-096547-B-I00, del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, España). Asimismo, está vinculado a la Red MTSK, auspiciado por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

REFERENCIAS

- Alsina, A. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Octaedro-Eumo.
- Alsina, A. (2020) La Matemática y su didáctica en la formación de maestros de Educación Infantil en España: crónica de una ausencia anunciada. *La Gaceta de la RSME*, 30(2), 373-387.
- Arteaga, B. & Macías, J. (2016). *Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil*. UNIR.
- Ball, D.L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler

(Ed.) *Multiple Perspectives on Mathematics of Teaching and Learning*. (pp. 83-104). Ablex.

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Baumfield, V., & Butterworth, M. (2007). Creating and translating knowledge about teaching and learning in collaborative school–university research partnerships: An analysis of what is exchanged across the partnerships, by whom and how. *Teachers and Teaching: Theory and practice*, 13(4), 411–427. <https://doi.org/10.1080/13540600701391960>
- Belmonte, J.M. (2005). La construcción de magnitudes lineales en Educación Infantil. En M.C. Chamorro (coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 315-345). Pearson.
- Briand, J. y Chevalier, M.C. (1995). *Les enjeux dans la relation didactique*. Hartier.
- Brousseau, G. (1991). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.
- Buys, K. & Veltman, A. (2008). Measurement In Kindergarden 1 and 2. In Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (Eds.), *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. Brill Sense.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Chamorro, M. C. & Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida*. *Didáctica de las magnitudes lineales*. Síntesis.
- Clements, D. H. (2010). Teaching length measurement: Research challenges. *School Science and Mathematics*, 99(1), 5-11. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1999.tb17440.x>
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

- Clements, D. H., & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In D.H. Clements, J. Sarama & A.M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. (pp. 299-317). Lawrence Erlbaum.
- Copley, J. V. (2017). *Putting Essential Understanding of Geometry and Measurement Into Practice in Prekindergarten-grade 2*. NCTM, National Council of Teachers of Mathematics.
- Erickson, F. (2006) Definition and analysis of data from videotape: some research procedures and their rationales. En J. Green, G. Camili y P. Elmore (Eds.). *Handbook of complementary methods in education research*. (pp. 177-191). American Educational Research Association
- Fernández, M. & Mantecón, J. (2018). El número en la construcción de las magnitudes lineales. Magnitudes de Longitud, Peso, Capacidad, Tiempo. En C. Muñoz- Catalán & J. Carrillo (eds.), *Didácticas de las Matemáticas para maestros de Educación infantil*. (pp. 157-159). Paraninfo.
- Gergen, K. (2001). Self-narration in social life. In M. Wetherell, S. Taylor y S.J. Yates Eds.) *Discourse theory and practice* .(pp. 247–259). Sage.
- Hargreaves, A., & Fullan, M. (2014). *Capital Profesional*. Morata.
- Latorre A., del Rincón, D. & Arnal, J. (2005). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Experiencia.
- Lupiñez, J & Castro. E. (2017). Medida. En, Castro, E. y Castro, E. (eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación infantil*. (pp. 203-204). Pirámide.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US*. Lawrence Erlbaum.
- McIntyre, D. (2005). Bridging the gap between research and practice. *Cambridge Journal of Education*, 35(3), 357-382.
<https://doi.org/10.1080/03057640500319065>
- Muñoz-Catalán, M. C., Liñán-García, M. M., & Ribeiro, M. (2017). El conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa*, 24, 4-19.
<http://dx.doi.org/10.18764/2178-2229.v24nespecialp4-19>

- Muñoz-Catalán, M. C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A. M., Aguilar, Á. & Ribeiro, C. M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En Badillo, E., Climent, N., Fernández, C., & González, M. T. (eds.). *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp. 63-84). Ediciones Universidad Salamanca.
- Muñoz-Catalán, M. C., Joglar-Prieto, N., Ramírez, M., & Codes, M. (in press a) *MTSK desde la perspectiva del profesor de Educación Infantil: foco en el dominio matemático*.
- Muñoz-Catalán, M. C., Ramírez-García, M., Joglar-Prieto, N. y Carrillo, J. (2021). Mathematics Teachers' Specialized Knowledge to Promote Algebraic Thinking in Early Childhood Education as from a task of additive decomposition. *Journal for the Study of Education and Development* (RIYA).
<https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1946640>
- Nolla de Celis, A., Cerisola, A., Fernández, B., y Muñoz, R. (2021). La formación inicial de los maestros en Matemáticas y su Didáctica. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 96 (35.1).
<https://doi.org/10.47553/rifop.v96i35.1.85882>.
- Oppermann, E., Anders, Y. & Hachfeld, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education*, 58, 174-184.
<https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.05.004>
- Parks, A. N., & Wager, A. A. (2015). What knowledge is shaping teacher preparation in early childhood mathematics? *Journal of Early Childhood Teacher Education*, 36(2), 124-141.
<https://doi.org/10.1080/10901027.2015.1030520>
- Pérez Serrano, G. (2014). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. I Método*. La Muralla.
- Roschelle, J. (2000). Choosing and using video equipment for data collection. En A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 709-729). Lawrence Erlbaum.

- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge for growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
<https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L. R. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17 (1), 153-172.
<https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6>
- Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.
[https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)00031-0](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00031-0)
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Elia, I. (2011). Kindergartners' performance in length measurement and the effect of picture book reading. *ZDM Mathematics Education*, 43, 621-635.
<https://doi.org/10.1007/s11858-011-0331-8>
- Zeichner, K. (2010). Rethinking the connections between campus courses and field experiences in college- and university-based teacher education. *J. Teacher Educ*, 6, 89-99.
<https://doi.org/10.1177/0022487109347671>