Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Algèbres de Lie/*Lie Algebras*

Sur la réductibilité de la variété des algèbres de Lie nilpotentes complexes

Yu B. HAKIMJANOV, José Maria ANCOCHEA BERMUDEZ et Michel GOZE

Résumé – On montre, dans cette Note, que les variétés algébriques des lois d'algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension supérieure ou égale à 7 sont réductibles.

On the reducibility of the varieties of nilpotent complex Lie algebras

Abstract – *In this Note we prove that the variety of nilpotent complex Lie algebras of dimension more than seven is reducible.*

INTRODUCTION ET NOTATIONS. – Soit N^n la variété des lois d'algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension n. Elle est fibrée par les orbites correspondant à l'action naturelle du groupe linéaire $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ (définie par les changements de base). Cette variété est irréductible pour $n \leqq 6$ (*voir* [3], [7], [8]). Dans [10], M. Vergne démontre l'existence d'au moins deux composantes algébriques irréductibles dès que $n \geqq 11$ sans toutefois les déterminer explicitement.

Si $\mu \in N^n$, on notera $\mathfrak{g}=(\mu, \mathbb{C}^n)$ l'algèbre de Lie de loi μ et $\mathcal{O}(\mu)$ ou $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ l'orbite de μ.

THÉORÈME. – *Si* $n \geqq 7$, *la variété* N^n *est réductible.*

I. SUITE CARACTÉRISTIQUE. CONTRACTIONS. DÉTERMINATION DES COMPOSANTES IRRÉDUCTIBLES. – Soient $\mathfrak{g}=(\mu, \mathbb{C}^n)$ une algèbre de Lie complexe nilpotente de dimension n et $\mathcal{D}\mathfrak{g}$ son idéal dérivé. Soient X un vecteur non nul dans $\mathfrak{g}-\mathcal{D}\mathfrak{g}$ et $s_\mu(X)=(s_1(X), \ldots, s_k(X), 1)$ la suite ordonnée ($s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_k \geqq 1$) des exposants de similitude de l'opérateur nilpotent $\mathrm{ad}_\mu(X)$. Ordonnons l'ensemble de ces suites par l'ordre lexicographique et notons :

$$s(\mu)=\sup\{s_\mu(X) \mid X \in \mathfrak{g}-\mathcal{D}\mathfrak{g}\}.$$

C'est un invariant à isomorphisme près de l'algèbre $\mathfrak{g}=(\mu, \mathbb{C}^n)$.

PROPOSITION. – *Si* μ' *est une perturbation de* μ *dans* N^n, *alors* $s(\mu') \geqq s(\mu)$.

La notion de perturbation est définie dans [6]. Soit $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $s_\mu(X)=s(\mu)$. Comme $\mu' \simeq \mu$, si $X' \simeq X$ et $X' \in \mathfrak{g}'-\mathcal{D}\mathfrak{g}'$ où $\mathfrak{g}'$ est l'algèbre de Lie associée à μ', l'opérateur nilpotent $\mathrm{ad}_{\mu'}(X')$ est une perturbation de $\mathrm{ad}_\mu(X)$. Posons $s_\mu(X)=(s_1, \ldots, 1)$ et considérons le premier espace caractéristique E_1 (resp. E'_1) de $\mathrm{ad}_\mu(X)$ [resp. de $\mathrm{ad}_{\mu'}(X')$] de dimension s_1. Si $(e_1, \ldots, e_{s_1})$ est une base de Jordan de E_1, alors $\mathrm{ad}_{\mu'}(X')(e_i) \simeq e_{i+1}$ et $\dim E'_1 \geqq \dim E_1$. En cas d'égalité on compare les espaces caractéristiques suivants. D'où la proposition.

Conséquences. – 1. Soit $\mathfrak{g}_0=(\mu_0, \mathbb{C}^n)$ une algèbre de Lie se contractant sur $\mathfrak{g}_1=(\mu_1, \mathbb{C}^n)$. Alors μ_0 est dans l'adhérence de $\mathcal{O}(\mu_1)$ et elle est donc isomorphe à une perturbation μ de μ_1. Ainsi $s(\mu_0) \geqq s(\mu_1)$.

2. Soit $N_s=\{\mu \in N^n \mid s(\mu) \geqq s\}$. D'après la proposition ci-dessus, c'est un ouvert de N^n. Le cas particulier où s est maximal et égal à $(n-1, 1)$ correspond à l'ouvert des lois filiformes. Il est clair que la réductibilité de l'ouvert $N_{(n-1,1)}$ implique la réductibilité de N^n. Supposons $N_{(n-1,1)}$ irréductible. La proposition précédente conduit la recherche

Note présentée par Jean-Louis KOSZUL.

0764-4442/91/03130059 $ 2.00 © Académie des Sciences

d'une deuxième composante irréductible dans l'ouvert $N_{(n-2,1,1)}$. Plus généralement si N_s est contenu dans l'adhérence de Zariski de $N_{(n-1,1)}$ et ceci pour tout $s \geqq s_0$, on cherche une éventuelle deuxième composante dans N_{s_1} où s_1 est le prédécesseur de s_0.

II. Démonstration du théorème. — II.1. *Cas de la dimension* 7. — L'ouvert $N_{(6,1)}$ est irréductible. Il s'identifie à l'orbite de la famille à un paramètre définie par :

$$\mu(X_1, X_i) = X_{i-1}, \qquad i = 3, 4, \ldots, 7$$

$$\mu(X_4, X_7) = \alpha X_2; \quad \mu(X_5, X_6) = X_2; \quad \mu(X_5, X_7) = (1+\alpha) X_3; \quad \mu(X_6, X_7) = (1+\alpha) X_4.$$

L'adhérence de Zariski de cette orbite est une composante irréductible.

L'ouvert $N_{(5,1,1)}$ n'est pas irréductible. Les algèbres suivantes :

$$\mu(X_1, X_i) = X_{i-1}, \qquad i = 4, 5, 6, 7$$

$$\mu(X_2, X_6) = X_3; \quad \mu(X_2, X_7) = X_3 + X_4; \quad \mu(X_5, X_7) = \alpha X_3; \quad \mu(X_6, X_7) = \alpha X_4 + X_2$$

ne sont pas dans la composante définie précédemment (on ne peut perturber ces algèbres sur une algèbre filiforme); l'adhérence de l'orbite de cette famille à un paramètre détermine une deuxième composante irréductible de N^7 (en fait N^7 est réunion de ces deux composantes [6]).

II.2. *Cas de la dimension* 8 [6]. — L'ouvert des filiformes n'est pas irréductible. Il est contenu dans les deux composantes définies par l'adhérence des orbites des deux familles suivantes :

$$\mu(X_1, X_i) = X_{i+1}, \quad 3 \leqq i \leqq 8; \qquad \mu(X_4, X_8) = \alpha X_2;$$
$$\mu(X_5, X_7) = X_2; \qquad \mu(X_5, X_8) = (1+\alpha) X_3 + X_2$$
$$\mu(X_6, X_7) = X_3; \qquad \mu(X_6, X_8) = (2+\alpha) X_4 + X_3; \qquad \mu(X_7, X_8) = (2+\alpha) X_5 + X_4.$$

et

$$\mu(X_1, X_i) = X_{i+1}, \quad 3 \leqq i \leqq 8; \qquad \mu(X_4, X_7) = X_2;$$
$$\mu(X_4, X_8) = X_2 + X_3; \qquad \mu(X_5, X_6) = -X_2;$$
$$\mu(X_5, X_7) = (-2/5) X_2; \qquad \mu(X_5, X_8) = X_4 + (3/5) X_3; \qquad \mu(X_6, X_7) = (2/5) X_3;$$
$$\mu(X_6, X_8) = X_5 + (1/5) X_4 + \alpha X_2; \qquad \mu(X_7, X_8) = X_6 + (1/5) X_5 + \alpha X_3.$$

Remarque. — Récemment G. Ceeley a mis en évidence une troisième composante de N^8 ne rencontrant pas l'ouvert des filiformes [9].

II.3. *Cas de la dimension* 9. — L'ouvert des filiformes est irréductible [1]. Il est contenu dans l'orbite de la famille à deux paramètres donnée par :

$$\mu(X_1, X_i) = X_{i-1}, \quad 3 \leqq i \leqq 9; \qquad \mu(X_5, X_8) = X_2;$$
$$\mu(X_5, X_9) = X_3 + \alpha X_2; \qquad \mu(X_6, X_7) = X_2;$$
$$\mu(X_6, X_8) = 2 X_3; \qquad \mu(X_6, X_9) = 3 X_4 + \alpha X_3 + \beta X_2; \qquad \mu(X_7, X_8) = 2 X_4;$$
$$\mu(X_7, X_9) = 5 X_5 + \alpha X_4 + \beta X_3; \qquad \mu(X_8, X_9) = 5 X_6 + \alpha X_5 + \beta X_4.$$

Considérons à présent la famille dont les lois sont dans $N_{(7,1,1)}$ qui est définie par :

$$\mu(X_1, X_i) = X_{i-1}, \quad 4 \leqq i \leqq 9; \qquad \mu(X_2, X_8) = -2 X_3;$$
$$\mu(X_2, X_9) = -2 X_4 - 5 \alpha X_3; \qquad \mu(X_5, X_8) = X_3;$$
$$\mu(X_5, X_9) = X_4 + \beta X_3; \quad \mu(X_6, X_8) = X_4 + \alpha X_3; \quad \mu(X_6, X_9) = 2 X_5 + (\alpha+\beta) X_4 + X_2;$$
$$\mu(X_7, X_8) = X_5 + \alpha X_4 + \gamma X_3 - X_2; \qquad \mu(X_7, X_9) = 3 X_6 + (\beta + 2\alpha) X_5 + \gamma X_4;$$
$$\mu(X_8, X_9) = 3 X_7 + (\beta + 2\alpha) X_6 + \gamma X_5 + \gamma X_5 + \delta X_2.$$

Aucune de ces lois ne peut se perturber sur une loi filiforme; l'adhérence de l'orbite de cette famille constitue une deuxième composante de N^9.

II.4. *Cas de la dimension* 10. – L'ouvert des lois filiformes $N_{(9,1)}$ est contenu dans la réunion de trois composantes algébriques irréductibles.

En effet, toute loi filiforme de dimension 10 est isomorphe à l'une des lois données par :

$$\mu(X_1, X_i)=X_{i-1},\quad 3\leqq i\leqq 10;\quad \mu(X_4, X_9)=a_1 X_2;\quad \mu(X_4, X_{10})=a_1 X_3+a_2 X_2;$$
$$\mu(X_5, X_8)=-a_1 X_2;\quad \mu(X_5, X_9)=b_2 X_2;\quad \mu(X_5, X_{10})=a_1 X_4+(b_2+a_2) X_3+b_3 X_2;$$
$$\mu(X_6, X_7)=a_1 X_2;\quad \mu(X_6, X_8)=c_2 X_2;\quad \mu(X_6, X_9)=(b_2+c_2) X_3+c_3 X_2;$$
$$\mu(X_6, X_{10})=a_1 X_5+(a_2+2 b_2+c_2) X_4+(c_3+b_3) X_3+c_4 X_2;\quad \mu(X_7, X_8)=c_2 X_3+d_1 X_2;$$
$$\mu(X_7, X_9)=(b_2+2 c_2) X_4+(c_3+d_1) X_3+d_2 X_2;$$
$$\mu(X_7, X_{10})=a_1 X_6+(a_2+3 b_2+3 c_2) X_5+(2 c_3+b_3+d_1) X_4+(c_4+d_2) X_3+d_3 X_2;$$
$$\mu(X_8, X_9)=(b_2+2 c_2) X_5+(c_3+d_1) X_4+d_2 X_3+e_1 X_2;$$
$$\mu(X_8, X_{10})=a_1 X_7+(a_2+4 b_2+5 c_2) X_6+(3 c_3+b_3+2 d_1) X_5 \\ +(c_4+2 d_2) X_4+(e_1+d_3) X_3+e_2 X_2;$$
$$\mu(X_9, X_{10})=a_1 X_8+(a_2+4 b_2+5 c_2) X_7+(3 c_3+b_3+2 d_1) X_6 \\ +(c_4+2 d_2) X_5+(e_1+d_3) X_4+e_2 X_3+f X$$

où les constantes de structure $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f)$ vérifient les conditions de Jacobi suivantes :

$$2 c_2 a_2-3 b_2^2-3 b_2 c_2=0$$
$$a_1(2 a_2+7 b_2+7 c_2)=0$$
$$a_1(2 c_4+5 d_2)-2 a_2 d_1-(4 b_2+5 c_2)(d_1-c_3)-(3 c_3+b_3+2 d_1)(c_2-b_2)-b_3(b_2+2 c_2)=0.$$

La première composante est l'adhérence de Zariski de l'orbite de la famille définie par $a_1=c_2=1$, $b_2=-1$, $a_2=0$ et $2 c_4+5 d_2=5 d_1+5 c_3+3 b_3$.

La deuxième est l'adhérence de l'orbite de la famille correspondant à : $a_1=c_2=1$, $b_2=-7/3$, $a_2=14/3$ et $2 c_4+5 d_2=(35/3) d_1+(43/3) c_3+3 b_3$.

Quant à la troisième, elle est associée à la famille donnée par : $a_1=0$, $c_2=1$, $2 a_2=3 b_2^2+3 b_2$, $3 b_3=(7 b_2+2) c_3-d_1(3 b_2^2+5 b_2+7)$.

II.5. *Cas de la dimension supérieure ou égale à* 11. – La réductibilité de N^n pour $n\geqq 11$ est prouvée dans [4]. Le but du paragraphe suivant est de préciser les composantes données par les lois filiformes lorsque la dimension est supérieure à 11.

III. La réductibilité de l'ouvert des filiformes [5]. – Soit l_n l'algèbre de Lie de dimension $n+1$ avec $n\geqq 11$ définie dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ par $\mu(e_0, e_i)=e_{i+1}$, $1\leqq i\leqq n-1$.

A tout couple d'entiers (k, s) tels que $1\leqq k\leqq n-1$, $2k+1\leqq s\leqq n$ et $s\geqq 4$, on associe le 2-cocycle (pour la cohomologie de Chevalley) $\varphi_{k,s}\in Z^2(l_n, l_n)$ défini par

$$\varphi_{k,s}(e_i, e_j)=(-1)^{k-i}\delta_{j-k-1}^{k-i} e_{i+j+s-2k-1}\qquad \text{si}\quad 1\leqq i\leqq k<j\leqq n$$

et égal à 0 dans les autres cas.

Soit T l'espace vectoriel engendré par d'une part les cocycles $\varphi_{k,s}$ avec $2k+1<s<n$ et d'autre part $\varphi_{1,n}$ si $n=2l+1$.

Lemme [5]. – *L'espace tangent au point l_n à la variété N^n est un sous-espace de $T+B^2(l_n, l_n)$ où $B^2(l_n, l_n)$ est l'espace des 2-cobords de la cohomologie de Chevalley de l_n qui s'identifie à l'espace tangent en l_n à $\mathcal{O}(l_n)$.*

Or, d'après [10], l'étude des composantes irréductibles de l'ouvert $N_{(n-1,1)}$ se ramène à l'étude des composantes de la sous-variété affine M de T définie par les relations $\varphi\circ\varphi=0$ (*i.e.* φ est une loi d'algèbre de Lie). Or tout élément φ de T est de la forme $\varphi=\sum a_{k,s}\varphi_{k,s}$ et la variété M est donnée par les équations :

$$-3a_{2,6}^2+a_{3,8}a_{2,6}+2a_{1,4}a_{3,8}=0$$
$$6a_{3,8}^2-4a_{2,6}a_{3,8}-a_{3,8}a_{4,10}+2a_{1,4}a_{4,10}-a_{2,6}a_{4,10}=0$$
$$-4a_{3,8}^2+3a_{3,8}a_{4,10}+3a_{2,6}a_{4,10}=0.$$

La solution de ce système est la réunion des trois droites qui dans l'espace vectoriel paramétré par $(a_{1,4}, a_{2,6}, a_{3,8}, a_{4,10})$ ont pour vecteurs directeurs respectifs $(1,0,0,0)$, $(0,0,0,1)$ et $(1,1/10,1/70,1/420)$.

On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si* $n\geqq 12$, *l'ouvert* $N_{(n-1,1)}$ (*et par suite* N^n) *contient au moins trois composantes irréductibles si n est impair, et au moins quatre composantes irréductibles si n est pair.*

Remarque sur la dimension des composantes. — Considérons les algèbres filiformes r_n et w_n définies par :

r_n :

$$\mu(e_0, e_i)=e_{i+1},\quad 1\leqq i\leqq n-1;\qquad \mu(e_1, e_i)=e_{i+2},\quad 2\leqq i\leqq n-2.$$

w_n :

$$\mu(e_0, e_i)=e_{i+1},\qquad 1\leqq i\leqq n-1;$$
$$\mu(e_i, e_j)=[6(i-1)!(j-1)(j-i)/(i+j)!]\,e_{i+j+1},\qquad \text{si}\quad 1\leqq i, j\leqq n-2,\quad i+j+1\leqq n.$$

Les lois de ces deux algèbres sont des points simples de N^{n+1} et appartiennent à des composantes distinctes qui sont respectivement de dimension $n^2+2n-[(n+16)/3]$ et n^2+n+2.

Note remise le 25 avril 1991, acceptée le 21 mai 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J.M. ANCOCHEA BERMUDEZ et J. R. GOMEZ MARTIN, *Actes des 15ᵉˢ journées Luso-Espanholas*, Evora, 1990.

[2] J.M. ANCOCHEA BERMUDEZ et M. GOZE, Le rang du système linéaire associé à une algèbre de Lie rigide, *Comm. Algebra* (à paraître).

[3] R. CARLES et Y. DIAKITE, Sur les variétés d'algèbres de Lie de dimension $\leqq 7$, *J. Algebra*, 91, 1984, p. 65-82.

[4] Yu B. HAKIMJANOV, Variétés des lois d'algèbres de Lie nilpotentes, *Ouspekhi Mat. Nauk*, 6, 1990, p. 159-160.

[5] Yu HAKIMJANOV, *La variété des lois d'algèbres de Lie nilpotentes*, preprint.

[6] M. GOZE et J.M. ANCOCHEA BERMUDEZ, Varieties of complex nilpotent algebras of dimension 7 and 8, *J. Pure and Applied Algebra* (à paraître).

[7] F. GRUNEWALD et O'HALLORAN, Varieties of nilpotent algebras of dimension less than six, *J. Algebra*, 112, 1988, p. 315-325.

[8] A. A. KIRILLOV et Yu. NERETIN, The variety A_n of n-dimensional Lie algebra structures, *A.M.S. Transl.*, (2), 1987, p. 137.

[9] G. SEELEY, *An irreducible component in the variety of 8-dimensional nilpotent algebras* (à paraître).

[10] M. VERGNE, Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes, *Bull. Soc. Math. France*, 98, 1970, p. 81-116.

Y. H. : *Département Math., Université de Tachkent, Tachkent* 700095, *U.R.S.S.;*
J. M. A. B. : *Dpo. Geometria-Topologia, Fac. de Matematicas, Universidad Complutense*, 28040 *Madrid, Espagne;*
M. G. : *F.S.T., Labo. Math.*, 32, *rue Grillenbreit*, 68000 *Colmar.*