Capítulo 6

LA MATEMÁTICA MENTAL COMO DESTREZA SOCIALMENTE ÚTIL

Carlos de Castro Hernández
Escuela Universitaria La Salle
Universidad Autónoma de Madrid

RESUMEN

La matemática mental –término que engloba el cálculo mental, junto con la estimación en cálculo y el trabajo oral que se hace en el aula con las mismas– es una destreza socialmente útil. Su uso es importante en el desempeño de cualquier profesión y, en especial, en la formación de maestros. Para que pueda ser aprendida adecuadamente y cumpla su función como herramienta para resolver problemas cotidianos, es necesario que sea enseñada dentro de un contexto de resolución de problemas prácticos. En esta situación, el trabajo oral realizado en el aula favorece el desarrollo de la comprensión de conceptos, hace posible que los alumnos aprendan de sus compañeros y brinda al profesor una oportunidad para evaluar los aprendizajes. Para ejemplificar este tipo de situaciones, se muestran ejemplos de estrategias utilizadas por maestros en formación para resolver problemas en los que deben realizar tareas de conversión de euros a pesetas y de pesetas a euros. En este tipo de situaciones, inmersas en un contexto práctico, los alumnos utilizan estrategias alterna-

tivas a las propias del cálculo escrito con las que demuestran una buena comprensión de los conceptos y propiedades de nuestro sistema de numeración. La Didáctica de las Matemáticas, a través de la reflexión que promueve acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje y basándose en resultados de investigación, está en condiciones de aportar a la sociedad un conocimiento instrumental y práctico –bien fundamentado en la teoría– que facilite a los ciudadanos una mejor adaptación a situaciones problemáticas prácticas, como las que están surgiendo en la actualidad como consecuencia del cambio del sistema monetario.

La mayor parte de los problemas de cálculo con los que nos encontramos a diario pueden resolverse mentalmente. De hecho, en muchas ocasiones no disponemos de calculadora –o de papel y lápiz– para realizar cálculos y nos vemos obligados a resolver mentalmente los problemas que se nos plantean en nuestro entorno.

En este trabajo se plantea la importancia que tiene la matemática mental dentro de cualquier profesión y, en especial, dentro de la formación de maestros de Educación Primaria. Se utiliza el término «matemática mental» siguiendo a Cockcroft (1982) que afirma preferir la misma a la de «'cálculo mental', ya que deseamos incluir en nuestra reflexión tanto este último como el trabajo oral, que tan importante papel debe desempeñar en la enseñanza de esta asignatura en primaria» (p. 114). Este autor añade más tarde que «Las matemáticas mentales son útiles, además, para desarrollar las destrezas de estimación» (p. 116). Así, la estimación es útil en la resolución de muchos problemas diarios y el cálculo mental proporciona la base para todos los procesos de estimación[1]. Ambas destrezas están íntimamente relacionadas y ofrecen una gran variedad de técnicas y algoritmos alternativos que posibilitan la resolución de muchas situaciones-problema.

La matemática mental es una destreza socialmente útil. Su conocimiento, dentro del desempeño de cualquier profesión, permite una adaptación mejor a las circunstancias del entorno. Por otra parte, el énfasis especial dado a la formación inicial de los maestros puede justificarse por el carácter especial de la actividad profesional de los mismos como «motor transformador» de la enseñanza de las matemáticas dentro de la sociedad. Ésta solicita continuamente un ajuste de la enseñanza de las matemáticas a las nuevas necesidades que se originan en ella. Como resultado de tales demandas, en la actualidad diversos autores como B. J. Reys y R. E. Reys (1998) o Gómez (1999), recogiendo las orientaciones de distintos documentos curriculares (Ministerio de Educación y Ciencia [MEC], 1992; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989), están señalando la necesidad de que se produzcan cambios en la enseñanza del cálculo. Así, en 1989 el NCTM advertía:

1 La diferencia fundamental que existe entre el cálculo mental y la estimación estriba en que, mientras que en el cálculo mental el objetivo es la obtención de una respuesta exacta, en la estimación es suficiente que el resultado obtenido sea «razonablemente próximo» al resultado exacto del cálculo.

> Cuando hace falta hacer cuentas para dar con la solución de un problema, se debería ser consciente de las distintas posibilidades y métodos. Cuando es oportuno obtener una respuesta aproximada, se debe hacer un cálculo aproximado [...] Muchos problemas se deberían resolver haciendo un cálculo mental (multiplicando por diez, quitándole la mitad). Algunos cálculos, si no son muy complejos, deberían resolverse por medio de los algoritmos normales de lápiz y papel. Para cálculos más complejos debe usarse la calculadora (suma de columnas, divisiones largas). [...] los cálculos aproximados pueden, y deben, usarse en combinación con procedimientos que ofrezcan respuestas exactas para anticiparse a cualquier resultado y poder juzgar su validez. (pp. 8-9)

También en España el currículo para el área de Matemáticas (MEC, 1992) intenta promover este cambio cuando dice: «es importante que los alumnos tengan dominio funcional de estrategias básicas de cómputo, de cálculo mental, de estimaciones de resultados y de medidas, así como también de utilización de la calculadora» (p. 17). En este mismo sentido, B. J. Reys y R. E. Reys (1998) proponen que «una importante meta educativa debería ser ayudar a los alumnos a comprender que existe una gran variedad de herramientas de cálculo y que para ciertas tareas algunas herramientas son más eficientes que otras» (p. 238). Más tarde añaden:

> El papel y el valor de cada herramienta de cálculo deben ser objeto de profundas discusiones. Ciertamente, el cálculo es esencial como herramienta en la resolución de problemas. Sin embargo, el tipo de cálculo (exacto o aproximado) y los métodos utilizados para calcular (mentales, escritos, o con calculadora) son variados, y la enseñanza en la escuela y el currículum deberían reflejar una aproximación equilibrada a esta multiplicidad de herramientas. (pp. 238-239)

Gómez (1999) escribe sobre los cambios que deben producirse en el futuro en la enseñanza del cálculo:

> En la actualidad, la mayor parte del tiempo escolar de primaria continúa dedicándose a la enseñanza-aprendizaje de los algoritmos de cálculo. Sin embargo la mayor parte de los cálculos en la vida diaria se hacen de cabeza o con calculadora. Los educadores deberían preguntarse: ¿Debemos seguir enseñando los algoritmos. Si es así, por qué y cómo? Sobre esto no hay una respuesta consensuada, aunque sí la hay sobre la necesidad de disminuir el énfasis sobre «las cuatro reglas» en favor del cálculo variado: una integración del cálculo escrito, estimado, mental y con calculadora según convenga. (p. 25)

EL TRABAJO ORAL EN MATEMÁTICAS

Como se ha indicado antes, el trabajo oral realizado en el aula juega un importante papel en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. En el Currículo para la Educación Primaria, en el área de Matemáticas (MEC, 1992), se propone como contenido procedimental la «Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos» (p. 20). Las descripciones de los procedimientos utilizados para producir cálculos mentales (o estimaciones) cubren algunos objetivos fundamentales de la enseñanza de las Matemáticas. En primer lugar, favorecen el aprendizaje de los alumnos con menos facilidad para las Matemáticas de las estrategias que utilizan sus compañeros. Los maestros pueden orientar los debates que se producen en el aula con preguntas e indicaciones a fin de que los procedimientos inventados por los niños sean cada vez más eficientes y generalizables. La gestión de este tipo de debates orales se convierte en un aspecto crucial en la metodología de cualquier maestro que desee fomentar la construcción social de conocimientos dentro de la pequeña comunidad matemática del aula. Así, puede verse cómo en el informe Cockcroft (1985) se valoran muy positivamente este tipo de discusiones:

> Profesores y alumnos podrán aprender de las estrategias y métodos que otros miembros de la clase hayan desarrollado y explicado al responder a las preguntas. Precisamente esta explicación del método empleado constituye una experiencia muy valiosa para los alumnos, aun cuando éstos no la encuentren fácil en un principio; más aún, un planteamiento o una respuesta erróneos pueden resultar, si el profesor adopta las debidas precauciones, muy esclarecedores cuando se comentan en clase. La diversidad de puntos de vista brinda excelentes oportunidades de explorar y profundizar la comprensión de todos los miembros de la clase. (p. 115)

Por otro lado, al final del párrafo anterior se hace también una indicación del papel que juega el discurso en el aula en el desarrollo de la comprensión. Para Carpenter y Lehrer (1999) el desarrollo de la comprensión se favorece mediante la construcción de relaciones, la aplicación del conocimiento matemático a distintas situaciones, la reflexión sobre las experiencias, articulando lo que uno sabe y haciendo el conocimiento matemático propio. Estos autores, al hacer referencia a la articulación de los conocimientos, resaltan la importancia que tiene el intento, por parte de los alumnos, de comunicar sus ideas en el aula y explican la función que tiene este intento de comunicación en la mejora de la comprensión:

> La capacidad para comunicar o articular las propias ideas es una importante meta educativa y también es un hito fundamental en la comprensión. La articulación supone la comunicación del propio conocimiento, tanto verbalmente, como por escrito o mediante algún otro medio como dibujos,

> diagramas, o modelos. La articulación requiere que, mediante la reflexión, se esclarezcan las ideas críticas de una actividad a fin de que la esencia de la actividad pueda ser comunicada. En este proceso, la actividad se convierte en objeto del pensamiento. En otras palabras, a fin de articular nuestras ideas, debemos reflexionar sobre ellas con el fin de identificar y describir sus elementos críticos. La articulación requiere de la reflexión, y, de hecho, la articulación puede ser considerada como una forma pública de reflexión. (p. 22)

Para finalizar, debemos valorar la función que tiene el discurso en la evaluación de los aprendizajes. Algunos aspectos del aprendizaje de las matemáticas, y en especial deben incluirse aquí los concernientes a la matemática mental, no pueden ser evaluados adecuadamente mediante pruebas o trabajos escritos. Como advertían Carpenter, Coburn, R. E. Reys y Wilson (1976) la evaluación de la habilidad de estimar plantea importantes dificultades:

> La estimación es un proceso. Por lo cual, no parece creíble que la habilidad de estimar pueda ser evaluada si solamente tomamos en cuenta el resultado final del cálculo. Para obtener una medida válida de la habilidad de un alumno para estimar, posiblemente sea necesario observar al alumno estimando. (p. 299)

LA INFLUENCIA DEL CONTEXTO EN LA ESTIMACIÓN

Cuando se hace estimación en cálculo se suele establecer una diferencia entre ejercicios de operación directa, que son aquellos en los que se plantea una operación con dos o más números quedando claro qué operación debe realizarse, y problemas de aplicación, que son los que contienen datos numéricos inmersos en un contexto de la vida real. El contexto es fundamental para dotar de sentido a la actividad matemática que se realiza en el aula. Esta circunstancia es señalada por Hope (1989) al afirmar que:

> Fuera del colegio los cálculos nunca se realizan simplemente por el gusto de hacerlos. Siempre se hacen en el contexto de resolver problemas prácticos o de llevar a cabo tareas prácticas. En el mundo escolar, sin embargo, los alumnos trabajan con números normalmente aislados del contexto diario. El cálculo normalmente se realiza por sí mismo, y los resultados de los cálculos raramente se aplican a problemas prácticos... Cuando los alumnos calculan sin otro propósito que dar una respuesta considerada correcta por el profesor, a menudo adquieren una forma mecánica de comportamiento antitética con el desarrollo de aquello que entendemos por sentido numérico. (pp. 12-13)

Esta afirmación, que podemos considerar válida para cualquier tipo de actividad matemática, tiene una resonancia especial cuando se refiere a la estimación. En efecto, podemos considerar la estimación como una destreza matemática que carece de sentido en ausencia de un contexto práctico. Esto es debido, en primer lugar, a que es el contexto el que determina la necesidad de una respuesta exacta o aproximada pero además, y más importante que esto, la presencia de un contexto afecta al mismo corazón de la estimación. Dado que la estimación consiste en la búsqueda de un resultado «razonablemente próximo» al resultado exacto de un cálculo, cabe preguntarse: ¿Cómo podríamos determinar la razonabilidad de una estimación? Hope (1989) responde a esta pregunta al indicar que:

> El contexto puede ayudar en la evaluación de la razonabilidad de una respuesta calculada. El contexto práctico puede proporcionar pistas importantes para juzgar si una respuesta es o no razonable. Proporcionando un contexto para un cálculo, los profesores pueden ayudar a los alumnos a identificar las circunstancias implícitas y explícitas de la situación que pueden ser usadas para evaluar la razonabilidad de las respuestas que se producen en la escuela. Sin un contexto, una respuesta parece tan razonable a los alumnos como cualquier otra. (p. 14)

Si planteamos esta problemática desde otro punto de vista, podemos formular la siguiente pregunta: ¿Qué criterio podemos utilizar para evaluar la razonabilidad de una estimación para un cálculo desprovisto de contexto? Una de las «soluciones» que se han dado a esta pregunta en la literatura sobre estimación ha sido el uso de un determinado porcentaje de error. Esta respuesta es el resultado de una falta de comprensión de la diferencia entre la estimación y el cálculo aproximado. Una diferencia fundamental entre la estimación y la aproximación consiste en que en la aproximación «los valores asignados y los resultados obtenidos tienen un grado de proximidad controlada con respecto al dato exacto» (Segovia y otros, 1989, p. 22). El porcentaje de error puede darnos, al hacer cálculos aproximados, una buena medida de este grado de proximidad. Sin embargo, cuando hacemos una estimación, es muy difícil que podamos controlar el tamaño del error cometido. Esto hace que la evaluación de la estimación mediante un porcentaje de error determinado haya sido una opción muy discutida. Ilustramos esta situación mediante el siguiente ejemplo:

Supongamos que debemos dar una estimación para el cálculo 164×378 y que el criterio de evaluación es el de considerar «estimaciones razonables» aquellas cuyo porcentaje de error no exceda el 30%. Si se utiliza el redondeo para producir la estimación (utilizando un dígito significativo de cada número) se obtendrá: $164 \times 378 \approx 200 \times 400 = 80000$ y el porcentaje de error será de un 29,05%, con lo que la estimación será considerada como «razonable». Si ahora pedimos que se realice otra estimación para el cálculo 164×374 y utilizamos la misma estrategia obtendremos:

$164 \times 374 \approx 200 \times 400 = 80000$ y el porcentaje de error será de un 30,43% con lo que la estimación será considerada como «no razonable».

El tipo de situaciones ilustrado en el ejemplo anterior ha conducido a diversos autores a criticar el uso del porcentaje de error para determinar si una respuesta es o no razonable. En sentido podemos interpretar la afirmación de Edwards (1984) al decir:

> Un «porcentaje de error admisible»... no es la manera apropiada de determinar el valor que debemos dar a una estimación que puede haber sido obtenida de muchas formas distintas, algunas ingeniosas, algunas adecuadas a destrezas particulares de algunos alumnos, algunas solamente «afortunadas» o «desafortunadas». [...] De un estimador, de nivel bajo, no se puede esperar que sepa de qué depende la precisión de su estimación. De aquí se sigue, según pienso, que será simplemente una cuestión de suerte el que un método perfectamente respetable produzca o no una estimación dentro de un rango determinado arbitrariamente. (p. 62)

R. E. Reys (1985) profundiza en la diferenciación entre aproximación y estimación al decir que «una respuesta puede ser muy cercana y aún así no ser razonable» (p. 39). Este autor pone el ejemplo de una vez que compró 15 botes de pelotas de tenis, siendo el precio de cada bote de $1.99 y quisieron cobrarle $31.94. En esta situación, cualquier resultado por encima de $30 no es razonable. También Hope (1989) intenta señalar la importancia del contexto al añadir que «la precisión que debemos dar a una estimación depende del uso [que se vaya a hacer de la estimación]» (p. 15). Por otra parte, afirma que «los profesores deberían tener cuidado con no pedir un grado de precisión que no sea realista» (p. 16); y acaba diciendo que «la adecuación de una estimación depende completamente de las circunstancias prácticas» (p. 16).

PROCESOS Y ESTRATEGIAS DE ESTIMACIÓN

Al analizar los procedimientos utilizados en la realización de tareas de estimación en cálculo, suele distinguirse entre procesos y estrategias de estimación. R. E. Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt (1982) identificaron tres procesos cognitivos de alto nivel que se ponen de manifiesto en las estrategias empleadas por los sujetos al estimar: reformulación, traducción y compensación. La reformulación es «el proceso de cambiar los datos numéricos para producir una forma [del problema] más manejable mentalmente. Este proceso deja la estructura del problema intacta» (p. 187); «la traducción es el proceso de cambiar la estructura matemática del problema por otra más manejable mentalmente» (p. 188); y, por último, la compensación se manifiesta en los «ajustes hechos para reflejar variaciones en los números debidas a la reformulación y a la traducción» (p. 189). Se considera que hay un cambio en la estructura matemática del problema (y, por tanto, un proceso de traducción) cuando la sustitución de los datos iniciales produce un cambio en el algoritmo de cálculo empleado para hallar el resultado. Este cambio puede producirse al cambiar las operaciones que se realizan o el orden en que se efectúan las mismas.

Por otra parte, las estrategias pueden definirse como «procedimientos que guían la elección de la destreza que debe emplearse o de los conocimientos a que se debe recurrir en cada etapa de la resolución de un problema» (Cockcroft, 1985, p. 87). En este trabajo se ha seguido el modelo de Segovia y otros (1989, pp. 148-153) para las estrategias de estimación. Según dicho modelo, aplicar una estrategia de estimación consiste básicamente en: sustituir los datos del problema por aproximaciones que permitan reducir la complejidad de los cálculos manteniendo la proximidad necesaria al resultado exacto, efectuar un algoritmo de cálculo (mental) con estas aproximaciones, realizar una compensación (previa o posterior al algoritmo de cálculo) y hacer una valoración del resultado obtenido. Como se ha expuesto, dependiendo del tipo de sustitución que se haga con los datos iniciales y si ésta implica (o no) un cambio en el algoritmo de cálculo, se estará ante un proceso de reformulación o uno de traducción.

Plantear problemas con contexto ayuda a los alumnos a utilizar estrategias más flexibles de estimación. Éstas suelen ser muy distintas de las estrategias empleadas para realizar estimaciones para cálculos desprovistos de contexto. Morgan (1989) afirma que:

> El hecho de que muchos chicos fueran capaces de dar estimaciones razonables en contexto mientras que fallaban en estimar cálculos parecidos fuera de contexto muestra que no estaban simplemente traduciendo el problema verbal en forma de cálculo. Las entrevistas revelan que algunos de ellos estaban utilizando estrategias muy diferentes (y por lo general con mejores resultados) para hacer estimaciones dentro de un contexto. (p. 16)

Morgan (1989) describe también situaciones en que algunas personas realizan tareas de estimación en cálculo sin realizar ningún cálculo. Propone el ejemplo de una niña que realiza una estimación para la siguiente tarea: En un mercado, el precio del queso es de 88.2 peniques el kilo. ¿Cuál será el precio de un paquete que contenga 0.68 kilos de queso? (La respuesta exacta es 59.98 peniques)

> «Eso es cerca de una libra, señorita. Para un kilo es casi una libra. Entonces, diré sesenta y ocho... peniques para aproximadamente... 0.68 kilogramos y es menos que eso [menos de 68 peniques] porque es menos que una libra [el precio del kilo de queso]». (p. 17)

Parece que este tipo de razonamientos y «adivinaciones» se dan sólo en situaciones en las que el cálculo que se debe realizar está inmerso en un contexto práctico. Este tipo de «adivinaciones» requiere cierta comprensión acerca del sistema de numeración –así como sobre el contexto– pero no precisa realizar ningún tipo de cálculo.

LAS ESTRATEGIAS DE ESTIMACIÓN EN LAS TAREAS DE CONVERSIÓN DE EUROS A PESETAS

Algunos investigadores han identificado y descrito estrategias específicas de estimación que suelen aparecer en situaciones en las que se trata de resolver un problema. Por ejemplo, Flores, B. J. Reys y R. E. Reys (1990) observan que «el uso de puntos de referencia fue evidente en muchas entrevistas, en especial en las preguntas relacionadas con porcentaje» (p. 37). Más adelante explican en qué consiste esta estrategia proponiendo el ejemplo de un alumno que, para estimar el 30% de una cantidad, daba la siguiente respuesta:

> «100% es 54215, así que el 50% es como 25000. El 30% es menos, como 18000». Cuando se le preguntó si podía hacer el problema de otra forma, el alumno respondió que se podía encontrar el 1% y luego multiplicarlo por 30 pero que sería más difícil. (p. 39)

Los autores resaltan que el uso de este tipo de procedimientos constituye una muestra evidente de la comprensión conceptual que tienen los alumnos con respecto a los porcentajes. Esta estrategia, que aparece en un problema de cálculo de porcentajes, es típica también de tareas de conversión de euros a pesetas. Vamos a describir cómo se aplicaría la estrategia de «uso de puntos de referencia» en una situación de este tipo.

Supongamos que se pide a un sujeto que estime cuánto puede ser en pesetas la cantidad de 47.31 euros. Seguramente el sujeto conocerá algunas de las equivalencias (aproximadas) representadas en la siguiente tabla:

euros	pesetas
1	166
2	333
3	500
4	666
6	1000

Esta tabla nos proporciona cinco «puntos de referencia» (las equivalencias aproximadas) que pueden utilizarse para resolver el problema. Cualquier problema de estimación en el que se deba realizar una conversión de euros a pesetas puede resolverse partiendo de estos puntos de referencia y realizando varias operaciones básicas que pueden ser de dos tipos: a) suma de puntos de referencia y b) multiplicación de un punto de referencia por un escalar. Para resolver el problema, lo primero que podemos hacer es buscar una referencia «compatible» con cuarenta. Una referencia compatible con 40 es 4 puesto que podemos pasar de 4 a 40 mediante una operación básica (multiplicar por 10). Multiplicando esta referencia por 10 tenemos que:

4 euros $\approx$ 666 pesetas $\Rightarrow$ 40 euros $\approx$ 6.600 pesetas. Por otra parte, el valor de siete euros podemos calcularlo, partiendo de nuestros puntos de referencia, utilizando los valores que tenemos para seis euros y para un euro:

6 euros $\approx$ 1000 pesetas y 1 euro $\approx$ 166 pesetas $\Rightarrow$ 7 euros $\approx$ 1.166 pesetas (sumando referencias). Resolveremos nuestro problema sumando los dos resultados que hemos obtenido en los pasos anteriores:

40 euros $\approx$ 6.600 pesetas y 7 euros $\approx$ 1.166 pesetas $\Rightarrow$ 47 euros $\approx$ 7.760 pesetas.

Vergnaud (1991) afirma que «cualquier problema perteneciente a la categoría de isomorfismo de medidas [como los citados problemas de conversión] puede resolverse mediante uno de los tres siguientes procedimientos canónicos: multiplicación, división y regla de tres» (p. 200). El uso de puntos de referencia puede considerarse un procedimiento no canónico puesto que en él se sustituyen la multiplicación –o la división– por sumas y restas de «puntos de referencia». Además, el uso de esta estrategia supone un proceso de traducción –debido al cambio de operación– y denota una buena comprensión de la proporcionalidad.

A continuación vamos a comparar las estrategias que suelen emplear los maestros en formación, para realizar tareas de estimación descontextualizadas, con las que utilizan al resolver problemas de conversión de euros a pesetas. En primer lugar, se describen las estrategias que suelen utilizarse para estimar el resultado de la operación 65.21 $\times$ 166.386. Estas estrategias pueden aplicarse también –y de hecho se aplican– a la resolución de problemas del tipo: ¿Cuántas pesetas son 65.21 euros?

Problema de estimación en cálculo	$\rightarrow$	Reformulación + Compensación intermedia	$\rightarrow$	Cálculo
65.21×166.386	$\rightarrow$	60×200	$\rightarrow$	12000

En esta estrategia se utiliza el redondeo de ambos números para facilitar el cálculo. Dado que el primer número se redondea «hacia abajo», debemos realizar el segundo redondeo «hacia arriba» para compensar el error introducido en el primer redondeo.

También es posible redondear el segundo número, sustituyéndolo por una fracción, como se indica en la siguiente estrategia.

PEC	$\rightarrow$	Reformulación	$\rightarrow$	Reformulación	$\rightarrow$	Cálculo
65.21×166.386	$\rightarrow$	70×150	$\rightarrow$	$\frac{70 \times 300}{2}$	$\rightarrow$	10500

Otro de los posibles enfoques para este tipo de tareas es el de sustituir[2] 166.386 por la fracción 1000/6 dando lugar al siguiente procedimiento:

PEC	→	Reformulación	→	Traducción	→	Reformulación	→	Cálculo
65.21×166.386	→	$65 \times \frac{1000}{6}$	→	$\frac{65}{6} \times 1000$	→	$\frac{66}{6} \times 1000$	→	11000

En este caso, cuando se altera el orden en que se realizan las operaciones, haciendo la división en primer lugar para simplificar los cálculos, nos hallamos ante un proceso de traducción.

Como se ha advertido, este tipo de estrategias suelen utilizarse también en tareas de conversión de euros a pesetas. Lo que no suele ocurrir es que los sujetos utilicen las estrategias que emplean en contextos aplicados al producir estimaciones para cálculos desprovistos de contexto. El contexto favorece el uso de estrategias alternativas. Las siguientes estrategias han sido utilizadas por maestros en formación para realizar distintas tareas prácticas de conversión de euros a pesetas y de pesetas a euros. En cada caso, antes del esquema que representa la ejecución de la estrategia, se ha añadido –entre corchetes– el problema que se había propuesto al alumno y, a continuación, la transcripción de la respuesta dada por el mismo.

> [65,21 euros son ___ pesetas] Sesenta euros son diez mil. Y cinco coma veintiuno son casi seis, que son mil o sea que once mil, casi once mil. Pues, diez mil ochocientas... cincuenta.

En primer lugar, se busca una referencia compatible con 60 euros. Dado que 6 euros ≈ 1.000 pesetas, tenemos que 60 euros ≈ 10.000 pesetas. A esta cantidad tenemos que añadirle casi 6 euros (5.21 euros), con lo cual sabemos que 66 euros ≈ 11.000 pesetas. Para finalizar, se debe realizar una compensación hacia abajo (dado que se ha añadido 6 euros en lugar de 5.21). Dicha compensación –hecha intuitivamente– nos hace pasar de 11.000 a 10.850 pesetas, que es la estimación definitiva.

PEC	→	Reformulación	→	Cálculo + Traducción	→	Cálculo	→	Compensación final
65.21 euros ≈ ___ pesetas	→	66 euros ≈ ___ pesetas	→	6 euros ≈ 1000 pesetas y 60 euros ≈ 10000 pesetas	→	66 euros ≈ 11000 pesetas	→	65.21 euros ≈ 10850 pesetas

2 La sustitución de 166.386 por 1000/6 es una de las estrategias recomendadas en España, a través de distintas campañas institucionales de publicidad, para realizar las conversiones de euros a pesetas y de pesetas a euros. No es, como las dos estrategias que se han presentado antes, una estrategia que se aplique espontáneamente para estimar cálculos descontextualizados.

> [23,9 euros son ___ pesetas] Veinticuatro euros... Si tres euros son quinientas treinta euros son cinco mil y seis euros son mil pues treinta euros menos seis son... treinta euros son 5000 y seis euros son 1000, pues son 4000.

PEC	→	Reformulación	→	Cálculo + Traducción	→	Cálculo
23.9 euros ≈ ___ pesetas	→	24 euros ≈ ___ pesetas	→	30 euros ≈ 5000 pesetas y 6 euros ≈ 1000 pesetas	→	24 euros ≈ 4000 pesetas

En esta estrategia observamos un redondeo inicial. A continuación, se buscan los puntos de referencia a partir de los cuales es posible obtener la solución mediante una operación sencilla. El proceso de traducción viene dado por la sustitución de una multiplicación por una resta.

> [561 pesetas son ___ euros] Tres euros son quinientas pesetas. Pues un poco más. Como tres con cuatro euros.

PEC	→	Reformulación	→	Compensación final
561 pesetas ≈ ___ euros	→	3 euros ≈ 500 pesetas	→	561 pesetas ≈ 3.4 euros

En este caso, tras elegir la referencia adecuada, el alumno realiza una compensación intuitiva en la que seguramente utiliza como referencia que 0.5 euros ≈ 80 pesetas.

> [2.110 pesetas son ___ euros] Si mil pesetas son seis euros, dos mil pesetas son doce euros y un poco, y casi un euro más pues doce con ocho euros, más o menos.

Aquí el uso de una referencia –166 pesetas ≈ 1 euro–, para valorar la magnitud que se debe dar a la compensación, es explícito.

PEC	→	Reformulación	→	Cálculo + evaluación	→	Compensación final
2110 pesetas ≈ ___ euros	→	2000 pesetas ≈ ___ euros	→	2000 pesetas ≈ 12 euros (166 pesetas ≈ 1 euro)	→	2110 pesetas ≈ 12.8 euros

Las estrategias que han utilizado los alumnos para resolver estos problemas nunca aparecen cuando los cálculos están desprovistos de contexto. Este fenómeno ha sido observado también en otros países de la Unión Europea. Por ejemplo, en Francia, Lemaire y Lecacheur (2001) han llevado a cabo un estudio para averiguar qué estrategias[3] eran

3 De entre varias estrategias enseñadas a los participantes. En un estudio piloto previo, se había investigado qué estrategias eran utilizadas espontáneamente –sin mediar instrucción– por los sujetos en este tipo de tareas de conversión.

las preferidas por niños y jóvenes franceses para hacer conversiones de euros a francos y de francos a euros. También investigaron qué estrategias se aplicaban con mayor rapidez y precisión. Los autores encontraron que la mejor estrategia (en términos de rapidez, precisión y preferencia por parte de los participantes) para convertir francos franceses a euros fue la de «añadir la mitad». Para hacer este tipo de conversión es necesario multiplicar por 0.152449. Si se desea realizar una estimación, basta con multiplicar por 0.15. Esta operación es equivalente a tomar la cantidad en francos, añadir la mitad y dividir por 10. Por ejemplo, 82 francos serán aproximadamente (82 + 41) ÷ 10 = 12.3 euros (La cantidad exacta es 12.5). Como resultado de sus investigaciones, los autores recomiendan la enseñanza de esta estrategia para realizar conversiones de francos a euros.

CONCLUSIONES

En situaciones prácticas, como las que se dan al enfrentarse a tareas de conversión entre distintos sistemas monetarios, los sujetos utilizan estrategias muy distintas de las que usan en situaciones desprovistas de contexto. Estas estrategias son a veces inventadas por los alumnos pero, en otras ocasiones, son el resultado de trabajos de investigación (Lemaire y Lecacheur, 2001). En ambos casos es posible reconocer la aportación de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina que afronta la responsabilidad social de dar respuesta a problemas prácticos que surgen en el seno de la sociedad y que crean incertidumbre en los ciudadanos –como el cambio del sistema monetario–.

La Didáctica de las Matemáticas no puede permanecer ajena a estas demandas sociales. Debe, por el contrario, acogerlas convirtiéndolas en motor de su dinamismo interno. De este modo, como se ha mostrado a través de diversos ejemplos, la Matemática mental es una destreza socialmente útil. La enseñanza de la estimación, a veces definida como una adivinación educada, promueve así el tanteo como procedimiento genuinamente matemático y la creatividad –a través de la invención de estrategias–. No obstante, como hemos advertido, es necesario que esta enseñanza se vincule a la resolución de problemas e imprescindible el trabajo oral en el aula. Sólo a través de este tipo de metodología puede reconocerse la necesidad y el valor de la estimación, evaluarse su aprendizaje y confiar en que el conocimiento de esta destreza favorezca en los alumnos el desarrollo de la comprensión.

REFERENCIAS

Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys, R. E., & Wilson, J. W. (1976). Notes from national assessment: Estimation. *Arithmetic Teacher, 23*(4), 296-302.

Carpenter, T. P., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematical classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Edwards, A. (1984). Computational estimation for numeracy. *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 59-73.

Flores, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1990). Desempeño y estrategias en la estimación en operaciones aritméticas de alumnos de quinto de primaria y segundo de secundaria en México. *Educación Matemática, 2*(1), 30-44.

Gómez, B. (1999). El futuro del cálculo. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 22*, 20-27.

Hope, J. (1989). Promoting number sense in school. *Arithmetic Teacher*, *36*(6), 12-18.

Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2001). Older and younger adults' strategy use and execution in currency conversion tasks: Insights from French franc to euro and euro to French franc conversions. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, *7*(3), 195-206.

Ministerio de Educación y Ciencia (1992). *Primaria. Área de Matemáticas*. Madrid: MEC.

Morgan, C. (1989). A context for estimation. *Mathematics in School, 18*(3), 16-17.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla: SAEM Thales.

Reys, B. J., & Reys, R. E. (1998). Computation in the elementary curriculum: Shifting the emphasis. *Teaching Children Mathematics, 5*(4), 236-241.

Reys, R. E. (1985). Estimation. *Arithmetic Teacher, 32*(6), 37-41.

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Rybolt, J. F., & Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(3), 183-201.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. México: Trillas.