

# Domingo de Soto y el nacimiento de la Mecánica Clásica

TRABAJO FIN DE GRADO

2021/2022



FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

Aura Jiménez Rodríguez

Tutores: Marina Logares Jiménez e Ignacio Sols i Lucía

Madrid, 9 de septiembre de 2022

# Autorización de difusión

Autor

Aura Jiménez Rodríguez

Fecha

9 de septiembre, 2022

La abajo firmante, matriculada en el Grado de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Matemáticas, autoriza a la Universidad Complutense de Madrid (UCM) a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a su autor el presente Trabajo Fin de Grado: “Domingo de Soto y el nacimiento de la Mecánica clásica”, realizado durante el curso académico 2021-2022 bajo la dirección de Marina Logares Jiménez (y con la colaboración externa de dirección de Ignacio Sols i Lucía) en el Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, y a la Biblioteca de la UCM a depositarlo en el Archivo Institucional Docta Complutense con el objeto de incrementar la difusión, uso e impacto del trabajo en Internet y garantizar su preservación y acceso a largo plazo.

# Resumen

En este documento realizamos un análisis revisado de las investigaciones sobre Teoría del Movimiento realizadas por el científico español Domingo de Soto en el siglo XVI sobre cinemática y dinámica, centrado especialmente en aquellas que conciernen al movimiento de caída de graves y en la posible influencia de estas en la obra de Galileo. Para ello, se han consultado las fuentes originales, procediendo a una lectura, búsqueda de traducción e interpretación de su obra *Super Octo Libros Physicorum Aristotelis* (1545), comentario a la Física de Aristóteles.

Apoyándonos en las investigaciones previas realizadas por W.A.Wallace, Kyore, Dunham, Pérez-Camacho e Ignacio Sols i Lucía, hemos hecho hincapié en resaltar la importancia de la figura de Soto no solo como precursor de las ideas de Galileo, que verían la luz un siglo más tarde, sino como figura fundamental de cohesión y revisión del conocimiento relativo a la teoría del movimiento en la Europa del Renacimiento. El estudio realizado tiene como principal objetivo revisar las fuentes originales tanto de Soto como de Galileo para arrojar una nueva perspectiva sobre puntos en los que existen discrepancias entre algunos autores modernos, como son la autoría del concepto de resistencia interna, y la aceptación por parte de Soto de la velocidad del movimiento de caída de graves como un cociente entre fuerza y resistencia.

Además, en el último capítulo del trabajo planteamos la modelización de un problema de física medieval empleando herramientas actualizadas, desde la geometría analítica hasta la programación y optimización no lineal. Esto nos permitirá, no solo expandir el horizonte de resultados que podemos obtener a partir de un problema aparentemente sencillo, sino también analizar desde una perspectiva puramente matemática las cuestiones históricas planteadas en los capítulos anteriores.

## Palabras clave

Domingo de Soto, caída libre, física, Galileo Galilei, aproximación geométrica, masa, modelización, resistencia interna, velocidad

# Abstract

This document consists of a revised analysis of the investigations on Theory of Movement carried out by the Spanish scientist Domingo de Soto in the 16th century on kinematics and dynamics, focused especially on those that concern the movement of free fall and on their possible influence on the work of Galileo. For this, the original sources have been consulted, proceeding to a reading, search of a translation and interpretation of his work *Super Octo Libros Physicorum Aristotelis* (1545), a commentary on Aristotle's Physics.

Based on previous research carried out by Wallace, Kyore, Dunham, Pérez-Camacho and Ignacio Sols i Lucía, we have emphasized the importance of the figure of Soto not only as a precursor of Galileo's ideas, which would see the light a century later, but as a fundamental figure of cohesion and revision of knowledge related to the theory of movement in Renaissance Europe. The main objective of the study carried out is to review the original sources of both Soto and Galileo to shed a new perspective on points in which there are discrepancies between some modern authors, such as the authorship of the concept of internal resistance, and the acceptance by Soto of the speed of the bass drop movement as a ratio of strength to endurance.

In addition, in the last chapter we propose the modeling of a medieval physics problem using updated tools, from analytical geometry to nonlinear programming and optimization. This will allow us not only to expand the horizon of results that we can obtain from an apparently simple problem, but also to analyze from a purely mathematical perspective the historical questions raised in the previous chapters.

## Keywords

Domingo de Soto, free fall, physics, Galileo Galilei, geometric approximation, mass, modeling, internal resistance, speed.

# Índice general

Índice	I
List of Figures	III
Dedicatoria	IV
<b>1. La teoría del movimiento en la Europa Medieval</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción histórica . . . . .	1
1.2. Sobre la aparición de las distintas unidades y magnitudes matemáticas . . . . .	3
1.3. Adimensionalización y parámetros adimensionales . . . . .	4
1.4. Principales problemas abiertos en la Teoría del Movimiento medieval . . . . .	6
1.4.1. Descripción del movimiento de caída de graves . . . . .	6
1.4.2. ¿Se produce el movimiento en proporción a la diferencia o al cociente de la fuerza y la resistencia? . . . . .	7
1.4.3. ¿Cuál es la naturaleza de la resistencia en el movimiento? . . . . .	8
1.4.4. ¿Es posible el vacío? . . . . .	8
1.5. Sobre las proporciones. Thomas Bradwardine. . . . .	9
1.6. El Teorema del Merton College . . . . .	10
1.6.1. Breve historia del cálculo de áreas . . . . .	10
1.6.2. Formulación del Teorema del Merton College . . . . .	11
1.6.3. Demostración del Teorema del Merton College . . . . .	13
<b>2. Aportaciones de Domingo de Soto y repercusión en la física y matemática del siglo XVI y posteriores</b>	<b>17</b>
2.1. La clasificación de los tipos de movimiento por Domingo de Soto y ejemplos fundamentales . . . . .	17
2.1.1. Descripción y clasificación de los tipos de movimiento . . . . .	17
2.1.2. Ejemplos de clasificación de Domingo de Soto . . . . .	19
2.1.3. Ejemplos numéricos de Domingo de Soto . . . . .	20
2.2. Importancia y repercusión de las aportaciones de Soto . . . . .	21
2.2.1. En cuanto a cinemática: . . . . .	21
2.2.2. En cuanto a dinámica: . . . . .	22
2.3. Influencia en autores posteriores: Galileo y Newton . . . . .	22
2.3.1. Newton y el concepto de masa inercial. . . . .	24

<b>3. Modelización matemática actualizada de un problema medieval</b>	<b>26</b>
3.1. El problema a resolver . . . . .	26
3.2. Modelización de los datos del problema . . . . .	27
3.3. Optimización paramétrica. Análisis de sensibilidad y algoritmos mp-QP y p-NSGAI . . . . .	36
3.4. Análisis de los datos obtenidos y correlación con los resultados medievales . .	37
<b>4. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>42</b>

# Índice de figuras

1.1.	Movimiento de un péndulo simple. . . . .	5
1.2.	Representación del movimiento de caída libre. . . . .	7
1.3.	Esquema del Método de Exhaución de Eudoxo para aproximar el área del círculo . . . . .	10
1.4.	Representación de una Suma de Riemann (superior) de una función $f$ . . . .	11
1.5.	Representación de magnitudes según Oresme. . . . .	13
1.6.	Representación de distintos tipos de movimiento. . . . .	14
1.7.	Demostración del teorema del valor medio. . . . .	14
1.8.	Demostración original de Galileo para el movimiento de los cuerpos en caída (s. XVII) [8] . . . . .	16
2.1.	Clasificación de los tipos de movimiento según Domingo de Soto.[29] . . . . .	18
2.2.	Galileo cita a Soto en su manuscrito <i>Juvenalia</i> . Fuente [8] p. 144 . . . . .	23
2.3.	Galileo cita a Soto en su manuscrito <i>Juvenalia</i> . Fuente [8] p. 146 . . . . .	24
3.1.	Representación del movimiento de caída libre. . . . .	27
3.2.	Comparación de las funciones $v_1$ (violeta), $v_2$ (rosa), $v_3$ (azul). . . . .	28
3.3.	Gráficas para $\Lambda = 1$ . . . . .	30
3.4.	Gráficas para $\Lambda = 2, 5$ . . . . .	30
3.5.	Gráficas para $\Lambda = 3$ . . . . .	30
3.6.	<i>Engrosamiento</i> de $g(x)$ . . . . .	30
3.7.	Resultado de la optimización para $\Lambda = 4$ . . . . .	34
3.8.	Resultado de la optimización para $\Lambda = 1$ . . . . .	35
3.9.	Resultado de la optimización para $\Lambda = 2$ . . . . .	35
3.10.	Resultado de la optimización para $\Lambda = 3$ . . . . .	36
3.11.	Resultado de la optimización para $\Lambda = 10^7$ . . . . .	36
3.12.	Resultado de la optimización para $\Lambda = 0,1$ . . . . .	38
3.13.	Gráficas para $\Lambda = 0, \epsilon = 1$ . . . . .	38
3.14.	Gráficas para $\Lambda = 0, \epsilon = 0,2$ . . . . .	38
4.1.	Polinomio de Bézier de grado 5. . . . .	39

# Dedicatoria

A mi Familia, por no perder la fe.

A Marina, por ayudarme a recobrar la confianza.

A Gonzalo, por ser mi esperanza.

# Capítulo 1

## La teoría del movimiento en la Europa Medieval

Domingo de Soto, fraile dominico y teólogo español, estudió y comentó varios libros de física y lógica aristotélica, en su obra *Super Octo Libros Physicorum Aristotelis* (1545). Es en estos comentarios donde Soto da respuesta a algunas de las cuestiones fundamentales de la Teoría del Movimiento que llevaban gestándose desde la *Física* de Aristóteles, sentando unas bases en las que se apoyará Galileo en su trabajo de fundamentación de la física moderna, casi un siglo después.

En este capítulo haremos una introducción histórica a la teoría del movimiento medieval, ya que entender las sutilezas y limitaciones del lenguaje matemático de la época es indispensable para comprender el alcance de las investigaciones de Domingo de Soto y su repercusión en autores posteriores a él.

### 1.1. Introducción histórica

Desde los inicios del pensamiento racional, los seres humanos se han planteado cuestiones acerca de la naturaleza del cambio, y por lo tanto, del movimiento. Lo que hoy conocemos como teoría del movimiento abarca el estudio de los cambios físicos que tienen que ver con el movimiento de la materia, y se divide en dinámica y cinemática. La dinámica estudia el movimiento en relación con las causas que lo producen, mientras que la cinemática describe el movimiento de los objetos sólidos sin considerar las causas que lo originan, esto es, el estudio de la trayectoria en función del tiempo.

Si indagamos en los orígenes de estos estudios sobre teoría del movimiento, podemos remontarnos al siglo VI a.C, cuando el debate entre los filósofos Heráclito y Parménides suspuso una de las controversias más importantes de todos los tiempos, alimentando la filosofía griega durante más de 150 años. Heráclito afirmaba que todo se mueve y todo

experimenta cambios; mientras que Parménides aseguraba que el movimiento y el cambio son imposibles. Es necesario tener en cuenta que para los griegos, el movimiento y el cambio eran exactamente lo mismo, y así, usaban la misma palabra para ambos (*kýnesis*). Un siglo más tarde, los filósofos y pensadores Platón y Aristóteles participaron también de este debate. Es Aristóteles el que plantea una solución en su *Física* que pasaría a ser el modelo aceptado durante más de diecinueve siglos.

En la *Física* de Aristóteles, cada uno de los elementos tiene un “lugar natural” adecuado, determinado por su peso relativo o “gravedad específica”. Cada elemento se mueve, de forma natural, en línea recta —la tierra hacia abajo, el fuego hacia arriba— hacia el lugar que le corresponde, en el que se detendrá una vez alcanzado, de lo que resulta que el movimiento terrestre siempre es lineal y siempre acaba por detenerse. Por otra parte, Aristóteles afirmaba que el movimiento requería de un medio, puesto que él no podía comprender la idea del vacío. Para él, el movimiento de un objeto era inversamente proporcional a la densidad del medio. Cuanto más tenue fuese el medio, más rápido sería el movimiento. Aristóteles creía que si un objeto se moviera en el vacío debía desplazarse en forma infinitamente rápida, lo cual simplemente no ocurría, de forma tal que la materia tenía que rellenar todo espacio vacío.

Así, también concluyó que, como los objetos que veía a su alrededor acababan deteniéndose, eso debía ser lo que sucede siempre, y por ello estableció que los objetos y la materia solo se podían desplazar siempre y cuando una forma de energía los estuviera empujando en una dirección dada. Por lo tanto, si se eliminaran todas las fuerzas que estuvieran aplicadas sobre un objeto, como ocurre al lanzar una piedra, entonces el movimiento no se produciría. En esa línea de pensamiento, Aristóteles sostenía también que los cuerpos más pesados de una materia específica caen de forma más rápida que aquellos que son más ligeros cuando sus formas son iguales. Esta visión sería aceptada ampliamente por las escuelas europeas hasta ser refutada, 1800 años después, por Galileo Galilei.

Por lo tanto, es justo decir que en el siglo XII, cuando en las escuelas andalusíes de Avicena, Averroes y Avempace florece el estudio de la Teoría del Movimiento, aún existían múltiples problemas abiertos al respecto. Entre otros, las siguientes dos cuestiones fundamentales: saber qué era y dónde radicaba la resistencia de un cuerpo al movimiento, y cómo podía expresarse lo que ahora conocemos como la aceleración de un cuerpo. Respecto al problema de la resistencia, esta se entendía únicamente como resistencia del medio, postura que además generaba problemas a la hora de debatir la posibilidad de movimiento en el vacío. Respecto al problema de la determinación de la velocidad media de los cuerpos, los matemáticos andalusíes Avempace y Averroes mantenían dos posturas diferentes. Mientras uno piensa que se trata de una resta entre fuerza y resistencia, el otro piensa que es una cociente, y entre estas posturas quedan divididos los autores hasta el siglo XIV. El estudio

de estas cuestiones fue protagonista durante toda la Edad Media, destacando especialmente en el siglo XIV la escuela de los Calculatores del Merton College de Oxford y los escolásticos como Nicolás de Oresme y Guillermo de Ockham. A principios del siglo XIV, Thomas Bradwardine intenta conciliar ambas posturas, llegando a un resultado erróneo. Es así como durante el periodo de mediados del siglo XIV, la confusión en torno a estos conceptos y las devastadoras consecuencias de la Peste Negra, dejaron a la ciencia en un estado de incertidumbre que sólo vería la luz un siglo más tarde en la época del Renacimiento, donde hará su aparición Domingo de Soto.

La vida de Domingo de Soto (Segovia, 1494 - Salamanca, 1560) se desarrolla principalmente entre dos ámbitos: el religioso y el científico. Confesor del emperador Carlos V, su figura siempre estuvo ligada a la Universidad, ocupando en 1525 la cátedra de Metafísica de la Universidad de Alcalá y en 1532 la cátedra de Teología en la Universidad de Salamanca. De orientación tomista, comentó varios libros de física y lógica aristotélica, entre los cuales se encuentra el libro que es el eje central de este trabajo, *Super Octo Libros Physicorum Aristotelis* (1545). Se trata de un texto sobre tratados y cuestiones a los ocho libros de la Física aristotélica donde Soto expone las ideas redactadas durante un curso impartido en 1522-1523.

## 1.2. Sobre la aparición de las distintas unidades y magnitudes matemáticas

Del latín *mensurabilis*, mensurable es aquello que se puede medir. Para que una propiedad de los cuerpos o de los fenómenos se pueda medir tiene que cumplir unas condiciones muy específicas. Los pitagóricos estaban firmemente convencidos de que una cantidad,  $M$ , se podía medir siempre comparándola con otra cantidad de esa misma magnitud,  $u$ , que se tomaba como unidad.

En el caso de la Física medieval, cuando se habla de magnitudes es siempre de manera abstracta, sin precisar si se hace referencia a metros por segundo o a kilómetros por hora (pues estas son unas magnitudes basadas en el entendimiento moderno de la naturaleza de lo que se mide, que no tenían cabida en el imaginario de los científicos medievales). Es más, si así fuera, el simple hecho de establecer la especificación metros/segundo, o bien, distancia entre dos ciudades/horas a caballo ya estaría desvelando la comprensión de la velocidad como cociente de magnitud distancia y tiempo, una cuestión que precisamente no estaba clara desde la escisión entre Avempace y Averroes, y cuyo origen y autoría discutimos en este trabajo de fin de grado.

Sin embargo, al hablar, por ejemplo, de un objeto que se mueve a velocidad 4, no es

necesario encontrar una especificación de las unidades en las que se encuentra dicha velocidad. Esto se debe a que la ambigüedad favorece el tratar estas unidades como magnitudes estandarizadas (sea 4 metros por segundo u horas que tarda un caballo en ir desde Segovia a Valladolid).

Como los razonamientos y demostraciones presentados son puramente geométricos, y en vista de las consideraciones previas, podemos constatar esta falta de internacionalización de los sistemas de medida sin perder de vista su relativo desinterés para las cuestiones tratadas.

Por otra parte, es relevante mencionar que la aparición de los símbolos que hoy comprenden la notación matemática, tales como  $+$ ,  $-$ ,  $=$  y demás, estaban aún por aparecer, o habían hecho su aparición tan recientemente que su uso aún no estaba extendido y mucho menos estandarizado [3]. Muchos signos surgen como evolución de abreviaturas o grafías utilizadas al escribir en latín, idioma en el cual la escritura matemática tiene sus propios códigos que dificultan la comprensión de textos antiguos a ojos ajenos a la materia. El signo de  $=$ , cuyo origen simbólico puede atribuirse a la similitud geométrica entre dos líneas paralelas entre sí, fue utilizado por primera vez por el matemático Robert Recorde en su obra *The Whetstone of Witte* (1557). El signo  $+$  surge de una evolución de la grafía en forma de cruz de la “t” en la palabra latina “et”. Aparece por primera vez en un manuscrito en la obra *Algorismus proportionum* (aprox. 1356 - 1361) de Nicolás de Oresme (1323 - 1382), aunque este signo podría no estar en la obra original y haber sido escrito por un copista posterior. Antes del siglo XV se utilizaron en Italia, como en otros lugares, las palabras *más* y *menos* (en latín, *plus* y *minus*). De ahí derivaron por abreviatura, las letras “p” y “m” (a veces con una tilde o segmento encima). Estas abreviaturas aparecen por primera vez en la obra *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494), del matemático italiano Luca Pacioli (1447 - 1517), y se siguieron utilizando en los siglos XV y XVI. En Italia, Francia y España, los signos  $+$  y  $-$  empezaron a utilizarse de forma generalizada en el siglo XVII, y no aparecen en la obra original de Soto que he podido consultar en la Biblioteca Nacional, *Super Octo Libros Physicorum Aristotelis* en su edición de 1572.

### 1.3. Adimensionalización y parámetros adimensionales

Al hilo de lo anterior, la idea clave de esta sección es la siguiente: cualquier ecuación que escribamos para un proceso físico modela equilibrios entre mecanismos físicos, sin embargo, no todos ellos pueden ser igualmente importantes, y por lo tanto es posible adimensionalizar el problema para facilitar su modelización.

La experiencia demuestra que podemos considerarnos afortunados si más de dos mecanismos físicos están en equilibrio a la vez. Podemos empezar a evaluar cómo de importantes son estos

mecanismos al escalar todas las variables con valores típicos. Esto es: valores del tamaño que esperamos ver, o bien dictados por la geometría del problema, las condiciones de contorno, etc. De este modo la ecuación se vuelve adimensional: en lugar de un gran número de parámetros físicos y variables, todos ellos con unidades dimensionales, nos quedamos con una ecuación escrita en variables adimensionales.

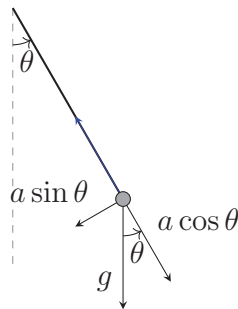
Todos los parámetros físicos y los valores típicos se reúnen en un número más pequeño de parámetros adimensionales que, cuando se interpretan adecuadamente, deben comunicarnos la importancia relativa de los diversos mecanismos. Todo esto es mucho más fácil de ver con un ejemplo [11]:

**Ejemplo 1.3.1.** *A veces, las escalas correctas para una o más variables solo se pueden deducir de las ecuaciones, como en el siguiente ejemplo. El modelo básico para un péndulo amortiguado linealmente que se desplaza un ángulo  $\theta$  desde la vertical (ver Figura 1.1) es:*

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} + k \frac{d\theta}{dt} + g \sin\theta = 0$$

*Y supongamos que se proporcionan el ángulo inicial y la velocidad angular:  $\theta = \alpha_0$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = \alpha_0$  en  $t = 0$ ; donde  $k$  es el coeficiente de amortiguamiento (proporcional a la velocidad) y  $g$  la aceleración de la gravedad.*

$$[k] = [L][T]^{-1}, [g] = [L][T]^{-2}$$



**Figura 1.1:** *Movimiento de un péndulo simple.*

*Combinando los parámetros dimensionales  $l, k, g, \omega_0$ , es fácil ver que hay tres escalas de tiempo integradas en los parámetros de este problema:  $t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}$ ;  $t_2 = \frac{l}{k}$ ;  $t_3 = \frac{1}{\omega_0}$*

*El primero es el período de pequeñas oscilaciones no amortiguadas. El segundo es el tiempo durante el cual el amortiguamiento tiene un efecto. El tercero viene determinado por nosotros: nos dice cuánto tarda el péndulo en recorrer un radián en su velocidad angular inicial si no actúan otras fuerzas. Escalamos el tiempo con  $t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}$ , lo cual hacemos si esperamos ver*

el comportamiento oscilatorio de pequeña amplitud. Entonces, escribiendo  $t = t_1 t'$  tenemos el modelo adimensional:

$$\frac{d^2\theta}{dt'^2} + \frac{t_1}{t_2} \frac{d\theta}{dt'} + \sin\theta = 0$$

Donde  $\theta = \alpha_0$ ;  $\frac{d\theta}{dt'} = \frac{t_1}{t_3}$  en  $t' = 0$  contiene dos parámetros obviamente adimensionales.

$$\gamma = \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{k^2}{gl}}; \beta_0 = \frac{t_1}{t_3} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 l}{g}}$$

El primero de ellos,  $\gamma$ , es la relación entre el tiempo durante el cual el sistema responde al mecanismo físico de la gravedad (el período de pequeñas oscilaciones) al escala de tiempo para la amortiguación. El segundo,  $\beta_0$ , es el cociente de la velocidad inicial del péndulo a los cambios de velocidad inducidos por la gravedad. Hay un tercer grupo adimensional,  $\alpha_0$ , ya que los ángulos son automáticamente adimensionales, y así, el modelo adimensional es:

$$\frac{d^2\theta}{dt'^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt'} + \sin\theta = 0 \quad (1.1)$$

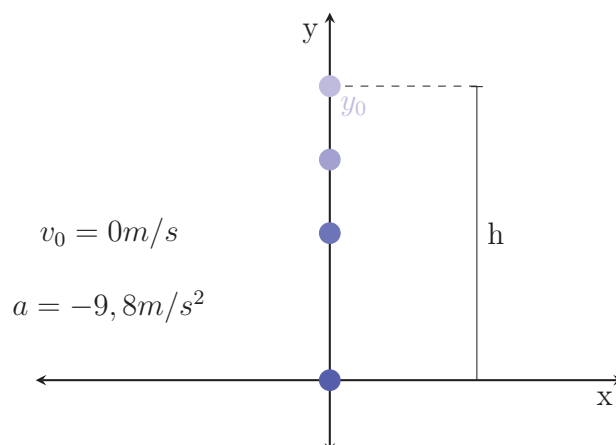
## 1.4. Principales problemas abiertos en la Teoría del Movimiento medieval

Una vez hechas las presentaciones acerca del estado de la comunidad científica en el siglo XVI, vamos a introducir cuáles eran los principales problemas abiertos en esta época.

### 1.4.1. Descripción del movimiento de caída de graves

Este movimiento, hoy conocido en física y matemáticas como movimiento de caída libre, es aquel que posee un cuerpo bajo la acción exclusiva de un campo gravitatorio. En la caída libre un objeto cae verticalmente desde cierta altura  $h$  despreciando cualquier tipo de rozamiento con el aire o cualquier otro obstáculo. Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.) en el que la aceleración coincide con el valor de la gravedad.

Respecto a esta primera cuestión, debemos tener en cuenta que de por sí la clasificación de los tipos de movimiento en este periodo entre los siglos XIV -XVI no era única, más bien todo lo contrario. Tal y como documenta Wallace [29] existe una amplia variedad de clasificaciones de los tipos de movimiento. Wallace estudia hasta 19 autores de distintas escuelas y períodos, encontrando diferencias sustanciales entre ellos tanto en las categorías en sí mismas como en los parámetros respecto a los cuales se hacen estas.



**Figura 1.2:** Representación del movimiento de caída libre.

### 1.4.2. ¿Se produce el movimiento en proporción a la diferencia o al cociente de la fuerza y la resistencia?

Como veíamos, quienes a partir del siglo XII estudiaban la teoría del movimiento, lo hacían divididos en dos escuelas, la de Avempace y la de Averroes. Avempace entendía la relación entre fuerza y movimiento como una magnitud proporcional a la diferencia entre fuerza y resistencia. Dominicos como Tomás de Aquino y franciscanos como Roger Bacon y Duns Scoto [29] se decantan por esta formulación.

Por otra parte, los seguidores de Averroes, entendían esta relación entre fuerza y resistencia como un cociente. Entre ellos, destacan el dominico Alberto Magno (maestro de Tomás de Aquino) y Gil de Roma, obispo de Bourges.

Resulta útil hacer referencia a las órdenes religiosas de cada uno de ellos, ya que las principales vías de estudio y transmisión de conocimientos eran, precisamente, las escuelas asociadas a cada una de ellas, como la de los dominicos, a la que pertenecía Soto, y que le permitió entrar en contacto con los intelectuales franceses e italianos que favorecen más tarde la difusión de sus ideas hasta Galileo [30]. Como mencionamos, no sólo no existía consenso sobre la cuestión de la proporcionalidad de la fuerza y la resistencia, sino que en el siglo siguiente (s.XIV) el prestigioso científico Thomas Bradwardine propondría un resultado que pretendía conciliar las posturas de Avempace y Averroes, y que consistía en una suerte de logaritmo de la resta. El resultado que propone Bradwardine en *De proportionibus velocitatum in motibus* (1328) supone un tema de estudio igualmente complejo e importante, lo mencionaremos más adelante 1.5. Esta teoría, claramente errónea, arrastraría durante los dos siglos posteriores una estela de oscuridad sobre los resultados de aquellos que cultivaban la teoría del movimiento, así como de los llamados Calculatores del Merton College (Thomas

Bradwardine, William Heytesbury, Richard Swineshead, John Dumbleton, Walter Burley y Gerardo de Bruselas), de cuyo Teorema de la Velocidad Media hablaremos en 1.6.

### 1.4.3. ¿Cuál es la naturaleza de la resistencia en el movimiento?

Todos los autores que vamos a citar consideran siempre la resistencia como la ejercida por el medio en el que se encuentra el cuerpo u objeto móvil, ya que aún no se concebía la existencia de una resistencia inherente al cuerpo. Esto lo veremos a continuación en detalle, ya que es precisamente una de las cuestiones clave sobre el trabajo de Soto, en relación precisamente a la autoría del concepto de resistencia interna del objeto.

En el artículo de Sols y Pérez-Camacho [4] sobre Domingo de Soto, se expone que no se ha encontrado una expresión tan clara del concepto de resistencia interna en ningún autor anterior.

Para Soto, una mayor resistencia implica una mayor capacidad de recibir el *ímpetus*<sup>1</sup>. Este es un indicio más de que esa resistencia interna de la que habla Soto es lo que Newton denominaría más adelante masa inercial. Otra consecuencia de esta resistencia intrínseca de la materia es que la velocidad de caída de los cuerpos no dependerá de su tamaño, ni tampoco de su naturaleza. Por tanto, Soto habría respondido a la tercera cuestión de esta manera: Todos los cuerpos caen en el vacío con la misma velocidad, que aumenta de modo uniformemente disforme con el tiempo de caída.

### 1.4.4. ¿Es posible el vacío?

Entendemos como vacío (del latín *vacīvus*) la ausencia total de materia en un determinado espacio o lugar, o la falta de contenido en el interior de un recipiente.

Históricamente, se ha discutido mucho sobre si puede existir el vacío. Los antiguos filósofos griegos debatieron la existencia del vacío, o de la nada, en el contexto del atomismo, que postulaba el vacío y el átomo como elementos explicativos fundamentales de la física. Siguiendo a Platón, incluso el concepto abstracto de un vacío sin rasgos se enfrentaba a un considerable escepticismo. Aristóteles creía que ningún vacío podía producirse de forma natural, porque el continuo material más denso que lo rodeara llenaría inmediatamente cualquier rareza incipiente que pudiera dar lugar a un vacío. En su *Física*, libro IV, Aristóteles ofreció numerosos argumentos contra el vacío: por ejemplo, que el movimiento a través de un medio que no ofrecía ningún impedimento podía continuar *ad infinitum*, no habiendo ninguna razón para que algo llegara a descansar en algún lugar en particular.

---

<sup>1</sup>Quaestiones lib. VIII, vol. 101, col. a.[24]

Así pues, para Aristóteles, y para aquellos que defendían la formulación de Averroes (cociente entre fuerza y resistencia), la existencia del vacío suponía un problema, ya que al no hallar resistencia externa en el vacío, la velocidad del cuerpo sería ¿infinita? El concepto de las magnitudes infinitas escapaba del dominio de los científicos del siglo XVI, por lo tanto esta era una cuestión que daba lugar a grandes discrepancias. El concepto de Soto de resistencia interna del propio cuerpo nos ayudará a dar una respuesta. Citando al profesor segoviano:

“En el movimiento de graves y leves por el vacío, donde no hay resistencia [extrínseca] (...), también son movidos en el tiempo por una fuerza finita” [24]<sup>2</sup>

Considerando entonces únicamente la resistencia interna. Soto tendría dos respuestas:  $v \sim t$  donde  $t :=$  tiempo; y  $v \sim \frac{P}{r}$  donde  $P :=$  peso (fuerza motriz para el grave) y  $r :=$  resistencia interna. La unión de estas dos partes de la ley daría un resultado simple:  $v = \frac{P}{r}t$

Se deduce de sus ejemplos (esto lo veremos un poco más adelante) que entendía la resistencia interna (masa) como proporcional al peso. Si llamamos  $g$  a la constante de proporcionalidad, entonces  $v = gt$ . Por tanto, la velocidad de caída de los graves en el vacío aumenta proporcionalmente con el tiempo, lo cual nos da el mayor acercamiento posible a la respuesta correcta con las herramientas teóricas de la época (este aumento será explicado en las cuestiones al libro octavo).

## 1.5. Sobre las proporciones. Thomas Bradwardine.

Thomas Bradwardine (1290-1349), arzobispo de Canterbury, teólogo y matemático, estudió en el Merton College de Oxford, y se convirtió en supervisor allí. En 1337 fue nombrado canciller de la Catedral de San Pablo, y fué capellán real y confesor del rey Eduardo III. En 1349 fue nombrado arzobispo de Canterbury y poco después murió durante la Peste Negra.

En su tratado *De proporcionalibus velocitatibus in motibus* (1328)[21], Bradwardine afirma que un aumento aritmético de la velocidad se corresponde con un aumento geométrico de la relación original entre fuerza y resistencia. Esta visión errónea dominó las teorías europeas de la mecánica durante casi un siglo.<sup>3</sup> Esta nueva regla fue ampliamente y casi unánimemente aceptada, posiblemente debido a la eficacia de la fundamentación matemática que le proporcionó (esto lo veremos en detalle en las conclusiones del trabajo 3.4).

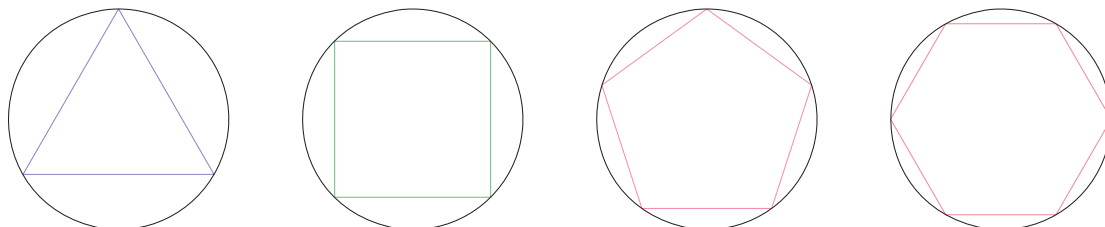
<sup>2</sup>In motu vero gravium aut levium per vacuum ubi nulla est resistentia (...) nempe quod tunc etiam movebuntur in tempore propter finitam virtutem. Quaestiones lib. 7, q. IV, fol. 95, col. d. [24]

<sup>3</sup>Para examinar los argumentos de Bradwardine en contra de una simple ley de proporcionalidad “aristotélica” entre fuerzas, resistencias y velocidades; ver Bradwardine, *Tractatus de proporcionalibus*, pp. 94-105. 20 *Ibid.*, pág. 99

## 1.6. El Teorema del Merton College

### 1.6.1. Breve historia del cálculo de áreas

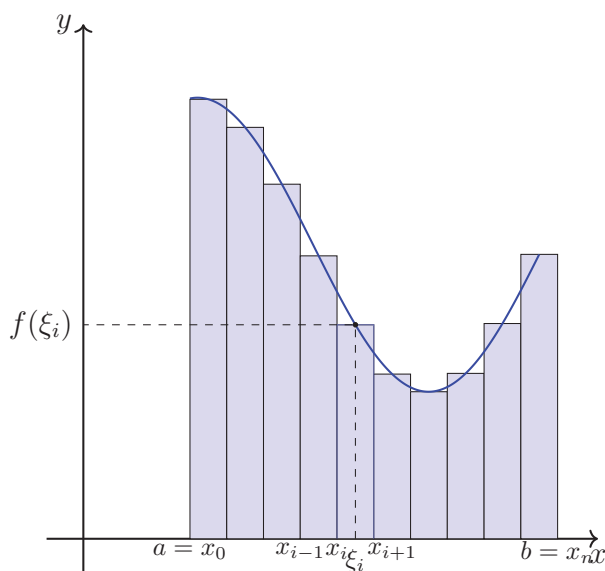
Los matemáticos helénicos (600 a.C. - 300 d.C.) tenían un desarrollo y comprensión limitadas de los conceptos numéricos y por ello no podían medir de manera exacta el área o volumen de algunas figuras y cuerpos geométricos. Por tanto, tenían que *calcular* directamente estas medidas utilizando las propias figuras como magnitudes, es decir, se tomaba la medida sobre el objeto tangible y se comparaba con una unidad de referencia o patrón de la misma naturaleza de lo que se quería medir [15]. De este modo, para estudiar la cuadratura o curvatura de una figura, matemáticos como Eudoxo (408 - 355 a.C.), Euclides (325 - 265 a.C.) y Arquímedes (287 - 212 a.C.) debían comparar su razón con la de otra figura previamente conocida. De este modo desarrollaron una sofisticada teoría de las magnitudes y las proporciones, siendo sobresalientes los trabajos de Eudoxo. Gracias a su Teoría de la Proporción, y en particular al denominado Método de Exhaución, Eudoxo brindó un procedimiento para determinar el área de figuras curvilíneas a través de polígonos que aproximen progresivamente el área al de la figura dada. Este método fue fundamental para la resolución de los problemas infinitesimales de cuadraturas y curvaturas (problemas que intuitivamente usan el cálculo de un límite, aunque aún faltan siglos para que ese concepto sea verbalizado y formalizado).



**Figura 1.3:** Esquema del Método de Exhaución de Eudoxo para aproximar el área del círculo

Posteriormente, también Euclides y Arquímedes aplicaron el Método de Exhaución en gran parte de sus obras (la cuadratura de la parábola, la esfera y el cilindro, la medida del círculo, las espirales, conoides y esferoides,...). Para poder ampliar el uso del método de exhaución a cualquier tipo de región encerrada por una curva, fue necesario esperar a que se produjera el desarrollo de técnicas algebraicas, conjuntamente con el desarrollo de la simbología y notación matemáticas, lo cual tardó aproximadamente dieciocho siglos, como veíamos en la sección 1.2. En particular hubo que esperar a los trabajos de Leibniz (1646 - 1716) quien considera área y volumen como una suma de rectángulos recubridores y define así la primera noción de “integral” bajo una curva. Más tarde, Cauchy (1789 - 1857) y

Fourier (1768 - 1830) continuaron con la idea de Leibniz y lograron una definición precisa de la integral definida de una función como el límite de una suma. Habrá que esperar a la segunda mitad del siglo XIX, cuando Riemann (1826 - 1866) realiza un estudio exhaustivo de las condiciones de estudio del área bajo una curva, para ver formalizarse el grueso de la teoría de integración que estudiamos hoy en día en cursos de Cálculo Integral.



**Figura 1.4:** Representación de una Suma de Riemann (superior) de una función  $f$

Por lo tanto, al hablar del resultado que nos ocupa: el Teorema de la velocidad Media o teorema del Merton College, debemos tener en cuenta el momento histórico en el que se produce y las herramientas y teoría que tenían al alcance sus descubridores para entender la magnitud de este resultado.

### 1.6.2. Formulación del Teorema del Merton College

Retomando los estudios realizados por algunos de los pitagóricos, Platón y Arquímedes abordaron un proceso de matematización de los fenómenos naturales en términos de aquellos que podían ser explicados por la astronomía, y otros, planteados por Aristóteles, sobre la cuantificación del movimiento. Los intelectuales de varias universidades de la Edad Media, como la de París y de Oxford, realizaron aportes significativos a los problemas planteados, siendo uno de los más importantes el formulado por Gerard de Bruselas (final s.XII - principio s.XIII) sobre el movimiento. Este buscaba encontrar una explicación distinta de la aristotélica acerca de las causas y leyes del movimiento [18]. En el segundo cuarto del siglo XIV, un grupo destacado de matemáticos y lógicos asociados con el Merton College de la

Universidad de Oxford, los llamados Calculadores, realizan la diferenciación de la cinemática y la dinámica, proporcionando los elementos conceptuales necesarios para el estudio de movimiento de forma descriptiva desde una nueva perspectiva: introduciendo términos como velocidad y velocidad media, a los que era posible asignar una magnitud. También hacen referencia a las características del movimiento uniforme y del uniformemente acelerado [29].

Es importante señalar que el origen de estos estudios se debe a la aparición de textos como el *Tractatus de Latitudinibus Formarum* (1361) del francés Nicolás de Oresme (1309-1382), donde se abordaba el tema denominado entonces como “La latitud de las formas”. Este texto expone por primera vez, aunque de un modo rudimentario, el sistema de representar gráficamente funciones mediante coordenadas rectangulares. En cuanto a qué se entendía por estos conceptos de forma y latitud, volvemos a entenderlos en el contexto de adimensionalidad que exponíamos en 1.3. Para Riestra [20]: *Con el término forma se refieren a cualquier cualidad o característica que admita variación y la noción de intensidad. Estas incluyen la temperatura, la velocidad, luminosidad, tristeza, etc., con lo cual se aprecia que tan libremente especulaban estos filósofos medievales. La latitud de una forma se refiere al grado con el cual la cualidad es poseída por un objeto o sujeto y se hablaba como objeto de estudio del intensio y remisio de la forma, esto es, del crecimiento o decrecimiento de la intensidad de la cualidad en cuestión.*

La interpretación más interesante de las hechas por los Calculadores es conocida como el Teorema del Merton College o Teorema de la velocidad media [3]:

**Theorem 1.6.1** (Teorema del Merton College). *El efecto de una forma que varía uniformemente o de una que es uniforme en cada una de dos mitades (iguales) es el mismo de otra que es uniforme con una intensidad promedio de la mínima a la máxima.*

Expresado en términos del movimiento [18]:

**Theorem 1.6.2** (Teorema del Merton College). *Un cuerpo que tiene movimiento uniformemente acelerado y que cubre cierta distancia en un tiempo dado, cubriría la misma distancia si se moviera por el mismo espacio de tiempo con una velocidad uniforme igual a la velocidad promedio.*

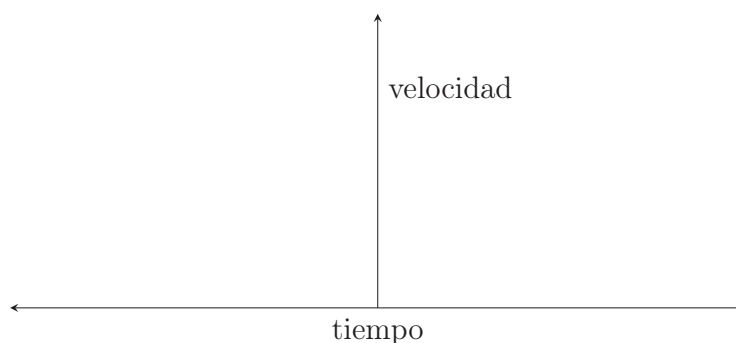
Este es el enunciado de una ley básica de la cinemática, que se emplea a día de hoy. La importancia que toma lo descrito anteriormente como ley, y que se debe observar realmente como una postulación de tipo empírico, pues no se le había dado una explicación formal a la misma, radica en la manera en que se relacionan los dos tipos de movimiento al poder

establecer el espacio que se recorre en el primero en términos del espacio recorrido por el segundo. Es importante mencionar que los razonamientos formulados por los Calculadores de Oxford fueron expuestos retóricamente, sin recurrir a una representación gráfica de los mismos, lo cual permite hacer una exploración de los elementos que se omitieron en ese momento, pero que son necesarios para poder entender el concepto como un cálculo de área bajo la curva tal como se presenta en la actualidad.

Formulaciones como la anterior trascendieron a otras universidades y en particular hasta la Universidad de París, donde será Nicolás de Oresme quien proporcione la comprobación formal del Teorema del Merton College empleando una representación gráfica y aplicando razonamientos puramente geométricos.

### 1.6.3. Demostración del Teorema del Merton College

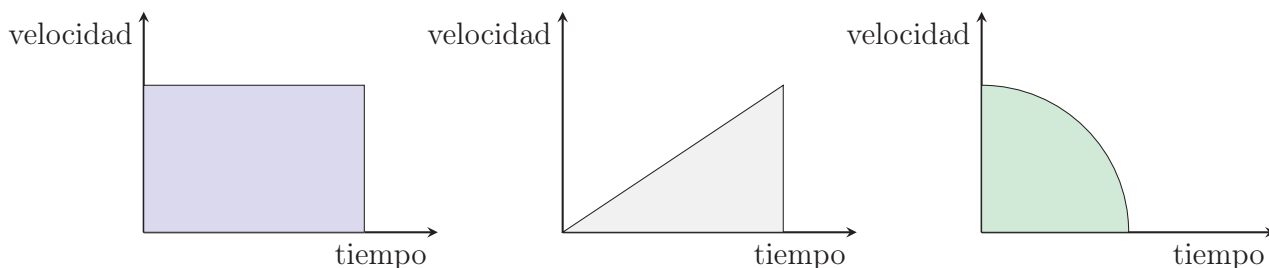
Antes de pasar a la interpretación geométrica del Teorema de la velocidad media, es oportuno mostrar en qué consistió el método empleado por Oresme y dónde radica su importancia. Oresme traza una línea horizontal para representar una de las magnitudes a trabajar, a la que llamó longitud, y trazó un segmento perpendicular a esta que denominó latitud. Esta última es la que indicará la forma en que está cambiando la magnitud.



**Figura 1.5:** *Representación de magnitudes según Oresme.*

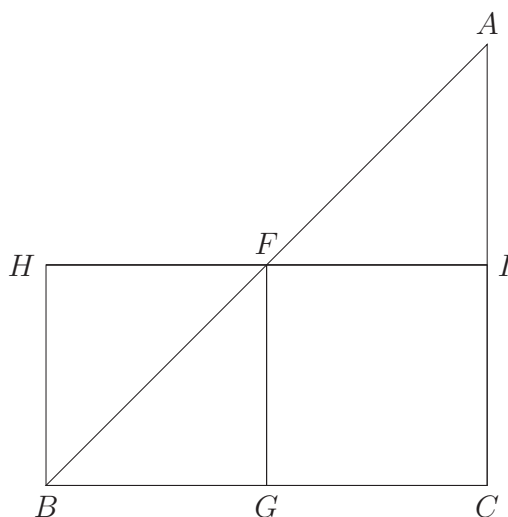
Partiendo de esta idea resultaba posible establecer algunos patrones según el tipo de movimiento que se quería describir, si el movimiento era uniforme los segmentos paralelos de las latitudes eran todos de igual medida formando un rectángulo. Si por el contrario el movimiento era acelerado los segmentos paralelos cambian de tamaño, pero de forma tal que va creciendo de manera proporcional el siguiente con respecto al anterior hasta formar un triángulo o un trapecio; pero, si el movimiento es variado en su totalidad, las líneas paralelas también resultan serlo, de tal suerte que las figuras resultantes podrían ser desde un

semicírculo o una figura totalmente irregular. Para cada una de las representaciones Oresme empleó un nombre. A la figura (a) la denominó uniforme, a la (b) uniformemente disforme y a la (c) disformemente disforme.



**Figura 1.6:** *Representación de distintos tipos de movimiento.*

Partiendo de lo propuesto por Oresme, el camino hacia la demostración del teorema de la velocidad media puede ser reconstruido. Para tal efecto se dibuja un triángulo y un rectángulo, como en la siguiente figura:



**Figura 1.7:** *Demostración del teorema del valor medio.*

El segmento BA representa la velocidad de un objeto que se mueve de manera uniformemente acelerada, empezando desde una posición de reposo en tiempo inicial B, y alcanzando una velocidad final A en tiempo C. El punto H, sobre el eje de ordenadas, representa la velocidad media del objeto, que es la mitad de la velocidad final A puesto que se parte del reposo. Dibujando AC obtenemos el triángulo BAC. Por otra parte, para representar el movimiento uniforme que se produce en el mismo tiempo a la velocidad media del anterior,

trazamos la paralela al eje de abscisas HI y dibujamos el rectángulo BCIH. La recta HI corta a BA en el punto F. Trazando una paralela a AC por F, obtenemos el punto G.

El Teorema indica que la distancia recorrida en un movimiento (el representado por el triángulo BAC) es igual a la distancia recorrida del otro (el representado por el rectángulo BCIH). Para Oresme la distancia recorrida es equivalente (aunque no lo menciona explícitamente) al área de las figuras. Si se prueba entonces que el triángulo HBF tiene el mismo área que el triángulo AFI la demostración quedaría completada. Aunque esto último pueda parecer evidente, como este es un trabajo de contenido histórico, y aprovechando lo aprendido en las asignaturas de Historia de las Matemáticas y Matemática Elemental, vamos a hacer esta demostración al estilo de Euclides, probando la congruencia de triángulos por el criterio *LAL* (Lado - Ángulo - Lado), la Proposición I.4 de los *Elementos*.

**Demostración:**

Sean  $\triangle HBF$  y  $\triangle AFI$ . Para ver que son congruentes probaremos que lo son dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos. Como HI es paralela a BC e I es punto medio de AC, HI corta a BA en su punto medio F. Análogamente, G es punto medio de BC y, por paralelismo, F es punto medio de HI. Además  $\angle BFH \cong \angle FIA$  por ser opuestos por el vértice. Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \angle BFH \cong \angle FIA \\ BF \cong BA \\ HF \cong FI \end{array} \right\} \text{ por (LAL) } \Rightarrow \triangle HBF \cong \triangle AFI$$

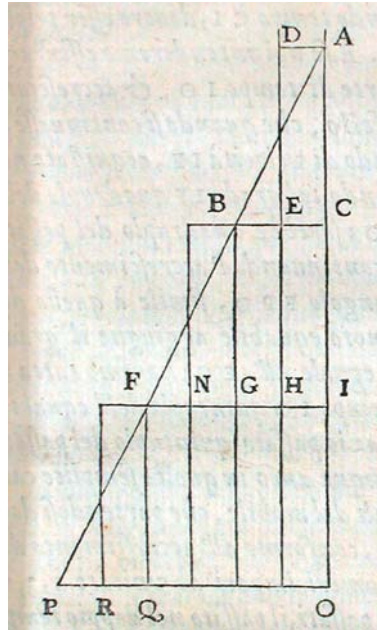
□

Dice Riestra, sobre el enfoque de Oresme: “*Este problema es abordado por Oresme en general, es decir, para cualquier cualidad que tenga la configuración de la figura (1.7) (...) Es en esta instancia que Oresme a partir de la relación entre las áreas concluye lo mismo para los espacios recorridos: el espacio recorrido por el móvil será entonces cuatro veces el espacio recorrido en la primera mitad del intervalo de tiempo*” [20].

**Observación.** *Resulta pertinente aclarar que aún cuando en la obra de Oresme no se dice explícitamente que el área representa el espacio recorrido, este resultado es conclusión evidente del razonamiento anterior.*

**Observación.** *La demostración de Galileo para el movimiento de los cuerpos en caída (s. XVII) fue idéntica a la demostración geométrica del teorema del valor medio hecha por Oresme en el siglo XIV.*

Según cuenta la historia, entre 1589 y 1592, el científico italiano Galileo Galilei (entonces profesor de matemáticas de la Universidad de Pisa) dejó caer dos esferas de distintas masas



**Figura 1.8:** *Demostración original de Galileo para el movimiento de los cuerpos en caída (s. XVII) [8]*

desde la parte alta de la torre inclinada de Pisa para demostrar que el tiempo de descenso es independiente de la masa del cuerpo que cae, de acuerdo con la biografía del alumno de Galileo, Vincenzo Viviani, realizada en 1654 y publicada en 1717 [22].

Galileo estaba convencido de que en un espacio completamente libre de aire, dos cuerpos en caída libre cubrirían distancias iguales en tiempos iguales sin importar su peso. Sin embargo, muchos historiadores consideran que el de la torre de Pisa fue un experimento mental más que una prueba física. Sin embargo, Galileo sí se dio cuenta de que el movimiento de un objeto en caída libre era equivalente al movimiento de una esfera rodando por un plano inclinado. Por lo tanto, diseñó un plano inclinado para estudiar el movimiento de esferas rodando hacia abajo, donde se podría medir el tiempo transcurrido utilizando un reloj de agua.

De acuerdo con dicha historia, Galileo descubrió a través de este experimento que los objetos caen con la misma aceleración, probando que su predicción era cierta, y al mismo tiempo negando la teoría gravitatoria aristotélica que enunciaba que los objetos caían a una velocidad proporcional a sus masas.

## Capítulo 2

# Aportaciones de Domingo de Soto y repercusión en la física y matemática del siglo XVI y posteriores

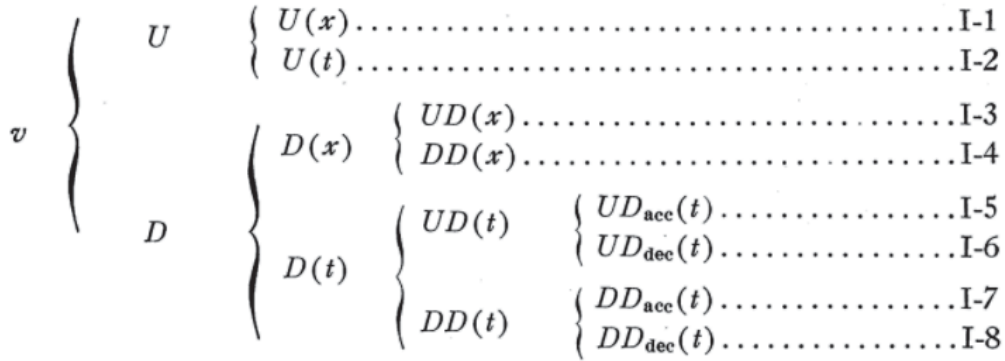
### 2.1. La clasificación de los tipos de movimiento por Domingo de Soto y ejemplos fundamentales

Como resultado de una extraordinaria labor de investigación y recopilación de textos sobre Teoría del Movimiento medieval, W.A Wallace afirma en su ensayo *The Enigma of Domingo de Soto: Uniformiter difformis and Falling Bodies in Late Medieval Physics* [29] que Domingo de Soto es el primero en dar una clasificación correcta y completa de los tipos de movimiento, que además ilustra con ejemplos que demuestran su total comprensión de la misma.

#### 2.1.1. Descripción y clasificación de los tipos de movimiento

En las distintas clasificaciones hechas por los estudiosos de la época, las distinciones entre U y D se aplicaron generalmente a la intensificación de cambios o movimientos; aplicado al movimiento local *intensidad* se convirtió en sinónimo de velocidad o de el cambio de esta, y por lo tanto, adjetivos calificativos como *uniforme* y *disforme* llegaron a tener un significado cinemático. Para nosotros, un movimiento uniforme U es uno con velocidad constante  $v$ , mientras que un movimiento disforme D tiene una velocidad cambiante. Además, un movimiento puede ser uniforme en cualquiera de estos dos sentidos: con respecto a las partes del objeto movido, denotado U (x), en la medida en que todas las partes del objeto se mueven con la misma velocidad; o con respeto del tiempo, simbolizado U (t), en el sentido de que la velocidad del objeto en su conjunto permanece constante durante un intervalo de tiempo.

SCHEMA I



**Figura 2.1:** Clasificación de los tipos de movimiento según Domingo de Soto.[29]

Esta distinción también se puede aplicar para movimientos disformes, produciendo los dos tipos correspondientes,  $D(x)$  y  $D(t)$ . Con la disformidad, además, puede introducirse una serie adicional de distinciones.

Un movimiento disforme con respecto a las partes del objeto movido puede ser uniformemente disforme  $UD(x)$ , en el sentido de que hay una variación (espacial) uniforme en la velocidad de las diversas partes del objeto, o disformemente disforme  $DD(x)$ , en el sentido de que no existe tal variación (espacial) uniforme. Nuevamente, el movimiento puede ser uniformemente disforme con respecto al tiempo,  $UD(t)$ , o disforme en el mismo sentido,  $DD(t)$ . Ambos, a su vez, pueden subdividirse sobre la base de la dirección del cambio, es decir, si está aumentando o disminuyendo, para producir movimiento uniformemente acelerado  $UD_{acc}(t)$ , y movimiento uniformemente desacelerado,  $UD_{dec}(t)$ , o alternativamente, movimiento de aceleración disforme,  $DD_{acc}(t)$ , y movimiento de desaceleración disforme,  $DD_{dec}(t)$ . Las ocho posibilidades resultantes, de las cuales de todas es posible extraer una ejemplificación, se muestran en la Figura 2.1; en adelante los índices a la derecha servirán para enumerar tipos particulares de movimiento.

Los resultados muestran que Soto sigue siendo probablemente el primero en asociar la expresión *uniformiter difformis* (con respecto al tiempo) con el movimiento de los cuerpos en caída libre, algo resultado de una progresión de esquemas y ejemplificaciones utilizados en la enseñanza de la física desde el siglo XIV al XVI. A continuación detallaremos una lista de los ejemplos que propone Soto para cada uno de los movimientos.

## 2.1.2. Ejemplos de clasificación de Domingo de Soto

La mayoría de los ejemplos que da Soto no son originales, ya habían sido utilizados por uno o más de sus predecesores [30]. Aquí damos una lista de aquellos relevantes en la cuestión de la clasificación, aunque la obra de Soto contiene numerosos ejemplos de toda clase para ilustrar sus enseñanzas de manera práctica.

**Ejemplo 2.1.1.** *Para el tipo I-1, da el caso de una piedra de un pie de longitud extendida sobre una superficie plana (“si . . . pedalem lapidem trahas super planitiam”)*

**Ejemplo 2.1.2.** *Para el tipo I-2 menciona el movimiento invariante de los cielos (“in regulatissimo motu celorum perspectum est”)*

**Ejemplo 2.1.3.** *Para el tipo I-3, la rotación de una piedra de molino (“mola frumentaria”)*

Ejemplificar el tipo I-4 es más complicado: Soto no puede proporcionar un ejemplo que implique movimiento local y, por lo tanto, da uno que implique cambios cualitativos, como es el caso del calentamiento. Su ejemplo es:

**Ejemplo 2.1.4.** *El ejemplo de I-4 es un objeto de cuatro pies de largo que está tan alterado (cambiado en el sentido de siendo calentado) en una hora que su primer pie (de tamaño) adquiere uniformemente un grado de calor, y el segundo uniformemente dos grados, el tercero tres, etc.*

Para lo cual proporciona el diagrama de una función escalonada. Soto observa que este tipo de movimiento no es especialmente relevante, pero que ha dado este ejemplo por la sencilla razón de que un movimiento local de este tipo es difícilmente posible: el movimiento rectilíneo debe ser uniforme en este sentido, y el movimiento rotatorio sólo puede ser uniformemente disforme.

Los tipos I-5 y I-6 Soto los define en conjunto y luego observa que “se encuentran en objetos que se mueven de forma natural y en proyectiles”. Argumenta, para estos, lo siguiente:

**Ejemplo 2.1.5.** *Porque cuando un objeto pesado cae a través de un medio homogéneo desde una altura, se mueve con mayor velocidad al final que al principio. La velocidad de los proyectiles, por otro lado, es menor al final que al principio. Y lo que es más, el [movimiento del] primero aumenta de modo uniformemente disforme, mientras que el [movimiento del] segundo disminuye de manera uniformemente disforme.*

Más adelante en el texto, mientras discute el mismo caso, “movimiento uniformemente disforme con respecto al tiempo”, Soto elimina cualquier posible ambigüedad en cuanto a lo que se refiere con *uniformemente disforme* al hacer la observación que sigue:

**Observación.** *Si la velocidad de un objeto que se mueve uniformemente diferente debe ser a juzgar por su velocidad máxima, como cuando un objeto pesado cae en una hora con un aumento de velocidad de 0 a 8, ¿debería decirse que se mueve con una velocidad de 8?*

Su respuesta es en términos del Teorema de la velocidad media del que hablamos en la sección anterior, ya que Soto se decide a favor de la velocidad media (“*gradus medius*”) en oposición a la máxima. Lo justifica con la observación:

**Observación.** *Por ejemplo, si el objeto en movimiento A sigue aumentando su velocidad de 0 a 8, cubre tanto espacio como [otro objeto] B que se mueve con una velocidad uniforme de 4 en el mismo [período de] tiempo.*

Por lo tanto, no cabe ninguna duda sobre su comprensión del término *uniformiter difformis* y cómo esto se debe aplicar al hablar de objetos en caída libre. Finalmente, para ejemplificar los tipos I-7 y I-8 Soto recurre al movimiento de los animales y a otros cambios biológicos, afirmando:

**Ejemplo 2.1.6.** *Un ejemplo sería si algo se moviera durante una hora, y durante una parte [de la hora] se moviera uniformemente con una velocidad de uno, y en otra [parte] con una velocidad de dos o tres, etc., como se experimenta en el movimiento progresivo de los animales. Este tipo de movimiento ocurre con frecuencia en la alteración de los cuerpos de los animales, y quizás pueda tener lugar en movimientos de aumento y disminución.*

Aunque se alude principalmente al tipo I-7, la mención de la disminución al final (aunque no es estrictamente un movimiento local) indica que también es consciente de las variaciones decrecientes y, por lo tanto, incluye implícitamente el tipo I-8 en su ejemplificación.

### 2.1.3. Ejemplos numéricos de Domingo de Soto

Donde se ejemplifica que la velocidad se da como cociente de magnitudes:

*“Si Pedro lanza una piedra con proporción doble entre su fuerza motriz y la resistencia de la piedra, en el caso de [que lance en cambio] una doblemente menos pesada, sobre la que posee una proporción doblemente mayor (...)”<sup>1</sup>.*

Ejemplos como este hacen referencia a que la velocidad del movimiento en caída de graves, se relaciona con la fuerza y la resistencia mediante un cociente, una proporción

---

<sup>1</sup>Et si Petrus iaciat lapidem a proportione dupla inter vi:n suam motricem, & lapidis resistentiam, tñ lana duplo leuiorem, super quam habet duplo maiorem proportionem [9]

geométrica. Este es el punto clave de la obra de Soto, ya que arrojará luz sobre una cuestión largamente formulada en los círculos científicos desde el siglo XII. Como hemos visto al hablar del contexto histórico en el que se enmarcan estos descubrimientos, existía aún una gran confusión entre los seguidores de la escuela de Avempace y los de la de Averroes. Domingo de Soto, se decanta por el cociente sentando un precedente que, como señalan Wallace y Duhem, será fundamental para el desarrollo de las investigaciones de Galileo sobre la dinámica de los objetos. Galileo, conocedor de la obra de Soto, que habría llegado a sus manos a través de los escolásticos italianos [29], da forma entonces a lo que serán los fundamentos más sólidos que la física había conocido hasta el momento. Más adelante, ya en el siglo XVII, el propio Isaac Newton recogerá esta herencia de Galileo para formular las Leyes de Newton y constatar así el inicio de una nueva ciencia.

## 2.2. Importancia y repercusión de las aportaciones de Soto

Con base en los estudios previos realizados por Wallace, Duhem, Sols y Pérez-Camacho; que adjudican a Soto no solo la autoría sino además el haber sido el primero en poner de manifiesto todos estos conceptos en una obra de carácter académico (*Super Octo Libros Physicorum Aristotelis*, 1545), resumimos pues las diversas aportaciones de Soto y su respectiva repercusión en la ciencia:

### 2.2.1. En cuanto a cinemática:

Soto realiza una clasificación completa de los tipos de movimiento y adjudica la caída de graves a lo que él es pionero en denominar movimiento uniformiter difformis, esto es, uniformemente disforme [29]. A día de hoy esto se corresponde con una clasificación aún vigente: la de MRUA o movimiento uniformemente acelerado. Además, Soto considera la medida de la velocidad del movimiento *uniformiter difformis* (MRUA) por la velocidad media en vez de por la velocidad final. Esto es de gran importancia, ya que debido a las diferentes clasificaciones de los tipos de movimiento que desarrolla Wallace en su artículo, algunos autores aún se refieren a la velocidad final como la magnitud escalar de sus estudios. Soto da un ejemplo ilustrando cómo esto supone un error, y así lo reproducimos a continuación Ejemplo de Soto (velocidad media) “*Si la velocidad de un móvil que es movido uniformemente disforme ha de ser denominada por su velocidad máxima, como en el caso de un grave que cayera durante una hora desde velocidad nula hasta 8, ¿ha de decirse movido*

con velocidad 8?”<sup>2</sup>. Este ejemplo muestra cómo el concepto de velocidad de Soto responde en términos del Teorema de la Velocidad Media del Merton College, ya que es partidario de nombrar la velocidad del movimiento uniformemente disforme por la velocidad media, no por la máxima.

Su ejemplo termina de aclarar el asunto: “Si el móvil A, durante una hora, va aumentando siempre su velocidad de 0 a 8, recorre precisamente tanto espacio como [otro móvil] B que se mueve con velocidad uniforme de magnitud 4 en el mismo [período de] tiempo”<sup>3</sup>. No cabe duda sobre su correcta comprensión del término *uniformiter difformis*, y de cómo se aplica a un objeto en caída de graves.

### 2.2.2. En cuanto a dinámica:

Para Sols y Perez-Camacho, las palabras textuales de Soto “La velocidad del movimiento es alcanzada en cuanto a la causa según la proporción de los agentes sobre sus propias resistencias”<sup>4</sup>. La expresión “*proportionen proportionum*” no está libre de confusión. En la tradición de Bradwardine la proporción de proporciones se entendió como una progresión geométrica, que conduce a la anteriormente citada expresión y  $\log(\frac{f}{r})$ . Sin embargo, no todos los autores medievales y renacentistas entendieron esto. Un ejemplo es Giovanni Marliani (1420 - 1483), quien por “*proportionen proportionum*” entendió la simple razón entre el motor y lo movido [14]. Nos hemos inclinado por esta interpretación en el caso de Soto ya que a la luz de sus ejemplos numéricos se elimina toda posible duda respecto a que se refiere a la ley:  $v \sim \frac{\text{fuerza motriz}}{\text{resistencia interna}}$ .

## 2.3. Influencia en autores posteriores: Galileo y Newton

En sus estudios, Soto une los dos conceptos sobre los que se cimienta lo que hoy conocemos como la cinemática o el estudio del movimiento de los cuerpos. Estos son: el movimiento uniformemente disforme, a lo que hoy llamamos movimiento uniformemente acelerado o MRUA y la caída de graves. Esta relación es ni más ni menos que el principio que Galileo buscaba en 1604 para establecer el fundamento de la cinemática. Curiosamente, Galileo al principio no partía de esta concepción, ya que seguía una corriente equivocada que consideraba que

<sup>2</sup>Utrum velocitas niobilis uniformiter difformis no li sil denominanda a grado velocissimo, ut si grave decidat in una hora velocitate a non gradu usque ad 8. discendus sil moverit ut 8. [6]

<sup>3</sup>Si .a. mobile una hora moveatur intendendo semper motum non a grado usque ad .8. tantudem spatii transmittet, quantum .b. quod per simile spatium eodem tempore uniformiter moveretur, ut .4. [7]

<sup>4</sup>Velocitas motus penes causam attenditur penes proportionem proportionum agentioni super suas ipsarum resistentias [8]

la velocidad era uniformemente disforme con respecto al espacio en vez de con respecto al tiempo [29]. Fue más tarde, en 1609, y después de haber leído a Soto, que publica sus ideas sobre la caída de graves en *Quaestiones Super Octo Libros Physicorum Aristotelis* en el año 1545, cuando se dió cuenta de su error.

Para establecer la correlación dentre Domingo de Soto y Galileo Galilei, es necesario mirar hacia las fuentes de las que beben ambos autores, ya que Galileo llega a conocer las ideas de Soto, no por él mismo sino por sus discípulos, al moverse en los círculos de estudiosos dominicos, orden religiosa a la cual pertenecía Soto.

En primer lugar hay que resaltar que las ideas de Soto son originales y que no corresponden a un conocimiento colectivo de la época. William Wallace en *The Enigma of Domingo de Soto: Uniformiter Difformis and Falling Bodies in Late Medieval Physics* estudia a 19 autores anteriores y contemporáneos a Soto con el resultado de que Soto es el único que parte de describir el movimiento con una sólo variable independiente que es el tiempo. Los demás tratan de describirlo con dos variables independientes, el tiempo y el espacio, lo que no les permitió llegar a la descripción correcta. Curiosamente hay otro que partió de utilizar una sola variable, pero utilizó la espacial, un español llamado Diego Diest. Galileo cita a Soto en dos ocasiones aunque no relacionadas con la caída de graves, que señalamos a continuación y que se encuentran en la obra *Le Opere di Galileo Galilei* [8] :

Deus potest supplere concursus cuiuscunque' causae extrinsecae; ergo [etc.]. De qualitatibus vero Scotus et Durandus in 3<sup>o</sup> distinctione 13, Richardus et Aegidius in p.<sup>o</sup> distinctione 17, Henricus quodl. 5 q.<sup>o</sup> 22, Caietanus 3<sup>a</sup> parte q. 7 et q. 10 art. 4, et 2<sup>a</sup> 2<sup>ae</sup> q. 24 art. 7, loquentes de qualitate gratiae, negant, qualitatem posse augeri in infinitum intensive; quia, cum aliae qualitates a gratia sint creatae et limitatae, proprietates essentiae debent habere certum terminum, licet 10 intrinsecum, in intensione. At vero Capreolus in 3<sup>o</sup> distinct. 13 q. p.<sup>o</sup> et p.<sup>o</sup> dist. 17 q. 4, Almainus et Gregorius ibidem, Occam ibidem et in 3<sup>o</sup> distinctione 13 q. 7, **Sotus** p.<sup>o</sup> Phys. q. 4 art. 2<sup>o</sup>, ubi ostendit hanc esse sententiam D. Thomae in De veritate q. 29 art. 3; quod si, 13 part. q. 7 art. 12, videtur dicere contrarium, debet intelligi de lege ordinaria; dicunt: licet qualitas de se habeat certum terminum in intensione, tamen de potentia absoluta potest augeri. Et potest assignari haec ratio: quia qualitates non sunt ita intrinsece instrumenta formarum, ut essentialiter includant latitudinem debitam formae. Ad hanc sententiam accedunt Bonaventura et Cartarius. Equi- 20

**Figura 2.2:** Galileo cita a Soto en su manuscrito *Juvenalia*. Fuente [8] p. 144

Traducción del texto: “las propiedades de la esencia deben tener un límite fijo, aunque 10

*intrínseco, en intensidad, pero de hecho Capreolus distingue en 3°, 13 q.p. y P. en dist. 17 p. 4, Almainus y Gregory en el mismo lugar, Occam en el mismo lugar y en 3° distinción 13 q. 7, Sotus p.° Phys. q. 4 arte. 2, donde muestra que esta es la opinión de Santo Tomás en De Verity, q. 29 arte. 3; si, 13 parte. q. 7 arte. 12, parece decir lo contrario, debe entenderse de la ley ordinaria; dicen: aunque la calidad de la misma se fija al menos tres veces en intensidad, todavía se puede aumentar desde la potencia absoluta.”*

Prima opinio est dicentium, omnes res naturales, praeter elementa, habere terminos magnitudinis et parvitatatis intrinsecos; elementa vero habere terminum intrinsecum parvitatatis, magnitudinis vero nullum: ita D. Thomae in p.° Phys. t. 36, 38, De generatione t. 41, et p.ª parte q. 7 art. 3; Capreoli 2° dist. 19; Soti p.° Phys. q. 4; et Thomistarum omnium. Probatur, primo, auctoritate Aristotelis p.° Phys. 36, 20 ubi hoc dicit; et t. 38 affert argumentum contra antiquos, quod, si non datur maximum et minimum, nihil valeret. Sic enim concludit contra Anaxagoram: Si ex quolibet potest quodlibet separari, non datur minimum; sed omnes res naturales habent minimum; ergo etc.

**Figura 2.3:** Galileo cita a Soto en su manuscrito *Juvenalia*. Fuente [8] p. 146

Traducción del texto: “La primera opinión es la de quienes dicen que todas las cosas naturales, excepto los elementos, tienen límites intrínsecos de magnitud y pequeñez; los elementos, sin embargo, tienen un límite intrínseco de pequeñez, pero ninguno de grandeza, así Santo Tomás en p.Soti, Phys., q.4, y tomista de todas las cosas: está probado, primero, por la autoridad de Aristóteles en Phys. porque así concluye contra Anaxágoras: «Si algo puede separarse de algo, no hay un mínimo, pero todas las cosas naturales tienen un mínimo, por lo tanto, etc.»”

### 2.3.1. Newton y el concepto de masa inercial.

El concepto de *Resistentia Interna* (Resistencia Interna) de Domingo de Soto, constituye un antecedente indudable de la *resistenza interna* de Galileo, y se encuentra muy próximo a la masa inercial de Newton. No hemos encontrado una expresión tan clara del concepto de resistencia interna en ningún autor anterior a Soto [4]. El concepto de resistencia interna (que Newton llamaría masa inercial) es claro en Domingo de Soto. Veamos a continuación algunos de los ejemplos más claros de ello:

“Por que, ¿no es absurdo (ineptitud) decir que a mayor mole, mayor resistencia?”<sup>5</sup>

<sup>5</sup>?Quare non dicierur inepte quod major mole major est quodanimodo resistentia’, Quaestiones lib. 7.

También en las *Quaestiones lib. 7*, tenemos:

*“Lo que es movido es una resistencia, que ha de ser superada por la fuerza motriz.”*<sup>6</sup>

Sobre el carácter de esta resistencia, vemos que Soto la entiende como interna y no sólo la resistencia externa del medio. Esta resistencia interna es proporcional al peso, y debe ser superada para producir el movimiento. Sin duda es un claro antecedente de la *resistenza interna* de Galileo, ya que la distinción entre peso y masa está implicada en la hipótesis de Galileo de que en el vacío todos los cuerpos caerían con la misma aceleración. Para Soto, una mayor resistencia implica una mayor capacidad de recibir el ímpetus. Este es un dato más que sostiene la hipótesis de que esa resistencia interna es lo que Newton llamaría masa inercial. Aún más claramente es expresado por su discípulo Francisco de Toledo [26]:

*“La velocidad del movimiento consiste en el exceso de la fuerza sobre la resistencia: (...) porque la resistencia está en el cuerpo.”*<sup>7</sup>

Y también:

*“El caballo no es fuerza motriz pura, sino que a la vez tiene resistencia, pues su cuerpo le resiste, y no sólo el peso. (...) No sólo la piedra tiene resistencia, sino la densidad del aire, (...), por las que resisten a la fuerza motriz.”*<sup>8</sup>

---

q. IV, fol. 95. col. d.

<sup>6</sup>(Quod movetur est resistentia quae a virtute motrice superanda est, Quaestiones lib. 7, q. IV, fol. 93. col, e.)

<sup>7</sup>F.Toledo. op. cd, p. 447. ¡Quia resistentia est in corpore!

<sup>8</sup>F.Toledo. op. cii., p. 448.

## Capítulo 3

# Modelización matemática actualizada de un problema medieval

Una vez analizados los métodos que emplearon Bradwardine, Soto y Galileo en el periodo de los siglos XIV - XVII para abordar el problema de la modelización del movimiento *uniformiter difformis*, en este capítulo daremos un salto técnico de cinco siglos para diseñar un experimento propio. Apoyándonos en los métodos numéricos y herramientas de modelización conocidas en la actualidad, trataremos de determinar si la formalización correcta que hace Domingo de Soto del problema del movimiento como  $v = \frac{f}{r}$  es compatible con la de Bradwardine  $v = \log \frac{f}{r}$  en el rango de datos que manejaban los autores medievales, y por lo tanto fácilmente confundibles entre sí. Además, estudiaremos cuál es la solución en función de varias variables sobre las cuales daremos condiciones para que el problema se resuelva con una tasa de error aceptable.

El objetivo de este capítulo es entonces determinar si, asumiendo el error en las mediciones que pudieran cometer Soto y Bradwardine, sus modelos resultan razonadamente similares para los casos que manejaban. Teniendo en cuenta la poca precisión de los instrumentos de medida de la época y las limitaciones técnicas, pretendemos dar así una justificación de por qué se dió la confusión entre ambos modelos durante los siglos XIV-XVI.

### 3.1. El problema a resolver

En todo momento haremos referencia a un experimento del tipo caída libre (I-5 según la clasificación de Soto 2.1.5), aunque el estudio para otros tipos de movimiento es igualmente interesante y quizás halle lugar en un trabajo posterior. Como nota histórica, un experimento de estas características (similar al supuestamente planteado por Galileo en Pisa) se llevó a cabo varios años después en Delft, Países Bajos, donde Simon Stevin y Jan Cornets de Groot (matemático y físico, respectivamente) realizaron el experimento desde lo alto de la

iglesia Nieuwe Kerk. El experimento es descrito en un libro de Stevin de 1586: *De Beghinse-len der Weeghconst (Los principios de Estática)*, un manual sobre el estudio de la estática:

“Vamos a tomar (tal como Jan Cornets de Groot, diligente investigador de los misterios de la Naturaleza, y yo hemos hecho) dos bolas de plomo, una de ellas diez veces más grande y pesada que la otra, y las dejaremos caer juntas desde una altura de 30 pies de alto y esto nos mostrará, que la bola más ligera no se adelanta diez veces a la pesada, sino que caen juntas al mismo tiempo en el suelo. (...) Esto nos permitirá comprobar que Aristóteles estaba equivocado.”

### 3.2. Modelización de los datos del problema

Estudiaremos y analizaremos la idoneidad de tres modelizaciones distintas, atribuidas respectivamente a Domingo de Soto/ Galileo, Avempace y Thomas Bradwardine según lo visto en capítulos anteriores.

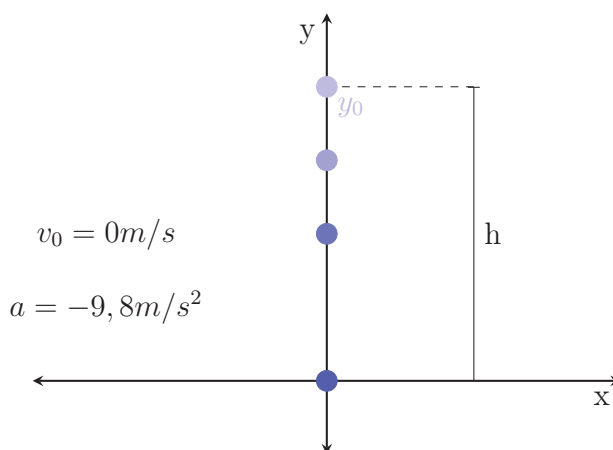


Figura 3.1: Representación del movimiento de caída libre.

**Definición 3.2.1** (Modelización de Avempace).

$$v_1 = F - R \tag{3.1}$$

donde  $v_1 :=$  velocidad,  $F :=$  fuerza y  $R :=$  resistencia.

**Definición 3.2.2** (Modelización de Thomas Bradwardine).

$$v_2 = \log(F/R) \tag{3.2}$$

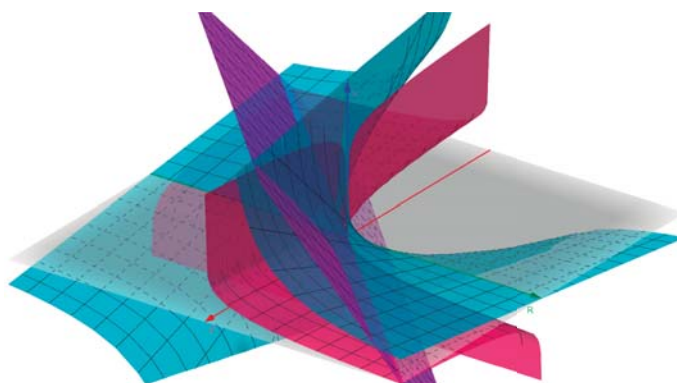
donde  $v_2 :=$  velocidad,  $F :=$  fuerza,  $R :=$  resistencia y  $\log$  hace referencia al logaritmo neperiano.

**Definición 3.2.3** (Modelización de Domingo de Soto).

$$v_3 = F/R \tag{3.3}$$

donde  $v_3 :=$  velocidad,  $F :=$  fuerza y  $R :=$  resistencia.

Al representar las gráficas de estas ecuaciones como funciones con parámetros fuerza y resistencia, obtenemos el siguiente resultado:



**Figura 3.2:** Comparación de las funciones  $v_1$  (violeta),  $v_2$  (rosa),  $v_3$  (azul).

Estudiando estas gráficas<sup>1</sup>, y asumiendo la existencia de un rango de error en los datos, daremos condiciones sobre el dominio en el cual son compatibles las distintas expresiones. Para tener en cuenta este error consideraremos un *engrosamiento* de la función, que veremos más adelante. Para analizar esto, resulta conveniente disminuir el problema en una dimensión. Geométricamente, esto supondrá intersecar las superficies anteriores con el plano dado por un valor constante de la resistencia. Sean entonces, en el problema clásico de hallar la ecuación de la velocidad, las magnitudes:

$x =$  Fuerza

$y =$  Variación del movimiento (Aceleración  $\frac{dv}{dt}(t) = a(t)$ )

$\lambda =$  Resistencia

Y sean los modelos dados por:

---

<sup>1</sup>Link al applet de Geogebra para una mejor visualización: <https://www.geogebra.org/m/tqm7huzb> (Realizado por la autora)

A (Avempace)  $y = x - \lambda$

B (Bradwardine)  $e^y = \frac{x}{\lambda}$

C (Soto)  $y = \frac{x}{\lambda}$

Veamos de modo algebraico, si fijamos un valor  $\lambda$  de resistencia (es decir, una masa fija), para qué valores de  $x$  se verifican las igualdades entre modelos. Lo que queremos es, para el mismo movimiento  $y$  (esto es, el mismo resultado en los modelos) obtener un valor de fuerza  $x$  en función de la resistencia  $\lambda$ .

**Observación.** Si estuviéramos en otro caso que no fuera el de la caída libre (ej. I6 - Tiro parabólico o lanzamiento de proyectiles 2.1.5) y quisiéramos variar la fuerza con la que se lanza el objeto desde cierta altura, tendríamos como variable la  $x$  en lugar de la  $y$ .

1. Comparativa entre los modelos A y B

$$e^y = \frac{x}{\lambda} \iff y = \log x - \log \lambda$$

$$\log x - \log \lambda = x - \lambda \iff \log x - x = \log \lambda - \lambda \iff x = \lambda$$

2. Comparativa entre los modelos A y C

$$y = \frac{x}{\lambda}; y = x - \lambda \dots \iff x - \lambda = \frac{x}{\lambda} \iff \lambda x - \lambda^2 - x = 0 \iff x(\lambda - 1) - \lambda^2 = 0 \iff x = \frac{\lambda^2}{\lambda - 1}$$

3. Comparativa entre los modelos B y C (Nótese que estamos tomando  $\Lambda = \frac{1}{\lambda e^{\frac{1}{\lambda}}}$ )

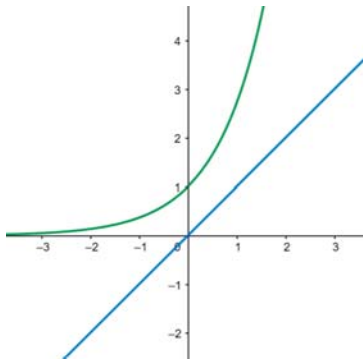
$$e^y = \frac{x}{\lambda} \iff y = \log x - \log y$$

$$y = \log x - \log y = \frac{x}{\lambda} \iff \log x - \frac{1}{\lambda} x = \log \lambda \iff e^{\log x - \frac{1}{\lambda} x} = \lambda \iff e^{\log x} \frac{1}{e^{\frac{x}{\lambda}}} = \lambda$$

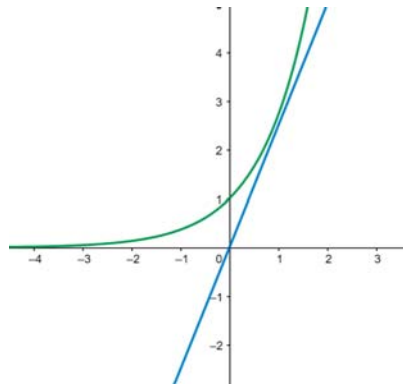
$$\iff \frac{x}{e^{\frac{x}{\lambda}}} = \lambda \iff \frac{e^x}{x} = \frac{1}{\lambda e^{\frac{1}{\lambda}}} \iff e^x = \Lambda x \iff e^x - \Lambda x = 0$$

De estos resultados podemos concluir que los puntos de encuentro entre los modelos A y B, y los modelos B y C se dan para un único valor de la fuerza. Por lo tanto, su relación es prácticamente anecdótica. No ocurre lo mismo con los modelos B y C, de hecho estos se encuentran en el conjunto de valores de  $\Lambda$  tal que  $e^x - \Lambda x = 0$ , que se corresponde geoméricamente con los puntos de corte de las funciones  $y = e^x$  y  $y = \Lambda x$

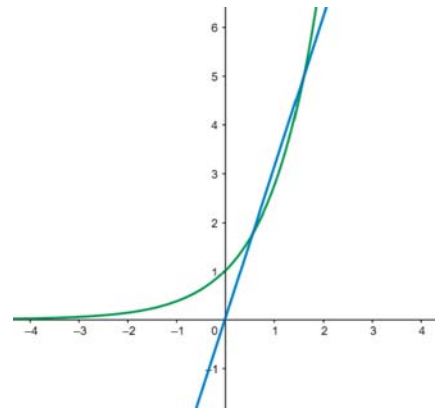
Por lo tanto, se entiende que en ciertos intervalos de valores, los modelos de Soto y de Bradwardine devuelvan resultados muy similares. Esto es, las gráficas se cortan en dos



**Figura 3.3:** Gráficas para  $\Lambda = 1$



**Figura 3.4:** Gráficas para  $\Lambda = 2,5$

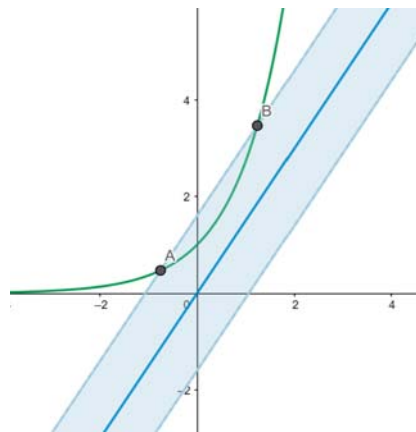


**Figura 3.5:** Gráficas para  $\Lambda = 3$

puntos y/o la distancia que las separa es muy pequeña. Veámos ahora cuál es este conjunto de valores dentro del cuál nos podemos mover entre ambos modelos con una tasa de error baja. Una opción podría ser resolver el problema utilizando geometría analítica. Para ello, buscaríamos la solución de:

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon \iff -\epsilon < f(x) - g(x) < \epsilon \iff g(x) - \epsilon < f(x) < g(x) + \epsilon$$

Para  $\epsilon \geq 0$  tan pequeño como queramos para que los modelos estén lo más próximos que estimemos oportuno. Geométricamente, representamos el *engrosamiento* de  $g$ ,  $g(x) \pm \epsilon$  como la franja:



**Figura 3.6:** Engrosamiento de  $g(x)$

Los puntos  $A, B$  son los puntos de corte (si los hay) de  $f(x)$  y  $g(x) + \epsilon$ . Del mismo modo, los puntos  $C, D$  lo serán (si los hay) de  $f(x)$  y  $g(x) - \epsilon$ . Así, el conjunto de puntos que

verifican  $|f(x) - g(x)| < \epsilon$  será:  $\mathbf{X} := \{x \in \mathbb{R} : x \in (A, B) \cup \mathbb{R} \setminus (C, D)\}$

Sin embargo, después de estudiar esta opción, hemos considerado más interesante resolverlo como un problema de optimización, para así utilizar herramientas lo más modernas posible en contraste con el origen del problema. Sean entonces  $P = (x_1, y_1)$  y  $Q = (x_2, y_2)$  puntos pertenecientes a las curvas  $C_1 := f(x) = y = e^x$  y  $C_2 := g(x) = y = ax$  respectivamente. El problema consiste en resolver el problema de minimización sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} \min z &= \text{dist}(P, Q) \\ \text{s.a. } P &\in C_1 \\ Q &\in C_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Esto es, de forma explícita:

$$\begin{aligned} \min z &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ \text{s.a. } y_1 &= f(x_1) = e^{x_1} \\ y_2 &= f(x_2) = \Lambda x_2 \end{aligned}$$

**Observación.** *En todo momento con la función  $z = \text{dist}(P, Q)$  hacemos referencia a la distancia euclídea usual de  $\mathbb{R}^2$ .*

**Observación.** *Este problema se puede extender de forma trivial a curvas en  $\mathbb{R}^n$ .*

Tenemos pues un problema de optimización no lineal sujeto a restricciones paramétricas no lineales. Como el tema de la optimización paramétrica excede el contenido de este trabajo, planteremos de forma general la teoría utilizada para resolver dichos problemas tal como aparece en [7] y [25], y utilizando programas de cálculo simbólico daremos una primera aproximación a la solución tomando valores para el parámetro  $\Lambda$ . En la siguiente sección, contemplaremos brevemente y únicamente de forma teórica la optimización paramétrica, empleando como base los conocimientos adquiridos en las asignaturas de Investigación Operativa y Optimización del Grado de Matemáticas.

Consideremos problemas no lineales de la forma

$$\begin{aligned} P : \min f(x) \\ \text{s.a. } x \in F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0, j \in J\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Donde  $J$  denota el conjunto de índices  $J = \{1, \dots, m\}$  y  $F$  la región factible. Supondremos  $f, g_j \in \mathcal{C}^2, j \in J$  a lo largo de esta sección.

**Definición 3.2.4** (Conjunto de índices activos). Sea  $\bar{x} \in F$

$$J_0(\bar{x}) = \{j \in J | g_j(\bar{x}) = 0\}$$

**Definición 3.2.5** (Función y Multiplicadores de Lagrange). En un entorno de  $x$ , sea

$$L(x, \mu) = f(x) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \mu_j g_j(x)$$

la función de Lagrange. Los coeficientes  $\mu_j$  se denominan multiplicadores de Lagrange.

**Definición 3.2.6.** 1. Decimos que la *Cualificación de Restricción de Independencia Lineal* (LICQ por sus siglas en inglés) se satisface en  $\bar{x} \in F$  si los vectores  $\nabla g_j(\bar{x}), j \in J_0(\bar{x})$  son linealmente independientes.

2. La *cualificación de restricción Mangasarian Fromovitz* (MFCQ) (más débil), es satisfecha en  $\bar{x} \in F$  si existe un vector  $\xi$  tal que  $\nabla g_j(\bar{x})\xi = 0$  para todo  $j \in J_0(\bar{x})$

**Definición 3.2.7** (Puntos Karush-Kuhn-Tucker (KKT)). Sea el problema  $P$  y supongamos  $\bar{x}$  una solución local, siendo  $\bar{x}$  un punto regular para las restricciones. Entonces existen multiplicadores  $\bar{\mu}_j$  con  $j \in J_0(\bar{x})$  (únicos) tales que:

$$\begin{aligned} \nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) &= 0 \\ g(\bar{x}) &= 0 \\ \bar{\mu}_j &\geq 0 \\ \bar{\mu}_j^T g(\bar{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Estas condiciones son conocidas como *condiciones KKT* y los puntos que las verifican como *puntos KKT*.

Enunciamos a continuación las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad del problema  $P$ .

**Theorem 3.2.1** (Condiciones necesarias de optimalidad de primer orden (FOC)). Sea  $\bar{x} \in F$  un minimizador local de  $P$ .

1. Entonces existen multiplicadores  $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_j \geq 0$  para  $j \in J_0(\bar{x})$  no todos nulos, tales que se cumple la condición de Fritz John (FJ):

$$\bar{\mu}_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$$

2. Si además se verifica MFCQ en  $\bar{x}$ , entonces existen multiplicadores  $\bar{\mu}_j \geq 0$  para  $j \in J_0(\bar{x})$  tales que se cumple la condición de Karush-Kuhn-Tucker (KKT):

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$$

**Demostración:**

Podemos encontrar una demostración en [7]. La prueba de 1 (Condición primal) se deriva del Lema de Farkas. Para probar 2 (Condición dual) se adapta la demostración del Teorema de KKT, extendiendo el vector  $\bar{\mu}_j, j \in J_0(\bar{x})$  a un vector  $\tilde{\mu} \geq 0$  definiendo  $\bar{\mu}_j = 0 \forall j \notin J_0(\bar{x})$ .  $\square$

**Theorem 3.2.2** (Condiciones suficientes de optimalidad de primer orden (SOC)). *Sea  $\bar{x} \in F$  tal que satisface LICQ. Supongamos que la condición KKT se satisface con multiplicadores  $\bar{\mu}_j \geq 0$  para  $j \in J_0(\bar{x})$*

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\mu}) = \nabla f(x) + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0$$

de tal manera que se cumpla la complementariedad estricta (CS):  $\bar{\mu}_j > 0 \forall j \in J_0(\bar{x})$  y  $|J_0(\bar{x})| = n$ . Entonces  $\bar{x}$  es un minimizador local de  $P$  de orden 1.

**Demostración:**

De nuevo, se puede encontrar en [7]. La última afirmación se puede probar de forma sencilla modificando la demostración anterior.  $\square$

**Theorem 3.2.3.** *Sean  $f, g_j$  funciones  $\mathcal{C}^2$ . Supongamos que  $\bar{x} \in F$  satisface MFCQ y la condición KKT para un cierto multiplicador  $\bar{\mu} \geq 0$ , así como SOC. Entonces  $\bar{x}$  es un punto KKT aislado de  $P$  (localmente único).*

**Demostración:**

Se puede consultar en [25].  $\square$

Aplicando esta teoría al problema de minimización (3.4) obtenemos la existencia de solución factible y obtenemos dicha solución utilizando el programa de cálculo simbólico MATLAB. Para ello, utilizaremos la función **fmincon**, una herramienta de MATLAB para optimizar problemas no lineales con restricciones no lineales como es nuestro caso. [23]

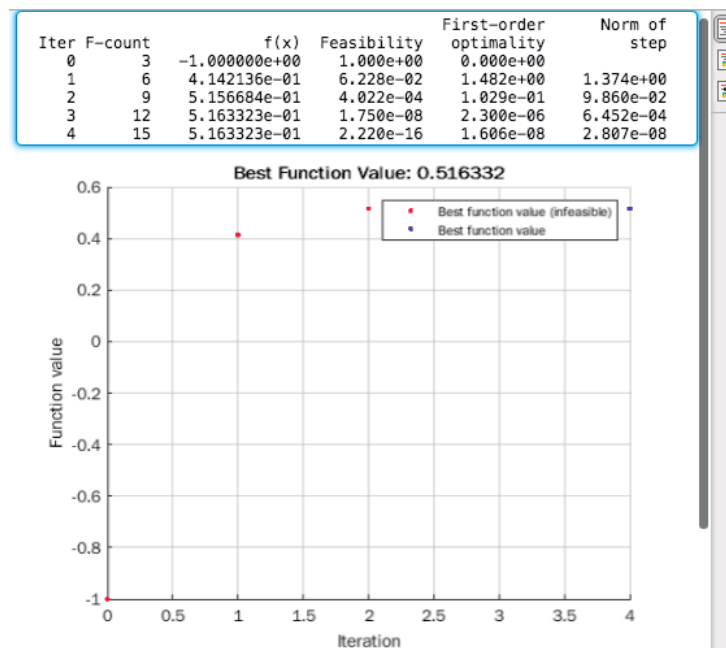
```

function f = objectiveFcn(optimInput)
x = optimInput(1);
y = optimInput(2);
f = sqrt((y-x)^2+(y-x)^2)-1;
end

function [c,ceq] = constraintFcn(optimInput)
% Note, if no inequality constraints, specify c = []
% Note, if no equality constraints, specify ceq = []
x = optimInput(1);
y = optimInput(2);
ceq(1) = y-exp(x);
ceq(2) = y-4*x;
c = [];
end

[x,fval] = fmincon(objectiveFcn, [0,0],A,b,Aeq,beq,lb,ub,constraintFcn,options)

```

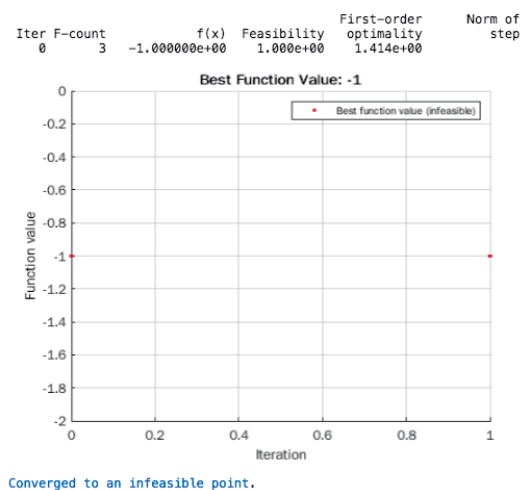


**Figura 3.7:** Resultado de la optimización para  $\Lambda = 4$

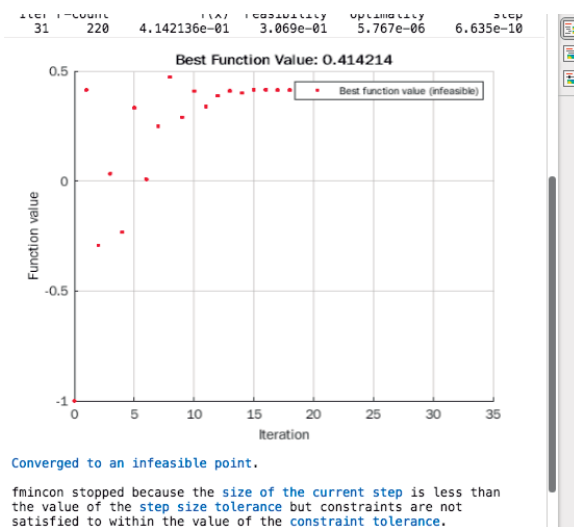
Interpretación de los resultados obtenidos: La tabla de iteraciones tanto en el área de salida de tareas del Live Editor (Figura 3.5) como en la ventana de comandos de MATLAB muestra cómo MATLAB buscó el valor mínimo de la función dada por objectiveFcn.

1. La primera columna, denominada Iter, es el número de iteraciones que fmincon tarda en converger.
2. La segunda columna, etiquetada F-count, informa sobre el número acumulativo de veces que se evaluó la función objectiveFcn en el proceso de encontrar un mínimo.
3. La tercera columna, etiquetada como f(x), muestra el valor de la función objetivo. El valor final, en este caso 0.516332, es el mínimo informado en la ejecución de Optimize y al final del mensaje de salida en la ventana de comandos.
4. La cuarta columna, Feasibility o, en castellano, Viabilidad, muestra el valor de la función de restricciones constraintFcn en cada iteración donde la restricción es positiva. Cuando el valor de constraintFcn es negativo en una iteración, esto significa que satisface la restricción.

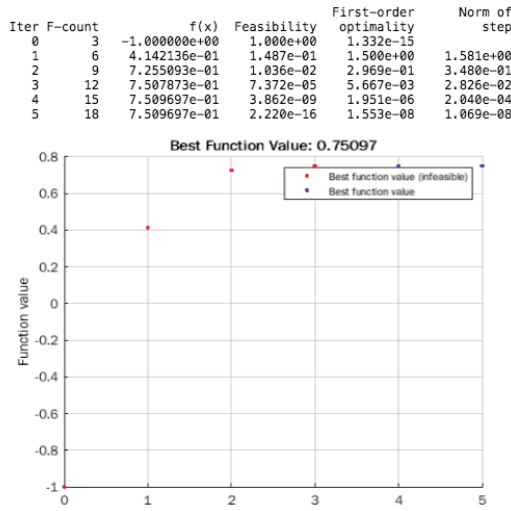
Una vez estudiado el problema para un valor fijo de  $\Lambda$ , nos hacemos la siguiente pregunta: ¿En qué rango de valores podemos mover este parámetro si queremos que el problema converja a una solución factible? Esto entra en el campo de la optimización paramétrica. Por el momento, veamos para algunos valores enteros de  $\Lambda$  si el problema tiene solución factible. Haciendo pruebas en MATLAB, modificando en `constraintFcn` la restricción  $ceq(2) = y - 4 * x$ ; por  $ceq(2) = y - \Lambda * x$ ; para  $\Lambda \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , obtenemos que para  $\Lambda = 1, 2$  el problema es infactible.



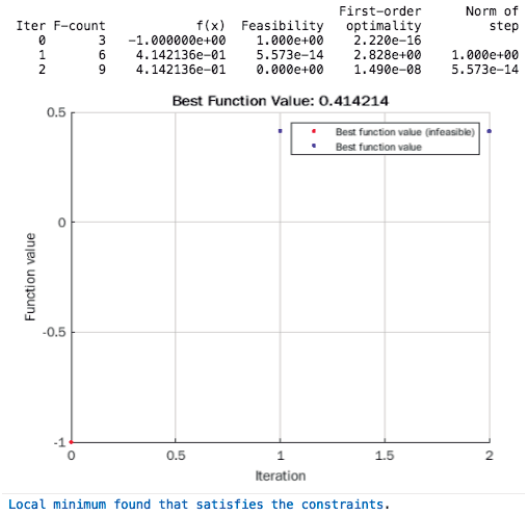
**Figura 3.8:** Resultado de la optimización para  $\Lambda = 1$



**Figura 3.9:** Resultado de la optimización para  $\Lambda = 2$



**Figura 3.10:** Resultado de la optimización para  $\Lambda = 3$



**Figura 3.11:** Resultado de la optimización para  $\Lambda = 10^7$

Sin embargo, para valores del parámetro mayores que 2, obtenemos solución factible.

Por lo tanto, concluimos que el problema de minimización (3.4) tiene una solución factible para valores enteros del parámetro  $\Lambda \geq 2$ . Recordemos que este parámetro lo tomamos como  $\Lambda = \frac{1}{\lambda e^{\lambda}}$  donde  $\lambda$  es la resistencia o masa. por lo tanto, para valores grandes de  $\Lambda$ , esto es, valores pequeños de la resistencia, se tiene una compatibilidad entre los modelos de Soto y de Bradwardine que, como veremos en el siguiente capítulo, dadas las condiciones materiales de los experimentos que se hacían en la época, pudo ser la causa de confusión entre ambos modelos.

### 3.3. Optimización paramétrica. Análisis de sensibilidad y algoritmos mp-QP y p-NSGAI

No existe una forma obvia de extender las técnicas tradicionales para la optimización multiobjetivo al caso de los parámetros. El enfoque técnico más común empleado para la optimización paramétrica es combinar técnicas de optimización tradicionales de funciones lineales, cuadráticas, convexas no lineales, etc; lo cual da lugar a los llamados análisis de sensibilidad. En general, el análisis de sensibilidad tiene como objetivo describir cómo cambia la respuesta de un modelo con la perturbación de un cierto parámetro. En la bibliografía consultada, la mayoría de las técnicas basadas en el análisis de sensibilidad para la optimización paramétrica se limitan a problemas lineales, cuadráticos y enteros mixtos. Dentro de este

campo existe una diversa gama de algoritmos y resultados generales. Vamos a introducir dos de ellos: el algoritmo de programación cuadrática multiparamétrica (mp-QP) y el algoritmo p-NSGAI [9]. El algoritmo mp-QP asume restricciones lineales con parámetros en el RHS (Right Hand Side). Como resultado, los parámetros deben ser términos lineales aditivos. El algoritmo mp-QP divide iterativamente el espacio de búsqueda para encontrar el conjunto de soluciones óptimas en función del parámetro. La solución es un conjunto de funciones lineales por partes sobre el parámetro. En cuanto a p-NSGAI, surge como una extensión del Algoritmo Genético de Ordenación No Dominada II (NSGAI) para el caso paramétrico. En p-NSGAI el problema se resuelve restringiendo el valor del parámetro, para luego resolver el problema multiobjetivo resultante con NSGAI. Un ejemplo de optimización multiobjetivo que se puede resolver con NSGAI es:

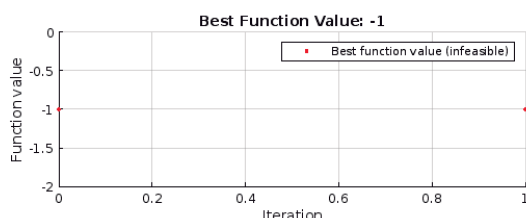
$$\begin{aligned}
 & \min_x f(x, \theta) & (3.6) \\
 & \text{s.a. } \epsilon_i^L \leq \theta_i \leq \epsilon_i^U \forall i = 1 \dots p \\
 & g_i(x, \theta) \leq 0 \forall i = 1 \dots q \\
 & h_i(x, \theta) = 0 \forall i = 1 \dots r
 \end{aligned}$$

Donde  $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $f(x, \theta) = (f_1(x, \theta), f_2(x, \theta), \dots, f_m(x, \theta))$ .

### 3.4. Análisis de los datos obtenidos y correlación con los resultados medievales

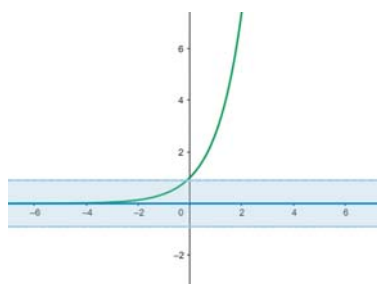
Las características de los experimentos realizados por Bradwardine y Soto respectivamente hacen caer sus resultados sobre la “tierra de nadie” de los dos modelos, haciendo que se puedan confundir. Otras cuestiones que se podrían analizar, pero que por su extensión debemos dejar para trabajos posteriores son: ¿Cuántos datos y en qué rango de valores son necesarios entonces para modelizar satisfactoriamente un experimento dado? O bien ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo una serie de datos al azar, el resultado de la modelización sea satisfactorio? Respecto a la cuestión que nos ocupa en este caso, discernir si los experimentos prácticos bastan para diferenciar entre modelos; analizando ejemplos numérico de Soto (visto en la sección 2.1.3) y de Bradwardine (visto en la sección 1.5) vemos que para el tipo de datos que manejaban estos autores del siglo XIV-XVI, los modelos propuestos por Soto y por Bradwardine proporcionan unos resultados notablemente similares. En el caso de Soto, en varias ocasiones menciona resultados numéricos como  $v = 4$  ó  $v = 8$ . Recordemos que  $\Lambda = \frac{1}{\lambda e^{\lambda}}$ . Teniendo en cuenta que los objetos de estudio de la teoría del movimiento son

tradicionalmente similares a piedras y plumas, y asumiendo que la masa de una pluma de gallina es aproximadamente de  $8,2 \times 10^{-6} \text{kg}$  y la de una piedra que pueda ser lanzada a pulso desde lo alto de la torre de Pisa es de  $1 \text{kg}$ , tendremos valores de  $\Lambda$  en el intervalo  $[0, 0,36788]$ . Para un valor en este intervalo (p.ej  $\Lambda = 0,1$ ) el resultado del problema de optimización es infactible:

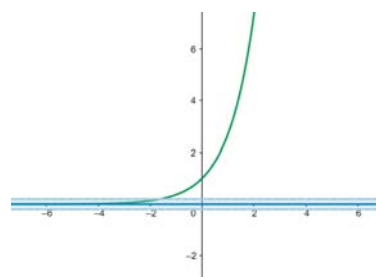


**Figura 3.12:** Resultado de la optimización para  $\Lambda = 0,1$

Esto puede deberse a errores en el algoritmo de optimización *fmincon* debido a que el valor de  $\Lambda$  tiende a 0 y MATLAB no puede procesar la segunda restricción del problema. Sin embargo, volviendo al plano geométrico vemos que para valores de  $\Lambda \rightarrow 0$  se tiene que las imágenes de las funciones  $y = \exp x$  y  $y = \Lambda x$  prácticamente se superponen, ya que la asíntota horizontal de  $y = \exp x$  es precisamente la imagen de  $y = \Lambda x$  para valores pequeños de  $\Lambda$ . Para aceptar este razonamiento, como nos encontramos al lado izquierdo del eje de abscisas, tenemos que asumir que la  $x$ , e.d la fuerza, pueda tomar valores negativos. Como estamos en el caso de la caída libre, la fuerza es precisamente la masa por la aceleración de la gravedad  $y = f = ma = -9,8m$ . Como el origen de coordenadas está en el suelo, tendremos valores negativos de la fuerza.



**Figura 3.13:** Gráficas para  $\Lambda = 0, \epsilon = 1$



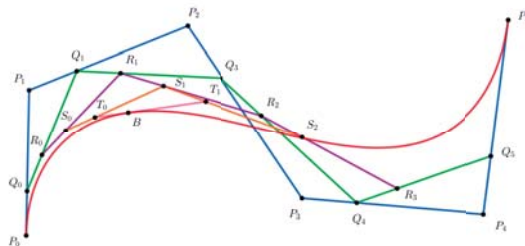
**Figura 3.14:** Gráficas para  $\Lambda = 0, \epsilon = 0,2$

Por lo tanto, asumiendo que el error en las mediciones sea más pequeño que el error admitido  $\epsilon$ , se tendría que los modelos resultan, en efecto, intercambiables.

# Capítulo 4

## Conclusiones

En cuanto al desarrollo de este trabajo, he tenido que recurrir a conocimientos adquiridos en diferentes asignaturas cursadas durante el grado. Por supuesto, ha sido indispensable para mí el haber cursado Historia de las Matemáticas, asignatura que no solo me inspiró para solicitar este trabajo sino que también me proporcionó conocimientos y herramientas de búsqueda a las que he echado mano de forma recurrente durante todo el proceso de investigación llevado a cabo en los Capítulos 1 y 2. Sin embargo, para el Capítulo 3, he tenido que hacer uso no solo de asignaturas vistas durante la carrera como Geometría y Álgebra Lineal para plantear los sistemas que me llevaron a encontrar los modelos; también han sido fundamentales los conocimientos adquiridos tomando como base las asignaturas de Investigación Operativa y Optimización; y las asignaturas de Métodos y Análisis Numérico, que me enseñaron a utilizar el software MATLAB con soltura y que han sido indispensables para la resolución del problema.



**Figura 4.1:** *Polinomio de Bézier de grado 5.*

Aparte de todos los conocimientos que ya tenía, he adquirido otros que se encontraban fuera del currículum académico del Grado de Matemáticas, como los polinomios de Bézier (ver Figura 4.1) y de Bernstein (usados y luego descartados para el problema de modeliza-

ción) y todo el tema de la optimización no lineal y optimización paramétrica, para lo cuál ha sido indispensable recurrir a trabajos de investigación específicos sobre la materia.

En la realización de este trabajo ha sido fundamental el conocimiento y uso de sistemas de búsqueda de bibliografía, tanto en digital como en físico. Esto me ha enseñado a valorar el hecho de poder consultar bibliografía específica sobre un tema, ya que en numerosas ocasiones he tenido que poner en marcha todas mis habilidades de búsqueda para encontrar documentos que a veces eran complicados de encontrar por su antigüedad o por la falta de medios digitales. Uno de los mayores retos y también uno de los momentos más emocionantes que he vivido realizando este trabajo ha sido el poder acceder a las fuentes originales en el Archivo Histórico de la Biblioteca Nacional, donde pude consultar *in situ* los textos de Domingo de Soto en su edición de 1572.

Por otra parte, en cuanto a los resultados de la investigación, estas son mis conclusiones: a la luz del momento histórico en que Domingo de Soto lleva a cabo sus estudios, podemos afirmar que sus ideas son un adelanto de la revolución galileana que tendría lugar un siglo más tarde, y suponen un avance cualitativo en el desarrollo de la Física clásica que comienza con Aristóteles y alcanza su cumbre con Newton. Hay un amplio consenso entre los autores más citados en esta cuestión sobre el evidente influjo del concepto de Resistencia Interna de Soto en la *resistenza interna* de Galileo, preludio del concepto de masa que acuñaría Newton. Además, para los historiadores de la ciencia que han seguido la estela de las enseñanzas de Soto, el rastro de su doctrina puede seguirse a través de las lecciones de los jesuitas y discípulos de Soto en el Colegio Romano (fundado por Ignacio de Loyola en 1551), al que asistió Galileo [30]. Esta afirmación se basa en el hecho conocido de que el *Tractatus de Elementis*, así como otros escritos por el joven Galileo en Pisa alrededor de 1589 - 1591, están basados en las Lecciones impartidas por jesuitas contemporáneos de Galileo en el Colegio Romano. Además, los resultados obtenidos en el Capítulo 3 nos confirman que dada la tasa de error de las mediciones y la falta de herramientas matemáticas para abordar el problema del movimiento *uniformiter difformis*, los experimentos que se hacían en el siglo XVI no servían para diferenciar los métodos de manera numérica, y por lo tanto una correcta interpretación y modelización como la de Domingo de Soto, ha de deberse a un pormenorizado estudio teórico de la materia y a una comprensión absoluta de la misma.

Finalmente, ante el resultado de nuestro análisis de las aportaciones de Domingo de Soto a la Mecánica Clásica, proponemos esta consideración: tras una lenta maduración en el seno de la física de la Edad Media, las ideas de Domingo de Soto fueron recogidas por Galileo y posteriormente por Newton, quienes las llevarían hasta lugares que solo era posible vislumbrar subidos a hombros de gigantes.

# Bibliografía

- [1] A. Astolfi. *Optimization: An introduction. Notes from the Computational Mechanics of Materials and Structures course*. Universitat Stuttgart, 2006.
- [2] J. F. Bonnans. *Numerical optimization: theoretical and practical aspects*. Springer, 2006, pág. 490. ISBN: 354035445X.
- [3] Carl B. Boyer. *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial, 1999. ISBN: 9788420681863.
- [4] Juan José Pérez Camacho e Ignacio Sols i Lucía. *Domingo de Soto en el origen de la ciencia moderna*. 1994. DOI: <https://revistas.ucm.es/index.php/RESF/article/view/RESF9494220455A>.
- [5] Marshall Claggett. *The science of mechanics in the Middle Ages*. Madison : University of Wisconsin Press; London: Oxford University Press, 1961. ISBN: 978-0299019006.
- [6] *Domingo de Soto | Real Academia de la Historia*. URL: <https://dbe.rah.es/biografias/8388/domingo-de-soto>.
- [7] Still G. Faigle U. Kern W. *Algorithmic Principles of Mathematical Programming*. Springer, 2002, Th.12.4, Cor.12.2. ISBN: 9048161177.
- [8] Galileo Galilei. *Le opere di Galileo Galilei*. Florence, O. Barbéra Editrice, 1968, págs. 144-146. ISBN: 978-0815388647. URL: <http://www.archive.org/details/agh6462.0001.001.umich.edu>.
- [9] Edgar Galván. *Parametric optimization: Applications in systems design*. 2016. DOI: <https://core.ac.uk/download/pdf/79654683.pdf>.
- [10] *How Original Is Galileo's Work on Kinematics? | Nagaitoshiya.com*. URL: <https://www.nagaitoshiya.com/en/2013/mean-speed-theorem/>.
- [11] Sam Howison. *Practical Applied Mathematics Modelling, Analysis, Approximation*. 2004. DOI: <https://people.maths.ox.ac.uk/fowler/courses/tech/sdh.pdf>.
- [12] Victor J. Katz. *A History of Mathematics, An Introduction*. 3.<sup>a</sup> ed. Pearson Education, Inc. University of the District of Columbia, 2009. ISBN: 0-321-38700-7.
- [13] David Leonardo. *La regla de Bradwardine: Un momento en la historia de la proporcionalidad*. 2013.
- [14] Giovanni Marliani. *De proportione motuum in velocitate*. Pavia: Damiano Confaloneri. Biblioteca nazionale centrale Firenze, 1482.
- [15] Seúl Sáenz Bravo Maureen Eliana Castañeda Cortés. “La demostración geométrica de la Ley de Merton : un pretexto para el estudio de área bajo la curva.” En: (Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá D.C. 2012). DOI: <http://hdl.handle.net/20.500.12209/108>.

- [16] Jorge Mira-Pérez. “Domingo de Soto, early dynamics theorist”. En: *Physics Today* 62 (1 ene. de 2009), págs. 9-10. ISSN: 0031-9228. DOI: [10.1063/1.3074244](https://doi.org/10.1063/1.3074244).
- [17] *Modelación del Teorema del Merton College Nicolás Oresmes – GeoGebra*. URL: <https://www.geogebra.org/m/kHsS2Ws7>.
- [18] Mauricio Nieto. “Cuantificación y Representación Matemática Del Movimiento”. En: (abr. de 2012). DOI: <https://historiadela-ciencia-mnieto.uniandes.edu.co/pdf/CUANTIFICACIONYREPRESENTACION.pdf>.
- [19] Jorge Mira Pérez. “El genio español que comprendió la caída libre de los cuerpos y anticipó el concepto de masas: Domingo Soto”. En: *Núm* 210 (2018), págs. 47-53.
- [20] Jesús Alfonso Riestra. “Estudio de la variación en la edad media y su relación con el concepto de límite”. En: *Revista Miscelánea Matemática* (39 2004), págs. 49-60. DOI: [https://miscelaneamatematica.org/download/tbl\\_articulos.pdf2.99841bbe6971df46.526965737472615f6a5f612e706466.pdf](https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.99841bbe6971df46.526965737472615f6a5f612e706466.pdf).
- [21] Sabine Rommevaux. *A treatise on proportion in the tradition of Thomas Bradwardine: The De proportionibus libri duo (1528) of Jean Fernel*. Mayo de 2013, págs. 164-182. DOI: [10.1016/j.hm.2013.01.001](https://doi.org/10.1016/j.hm.2013.01.001).
- [22] Michael Segre. “Viviani’s Life of Galileo”. En: *Isis* 80 (jun. de 1989). DOI: [10.1086/355009](https://doi.org/10.1086/355009).
- [23] *Solve a Constrained Nonlinear Problem, Solver-Based - MATLAB Simulink - MathWorks España*. URL: <https://es.mathworks.com/help/optim/ug/example-nonlinear-constrained-minimization.html>.
- [24] Domingo de Soto. *Super Octo Libros Physicorum Aristotelis*. 1572.
- [25] Georg Still. *Lectures on Parametric Optimization: An Introduction*. 2018. DOI: <https://optimization-online.org/2018/04/6587/>.
- [26] Francisco de Toledo. *Commentaria: una cum Quaestionibus, in octo libros Aristotelis de Physica auscultatione*. Marsil, 1591.
- [27] Geert Vanpaemel. *Mechanics and Mechanical Philosophy in some Jesuit Mathematical Textbooks of the Early 17th Century*. Ene. de 2007, págs. 259-274. DOI: [10.1007/978-1-4020-5967-4\\_11](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5967-4_11).
- [28] William Wallace. *Duhem and Koyré on Domingo de Soto*. 1990, págs. 239-260. URL: <https://www.jstor.org/stable/20116782>.
- [29] William A Wallace. *The Enigma of Domingo de Soto: Uniformiter difformis and Falling Bodies in Late Medieval Physics*. 1968, págs. 384-401. URL: <https://about.jstor.org/terms>.
- [30] William A. Wallace. *Domingo de Soto and The Early Galileo*. 1.<sup>a</sup> ed. Routledge, 2017. ISBN: 978-0815388647.