Interrelación entre lo matemático y lo didáctico en la reconstrucción escolar de los sistemas de numeración

Tomás Sierra,[1] Marianna Bosch[2] y Josep Gascón[3]

RÉSUMÉ

Ce travail propose une réponse au problème didactique de comment mettre en place un processus d'étude sur les systèmes de numération qui fasse apparaître, de manière explicite, les raisons d'être de ce savoir, c'est-à-dire des questions successives auxquelles cette organisation mathématique apporte une réponse. Nos analyses font apparaître les dépendances entre, d'une part, les *tâches didactiques* mises en oeuvre par le professeur et ses élèves, les *techniques didactiques* disponibles pour réaliser ces tâches et le *discours technologique* qui sert à interpréter et justifier ces techniques et, d'autre part, les composants et la raison d'être de l'organisation mathématique à mettre en place. Nous montrons aussi que l'objectif du processus didactique ne peut pas se réduire à l'organisation mathématique finalement construite, mais doit embrasser tout le parcours d'étude, car ce sont justement les organisations intermédiaires qui donnent sens à la construction finale. Le cas présenté est ainsi une illustration exemplaire de *détermination réciproque entre le mathématique et le didactique.*

ABSTRACT

This paper addresses the didactic problem of how to work out a process of study related to systems of numeration that explicitly shows the raisons d'être of this piece of knowledge, that is the successive questions to which this mathematical organization gives an answer. Our analyses highlight the dependences between didactic and mathematical organizations. These dependences affect, on the one hand, the *didactic tasks* carried out by the teacher and the students, the *didactic techniques* available and the *technological discourse* to interpret and justify them and, on the other hand, the components and the rationale of the mathematical organization at stake. We also show that the objective of the didactic process may not be reduced to the mathematical organization finally obtained, but has to include the course of study, as the intermediate organizations are precisely the ones that give sense to the final result. The considered case is thus a model example of the *reciprocal determination between the mathematics and the didactics.*

1. PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA DIDÁCTICO.

En las instituciones escolares se ha considerado tradicionalmente y, en gran medida se sigue considerando, que una cosa es "lo matemático", que se supone representado por *el contenido de la enseñanza,* y otra muy distinta "lo pedagógico", que se identifica con *la forma de enseñar* dicho contenido. Este mismo punto de vista es sustentado en todos aquellos enfoques de investigación que, al no cuestionar el *modelo epistemológico* dominante en las instituciones escolares (que es relativo a lo que se considera "matemático"), tampoco pueden cuestionar lo que se entiende por "enseñar y aprender matemáticas" en dichas instituciones, puesto que el modelo epistemológico determina fuertemente el *modelo didáctico correspondiente*.

Con la emergencia del Programa Epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas (Brousseau, 1998) se produce una importante ampliación de "lo matemático", es decir, del modelo epistemológico que llevó a asumir la naturaleza "matemática" de muchos aspectos de la actividad de estudio que clásicamente se habían considerado como "cognitivos", "metacognitivos" o "pedagógicos". Este Programa Epistemológico aparece como consecuencia de una redefinición de "lo didáctico" que abarca, más allá de lo pedagógico ("*¿qué enseñar*?, *¿cómo enseñar*?, *¿cuándo enseñar*? y *¿qué, cómo y cuándo*

[1] Universidad Complutense de Madrid: tomass@edu.ucm.es
[2] Universitat Ramon Llull: mbosch@fundemi.com
[3] Universitat Autònoma de Barcelona: gascon@mat.uab.es

evaluar?”), incluyendo todas las actividades relacionadas con el estudio de las matemáticas en el conjunto de instituciones sociales. Esta doble ampliación puso de manifiesto que “lo didáctico” y “lo matemático”, lejos de ser dimensiones independientes, están profundamente interrelacionados. De hecho, podemos incluso considerar que la didáctica de las matemáticas se constituye como disciplina científica en el momento en que se hace cargo de manera integrada de “lo pedagógico” y “lo matemático”.

En un trabajo anterior (Gascón y Sierra, 2003) hemos llevado a cabo una reconstrucción matemática de la organización matemática (en adelante, OM) en torno a los Sistema de Numeración a partir del análisis de las cuestiones a las que dicha OM responde. Esta reconstrucción se ha materializado en una sucesión “creciente” de OM que abarca campos de problemas cada vez más amplios y técnicas progresivamente más potentes, hasta desembocar en una OM en torno al sistema de numeración posicional completo que designaremos mediante OM_p. Utilizando este modelo de referencia, nos planteamos el problema didáctico de *diseñar y experimentar un proceso de estudio sobre los Sistemas de Numeración en el que aparezcan de forma explícita las razones de ser de dicha OM*, esto es, las sucesivas cuestiones a las que dicha organización responde.

Mostraremos que las *tareas didácticas* a las que tienen que enfrentarse el profesor y sus alumnos para reconstruir OM_p, las *técnicas didácticas* que están a su alcance para llevar cabo dichas tareas, y hasta el *discurso tecnológico* del que se dispone para interpretar y justificar dichas técnicas, dependen esencialmente de la estructura de los componentes “matemáticos” y de la razón de ser de OM_p. Mostraremos, además, que el objetivo del proceso didáctico no puede reducirse solamente a la OM finalmente construida sino que debe abarcar todo el recorrido de estudio, puesto que OM_p resultará inseparable de las OM que la motivan y le dan sentido.

Una vez planteado el problema didáctico que queremos abordar, describimos brevemente el Modelo Epistemológico de Referencia de la OM en torno a los Sistemas de Numeración (en adelante SN). A continuación, explicamos de forma esquemática un proceso de estudio llevado a cabo en la Formación de Maestros; y terminamos con el análisis del proceso didáctico desarrollado, lo que nos conduce a mostrar la estrecha interrelación y codeterminación que existe entre el modelo epistemológico y la organización didáctica implementada.

Estudiar una cuestión matemática en una institución didáctica I (incluyendo las de nivel universitario) consiste normalmente en *estudiar la* OM *que otra institución* I’ *propone como respuesta –en el sentido fuerte*[4]*– a esta cuestión*. Pero, para llevar a cabo el estudio de la OM construida en I’, ésta debe ser *reconstruida* en I mediante una reconstrucción escolar que es “artificial” en el sentido de no primigenia, esto es, la OM debe ser *transpuesta* de I’ a I. Es lo que llamamos el proceso de *transposición didáctica* de una OM (Chevallard 1985 y 1991). Surge así un gran tipo de *problemas didácticos* que podemos describir del siguiente modo:

Dada una cuestión *q* que queremos que sea estudiada en una institución docente I, ¿cómo diseñar y gestionar el proceso de estudio en I para construir la OM que se da como respuesta a dicha cuestión en otra institución I’?

En nuestro problema didáctico, los parámetros I, OM, I’ y *q* toman los siguientes valores:

I = FM = Institución de Formación de Maestros.

OM = OM_p, esto es, el sistema de numeración posicional completo (por ejemplo de base 10).

[4] Una *respuesta en sentido fuerte* no puede reducirse a una simple información sino que requiere la construcción de toda una praxeología. Ver (Chevallard, 1999).

I' = institución matemática sabia.

Como cuestión inicial, elegimos en primer momento la cuestión:

q = "¿Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental?"

Veremos más adelante las debilidades didácticas de esta cuestión, en el sentido de que no ayudó al profesor y los alumnos a generar las cuestiones "cruciales" del proceso de estudio. Veremos también en qué sentido el proceso de estudio experimentado nos ayudó a formular una cuestión alternativa con mayor poder generador.

Para abordar el problema didáctico formulado inicialmente es imprescindible partir de una descripción de la OM_p, esto es, de un modelo epistemológico de la OM que se da como respuesta en I' a la cuestión *q* que queremos que sea estudiada en la institución de Formación de Maestros. En el ámbito del Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de las Matemáticas dicho modelo epistemológico ha de ser construido *explícitamente* y, desde el punto de vista de la TAD, ha de tener una estructura *praxeológica*.

2. MODELO EPISTEMOLÓGICO DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

En lugar de proponer una OM cristalizada (modelo epistemológico *estático*) de OM_p, propondremos un modelo epistemológico *dinámico* guiado por el desarrollo evolutivo de una sucesión de OM de modo que cada nueva OM amplía y "completa" relativamente los distintos componentes de la anterior hasta desembocar en OM_p. En cierto sentido, cada OM se presenta como *la razón de ser* de la anterior. Además los tipos de tareas asociadas a cada OM, así como las técnicas y el entorno tecnológico-teórico, han de adaptarse a las restricciones ecológicas que impone la institución docente de Formación de Maestros.

La elección de las OM intermedias proviene del análisis detallado de la cuestión matemática de partida *q* que nos ha llevado a considerar *tres grandes categorías de sistemas de numeración*[5]: "aditivos", "híbridos" y "de posición". Cada una de estas categorías dará origen a un nuevo eslabón en la sucesión de OM que desemboca en OM_p.

2.1. *La organización matemática inicial en torno a un sistema aditivo rudimentario*

Partimos de una OM generada por un tipo de cuestiones problemáticas muy elementales relativas a la *designación* de los números naturales:

> ¿Cómo expresar los números naturales que necesitamos mediante símbolos de manera que:
>
> **(1)** no haya ninguna ambigüedad?
>
> **(2)** se utilice una pequeña cantidad de símbolos diferentes y fijados de antemano?
>
> **(3)** la "cadena" resultante no sea excesivamente larga?

Para responder a dichas cuestiones partiremos de dos técnicas extremas de representación de los números: (a) Utilizar un único símbolo y repetirlo tantas veces como indica el número que queramos representar; o bien (b) utilizar un símbolo diferente para cada número natural[6]. Está claro que la técnica (a) no responde a (3) mientras que la técnica (b) no responde a (2).

[5] Estas categorías están basadas en la clasificación jerarquizada que propone Guitel (1975)

[6] La técnica (a) es la que consiste en la correspondencia término a término, donde cada objeto de la colección es representado por el símbolo I. Es un SN, donde sólo se dispone de un símbolo y con el se puede representar cualquier número, por ejemplo, el 12 se representa IIIIIIIIIII. La técnica (b) es la que se utiliza en el conteo,

Pero el trabajo con estas técnicas extremas permitirá desarrollarlas y hacerlas evolucionar hacia técnicas intermedias que sean más útiles y más eficaces. Obtendremos así en primer lugar una nueva técnica, que llamaremos, *técnica inicial de representación de los números naturales*, τ_i, que sólo sirve para describir números pequeños y aporta una única novedad respecto a la representación "lineal" de los números (colección uniforme sin ningún tipo de agrupamientos): el empleo de *un único tipo de agrupamiento*, que ayuda a leer y describirlos mejor. Esta técnica es muy utilizada en los recuentos de las votaciones y en Estadística Descriptiva rudimentaria, (por ejemplo, 13 es ~~IIII~~ ~~IIII~~ III). Designaremos mediante $OM_i = < \tau_i >$ a la OM generada por esta técnica inicial y que puede ser considerada como una OM en torno a un sistema de numeración "aditivo rudimentario".

2.2. *La organización matemática OM_a en torno a un sistema de numeración aditivo.*

La técnica que permite generar una nueva OM se caracteriza por utilizar *agrupamientos regulares* de primer orden, de segundo orden, etc. Esta técnica, que designaremos mediante τ_a, responde a las cuestiones (2) y (3) de manera mucho más económica y eficaz que τ_i y, además, permite empezar a dar respuesta a nuevas cuestiones ante las cuales la técnica τ_i era completamente ineficaz como, por ejemplo:

> **(4)** ¿Cómo comparar dos números mediante sus expresiones escritas?
>
> **(5)** ¿Cómo simplificar los algoritmos de las operaciones suma y resta?"
>
> **(6)** "¿Cómo simplificar el algoritmo de la operación multiplicación?"

Denominaremos OM_a a la OM en torno a un *sistema de numeración aditivo* y generada por esta técnica, $OM_a = < \tau_a >$, en el bien entendido que τ_a sigue teniendo muchas limitaciones para llevar a cabo las tareas asociadas a las cuestiones (5) y (6).

La técnica τ_a es similar a la utilizada en el *sistema egipcio* con agrupamientos de forma regular y cuyos símbolos[7] I, A, B, C, D, E y F designan unidades de órdenes sucesivos, cada una de las cuales es diez veces la anterior (aquí los símbolos representan a cada una de las 7 primeras potencias de la base: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 y 10^6). Resumiendo las características de OM_a, podemos decir que:

- Permite representar los números naturales sin ningún tipo de ambigüedad.
- Sigue presentando dificultades para resolver la tarea de disminuir la cantidad de símbolos necesarios para representar cada número. Así, por ejemplo, para representar el número 9.999.999 necesitamos 63 símbolos.
- No permite comparar dos números de forma satisfactoria, pues la cantidad de símbolos utilizados para representar un número no está relacionada con su tamaño.
- Permite realizar las tareas de sumar, restar, multiplicar y dividir para números pequeños de forma "razonablemente económica". Pero si el tamaño de los números aumenta, entonces la técnica se vuelve muy poco económica.
- Presenta la ventaja de no tener que recurrir a utilizar las tablas de sumar y de multiplicar.

---

usando las palabras-número de forma global, representando cada número por una palabra distinta: "uno", "dos", "tres", etc.

[7] Los símbolos que utilizamos en todo este trabajo generalmente no son los mismos que fueron usados históricamente. Dado que no pretendemos llevar a cabo un estudio histórico de los sistemas de numeración, nos servimos de símbolos más cómodos de representar.

La evolución de la técnica de representación τ_a provoca el desarrollo de la praxeología OM_a. En concreto aparecen dos variaciones de τ_a encaminadas a responder de un modo más eficaz a la cuestión (3). En ambos casos tenemos el ejemplo histórico del *sistema romano*.

(a) Añadir nuevos símbolos a la serie de potencias básica: I, V, X, L, C, D y M designan unidades sucesivas que son alternativamente el quíntuplo o el doble de la anterior (es decir, 10^0, 5×10^0, 10^1, 5×10^1, 10^2, 5×10^2 y 10^3). De esta manera se escribirá VIIII en lugar de IIIIIIIII.

(b) Introducir la condición de que todo símbolo colocado a la izquierda de un símbolo de valor *inmediatamente superior*, indica que el menor debe restarse del mayor:

$$9 \to \text{IX};\ 4 \to \text{IV};\ 40 \to \text{XL};\ 90 \to \text{XC};\ 400 \to \text{CD};\ 900 \to \text{CM}$$

Sin embargo, estas posibles evoluciones de la técnica τ_a (y, por tanto, del sistema de numeración aditivo $OM_a = < \tau_a >$) si bien mejoran la eficacia y la economía de las tareas asociadas a (3), provocan un aumento de complejidad en los algoritmos correspondientes a las operaciones aritméticas, incluso con números pequeños (tareas asociadas a las cuestiones (5) y (6)). Podemos concluir que la "razón de ser" de los sistemas de numeración *aditivos* (esto es, la cuestión a la que responden) es la *representación de los números naturales* sin ambigüedades y con una pequeña cantidad de símbolos, y no la simplificación de los algoritmos de las operaciones aritméticas[8].

Al comprobar que la dirección anterior de evolución de $OM_a = < \tau_a >$ nos lleva a un callejón sin salida, creemos que es necesario ampliar la problemática y hacer evolucionar la técnica de representación hacia la búsqueda de un sistema de numeración que proporcione mayor *fiabilidad* y *economía* en la realización de los cálculos aritméticos.

2.3. *La organización matemática OM_h en torno a un sistema de numeración híbrido*

Existe una dirección de evolución de la técnica τ_a que además de mejorar la representación de los números y de proporcionar una respuesta más eficaz a la tarea de comparar dos números (cuestiones (1), (2), (3), (4)) permite optimizar la economía y la fiabilidad de los algoritmos de las operaciones aritméticas respondiendo así a las cuestiones (5) y (6). Pretendemos, incluso, obtener una técnica capaz de llevar a cabo las tareas asociadas a la cuestión:

(7) ¿Cómo representar los números naturales de manera que se simplifique el algoritmo de la división?

Esta nueva dirección de variación de la técnica τ_a se caracteriza por evitar la repetición de símbolos, gracias a la introducción de un nuevo tipo de símbolos que harán el papel de *multiplicadores de las potencias de la base*. Designaremos mediante τ_h a la técnica que se obtiene como resultado de dicha evolución. Sus principales características son las siguientes:

- Genera una $OM_h = < \tau_h >$ en torno a un sistema de representación *híbrido (aditivo-multiplicativo)* semejante al *sistema chino* o a nuestro *sistema oral*.
- Utiliza los símbolos para las potencias de la base:

$$\text{I} \to 10^0;\ \text{A} \to 10^1;\ \text{B} \to 10^2;\ \text{C} \to 10^3;\ \text{D} \to 10^4;\ \text{E} \to 10^5;\ \text{F} \to 10^6;\ \ldots$$

- Utiliza un nuevo tipo de símbolos que hacen la función de multiplicadores de dichas potencias: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.
- Mejora la solución a las tareas asociadas a la cuestión (3) puesto que evita la repetición de símbolos de las potencias de la base.

[8] De hecho, los contables romanos siempre utilizaban ábacos de fichas para practicar el cálculo, donde cada una de las posiciones del ábaco indicaba cada una de las potencias de diez, siguiendo un sistema semejante al sistema posicional

- La *representación de los números se simplifica*, aunque todavía no podemos escribir todos los números naturales con un número finito de símbolos (cuestión (2)).
- El algoritmo de comparación es más económico que con τ_a, puesto que con τ_h no es necesario contar cuántas veces se repite cada símbolo (cuestión (4)).
- Sin embargo, hay que utilizar la tabla de sumar de los coeficientes y las dos tablas de multiplicar (la de las potencias de la base y la de los coeficientes).

Podemos afirmar que con esta nueva técnica τ_h de representación se pueden realizar las operaciones aritméticas de forma más económica y con mayor alcance que con la técnica τ_a, especialmente cuando intervienen números grandes, aunque ello suponga tener que utilizar las tablas de multiplicar. La representación de los números también se simplifica, pero todavía no podemos responder plenamente a la cuestión (2), pues se necesita un nuevo símbolo para cada potencia de la base.

2.4. *La organización matemática OM_p en torno a un sistema posicional completo*

Las limitaciones de la actividad matemática que es posible llevar a cabo en OM_h ponen de manifiesto la necesidad de ampliarla y construir una nueva OM_p donde puedan realizarse de forma más económica y eficaz las tareas realizadas en OM_h y, al mismo tiempo, se puedan llevar a cabo tareas que en OM_h sólo podían llevarse a cabo de manera muy limitada (como las asociadas a las cuestiones (2), (6) y (7)) e, incluso, tareas aritméticas más complejas asociadas a la cuestión:

> **(8)** ¿Qué representación simplifica la divisibilidad elemental (múltiplos y divisores de un número, máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números, descomposición de un número en factores, ...) sin complicar la suma?

La nueva técnica de representación τ_p generadora de la OM en torno a un sistema posicional completo, $OM_p = < \tau_p >$, se caracteriza por:

- Dar una respuesta definitiva a la cuestión (3).
- Prescindir de los símbolos de las potencias de la base ya que éstas vienen indicadas por las distintas posiciones que ocupan los respectivos coeficientes. Los únicos símbolos utilizados son los coeficientes o multiplicadores de las potencias de la base.
- Permitir escribir todos los números con un número finito de símbolos (fijados de antemano). Se da así una respuesta definitiva a la cuestión (2).
- Añadir un nuevo símbolo como coeficiente multiplicador: el *cero*, para indicar que en una determinada posición hay ausencia de elementos.
- No presentar ambigüedades. Cuestión (1).
- Permitir comparar dos números de una forma muy eficaz. Cuestión (4).
- Calcular de forma más económica y eficaz. Cuestiones (5) a (8).

En resumen, dentro de cada una de estas OM consideradas hemos valorado el *alcance* (o dominio de validez), la *economía*, la *eficacia* y la *fiabilidad* de los distintos algoritmos asociados, lo que nos ha permitido ir ampliando y optimizando los distintos ingredientes praxeológicos. Hemos obtenido de esta manera una sucesión evolutiva de OM mediante ampliaciones y completaciones progresivas que ha culminado en OM_p y que puede considerarse como el esqueleto (o núcleo duro) de una posible *reconstrucción escolar* de OM_p en la institución docente de Formación de Maestros. Dicho proceso puede interpretarse como un proceso de *modelización matemática* μ que transforma OM_i (que hace el papel de *sistema*) en OM_p (que hace el papel de *modelo*): $\mu(OM_i) = OM_p$.

$$\begin{tikzcd} OM_i = [T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i] \arrow[r] \arrow[drr, "\mu"'] & OM_a = [T_a/\tau_a/\theta_a/\Theta_a] \arrow[r] & OM_h = [T_h/\tau_h/\theta_h/\Theta_h] \arrow[d] \\ & & OM_p = [T_p/\tau_p/\theta_p/\Theta_p] \end{tikzcd}$$

Dado que μ es un proceso de *modelización* podemos considerar que el proceso de estudio correspondiente requerirá una *organización didáctica* con características similares a las que se sugieren en el trabajo sobre modelización algebraica de Bolea, Bosch y Gascón (2001). Estas características pueden sintetizarse en seis puntos (*op. cit.* pp. 299-300):

> **1.** En el momento del *primer encuentro* deben aparecer algunos de los tipos de tareas que se pueden formular en términos de OM_i (y, sucesivamente, de OM_a y de OM_h) pero cuya problematicidad provocará la necesidad de "ampliar" esta organización con un modelo de la misma. El profesor tiene que poner en marcha *técnicas didácticas* que permitan que el estudiante manipule *efectivamente* dichas tareas que serán la razón de ser de las futuras ampliaciones de OM_i.
>
> **2.** Para poder dirigir y gestionar adecuadamente un proceso de estudio que abarque OM_i y sus sucesivas ampliaciones sería necesario que existiese un dispositivo didáctico en el que pudiese vivir y desarrollarse con normalidad el *carácter manipulativo escrito del momento exploratorio* (Bosch y Gascón, 1994).
>
> **3.** En el momento del *trabajo de la técnica* debe provocarse la necesidad de cuestionar la *eficacia*, el *alcance* y hasta la *justificación* de las técnicas inicialmente válidas en OM_i (y, sucesivamente, en OM_a y en OM_h). Para ello será preciso que en cada una de las OM intermedias aparezcan problemas situados en la frontera del dominio de validez de las técnicas disponibles. Este *cuestionamiento tecnológico* será el motor de los sucesivos procesos de modelización que desembocarán en la construcción de OM_p.
>
> **4.** El entorno *tecnológico-teórico* debe constituirse de manera que permita justificar, explicar y producir las técnicas iniciales, las nuevas técnicas y las relaciones entre ambas.
>
> **5.** En el momento de la *institucionalización* no debe prescindirse completamente de OM_i, OM_a, ni OM_h, puesto que estas organizaciones intermedias constituyen, en cierta manera, la razón de ser de OM_p. Aunque a la larga las OM intermedias pueden llegar a ser "matemáticamente contingentes" y hasta prescindibles, durante el proceso de estudio son "didácticamente necesarias".
>
> **6.** En el momento de la *evaluación* debe ponerse el acento en la evaluación de la eficacia, la pertinencia y la fecundidad de la *modelización* utilizada. ¿Se han ampliado adecuadamente los tipos de problemas de OM_i, OM_a y OM_h? ¿Cada nuevo modelo ha producido técnicas más eficaces y potentes? ¿Qué se ha perdido? ¿Ha unificado y simplificado los objetos ostensivos y no ostensivos? ¿Ha permitido justificar las técnicas que se utilizaban en las OM intermedias?

3. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE ESTUDIO EXPERIMENTADO

Como acabamos de ver, antes de diseñar el proceso de estudio de una OM, es necesario explicitar su razón de ser, esto es, el conjunto de cuestiones a las que dicha OM debe responder y que, por lo tanto, dan sentido a su estudio. En el caso de los sistemas de numeración, esta razón de ser debe incluir tanto las cuestiones relativas a la designación o representación de los números naturales (propiedades (1) a (3)), como las que hacen referencia a la fiabilidad, la economía y el alcance (o dominio de validez) de los algoritmos de cálculo aritmético que pueden elaborarse mediante dicha representación (propiedades (4) a (8)). Postulamos que es imposible separar ambos tipos de condiciones.

Por tanto, el proceso de estudio que proponemos consistirá en analizar las características de la correspondiente técnica de *representación escrita* de cada una de las OM que van apareciendo y su relación con la *fiabilidad*, el *alcance* (o dominio de validez) y la *economía* de los algoritmos de comparación y de cálculo aritmético que forman parte de dicha OM. Este proceso de estudio es necesario para sacar a la luz y dar sentido a las propiedades del SN posicional, que son transparentes en nuestra práctica matemática habitual.

La primera sesión del proceso tiene una doble función: llevar a cabo el primer encuentro con la "razón de ser" de la OM_p que se pretende reconstruir (esto es, con algunas de las cuestiones que ésta OM deberá responder) y, al mismo tiempo, vivir un primer encuentro con la Organización Didáctica (en adelante OD) que estructurará el proceso de estudio. Aparece aquí un primer aspecto de la *interrelación* o *codeterminación* entre lo matemático –que en este caso podría identificarse con la OM_p que se pretende reconstruir– y lo didáctico –que se identifica con la manera cómo el profesor propone que se lleve a cabo el proceso de estudio–.

El proceso de estudio que vamos a describir se desarrolló a lo largo de 11 sesiones de unos 80 minutos de duración cada una. Se llevó a cabo durante el primer cuatrimestre del curso 2003-04, con un grupo de unos 60 de alumnos del segundo curso de la diplomatura de Maestro de Educación Primaria, dentro de la asignatura "Matemáticas y su Didáctica I". La descripción que vamos a realizar será esquemática y se limitará a explicitar la práctica matemática que se desarrolló en cada sesión.

En la *primera sesión* se abordó el problema general de la numeración y el de la existencia de múltiples SN, provocando así un primer encuentro con la cuestión *q*. El primer tipo de tareas que se abordó (T_i) fue el hallar diferentes representaciones escritas de una cantidad dada mediante una colección de objetos dibujados. Surgieron así espontáneamente los distintos tipos de SN: aditivo, híbrido, posicional en distintas bases.

En la *segunda sesión* se realizó el primer encuentro con un SN aditivo (sistema egipcio) y se pidió a los estudiantes que contestaran a unas preguntas que les permitiría analizar las características del SN considerado:

> *(a) ¿Qué número natural representa cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema egipcio?*
> *(b) ¿Existe algún símbolo en el sistema egipcio para representar al número cero? ¿Cómo se representa el número cero?*
> *(c) ¿Qué operaciones aritméticas se corresponden con la yuxtaposición o adjunción de los símbolos en el sistema egipcio?*
> *(d) ¿Qué papel juega la posición de los símbolos dentro del grupo de símbolos que representa a un número en el sistema egipcio?*

Posteriormente se les propuso realizar algunas operaciones elementales (suma, resta, producto, división) en el SN considerado, lo que suponía un primer trabajo exploratorio en OM_a. En la *tercera sesión* se planteó la tarea de evaluar la economía, fiabilidad y alcance de las técnicas de OM_a mediante un desarrollo apropiado del trabajo de la técnica, con el objetivo de poner en evidencia las limitaciones del SN aditivo. Con el fin de llevar a cabo un análisis sistemático de estas limitaciones, en la *cuarta sesión* se propuso a los estudiantes que respondieran a las siguientes preguntas:

a) *¿Se pueden escribir todos los números naturales mediante el SN aditivo?*
b) *¿Se pueden realizar siempre las distintas operaciones aritméticas? ¿A partir de qué magnitud de los números el cálculo es casi impracticable? (alcance o dominio de validez)*
c) *¿En* OM_a *se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?*
d) *¿A partir de qué números o de qué magnitud de números las operaciones son muy difíciles de realizar sin acumular errores? (fiabilidad)*
e) *¿A partir de qué números o de qué magnitud de números las operaciones son demasiado tediosas y lentas? (economía)*

f) *¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?*

g) *¿Cómo debería cambiarse la técnica τ_a para mejorar los algoritmos de multiplicación y división?*

La *quinta sesión* se dedicó a la transición del SN aditivo al SN híbrido. Después de una evaluación de las técnicas de OM_a, los alumnos propusieron de manera espontánea un sistema híbrido que el profesor documentó con la numeración china. El estudio exploratorio de OM_h siguió las mismas pautas que el de OM_a y estuvo dirigido por un conjunto de cuestiones similares. El trabajo de la técnica y el estudio de las limitaciones de OM_h (evaluación) se llevó a cabo en la *sexta sesión* del proceso. Vale la pena comentar aquí que el trabajo de cálculo dentro de OM_a y de OM_h fue primordial para poner en evidencia la tecnología de los algoritmos de cálculo de las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) ya que los alumnos debía reconstruir estos algoritmos desde el principio. Al mismo tiempo, los algoritmos conocidos del sistema de numeración posicional aparecían como las "buenas técnicas" a utilizar. La *séptima* y *octava sesiones* fueron las del trabajo dentro de OM_p, con el sistema de numeración oral (otro caso particular de OM_h) como contrapunto.

En la *novena sesión* se llevó a cabo una evaluación de las técnicas de cálculo en el sistema posicional en base 10. El objetivo era que los estudiantes descubriesen que la gran *aportación* del SN posicional completo tiene que ver con el alcance o *dominio de validez*, *economía* y *fiabilidad* de los algoritmos de cálculo de las operaciones aritméticas, más que en su efectividad para la representación (designación) de los números. Para ello se propusieron como tareas matemáticas, el análisis de dichas características para diferentes algoritmos de cálculo así como la comparación de dos o más algoritmos en términos de su dominio de validez, su economía y su fiabilidad.[9] Pudimos comprobar la gran dificultad que entraña esta tarea matemática para los estudiantes que están habituados a aplicar técnicas, pero generalmente nunca han tenido que analizar las características de una técnica ni, mucho menos, comparar distintas técnicas que permiten resolver la misma tarea.

En la *décima sesión,* después de realizar una puesta en común sobre las características de OM_p, el profesor realizó una síntesis e *institucionalización* de todo el proceso de estudio. Para ello, explicó que el objetivo del proceso de estudio no era "aprender" las distintas OM que iban apareciendo (OM_a, OM_h, OM_p), en el sentido de aprender a operar en ellas considerándolas como obras cristalizadas, sino que el objetivo de la enseñanza era el propio proceso didáctico, es decir, la dinámica: $q \rightarrow OM_i \rightarrow OM_a \rightarrow OM_h \rightarrow OM_p$. En otras palabras, para construir OM_p como respuesta a q, se tuvieron que construir las OM intermedias, e ir explicitando y analizando sus limitaciones. Este trabajo nos permitió identificar las características de OM_p como una "respuesta" a dichas limitaciones, con lo que las OM intermedias pudieron aparecer como la "razón de ser" de OM_p.

El estudio se interrumpió aquí con una *undécima sesión* de evaluación individual del proceso de estudio realizado. Éste hubiera podido proseguir con un estudio más desarrollado del sistema posicional, poniendo de manifiesto la arbitrariedad de la base decimal, así como

[9] Para precisar el significado de estas características, propusimos la siguiente "definición" provisional: el *dominio de validez* de un algoritmo hace referencia al campo numérico al que puede aplicarse; la *economía* se refiere al conjunto de tareas (escritas o no) que se requieren para realizar un cálculo; y la *fiabilidad* de un algoritmo tiene que ver con la probabilidad de cometer un error de cálculo. Postulamos que un algoritmo será menos fiable cuanto más operaciones elementales se requieran para su realización y será más fiable, a igualdad de las demás condiciones, cuanto más rastro escrito deje de las operaciones realizadas.

la existencia de sistemas que permiten dar una respuesta más eficaz que el SN posicional completo al trabajo con "números grandes".

4. LO MATEMÁTICO EN LA CREACIÓN Y ANÁLISIS DE ORGANIZACIONES DIDÁCTICAS

El problema didáctico de cómo organizar, en la Institución de Formación de Maestros, el estudio de la cuestión "*¿Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental*?" tiene algunas características especiales. En particular, se trata de una cuestión cuya respuesta ("el sistema de numeración posicional completo") es perfectamente conocida por los estudiantes de dicha institución. Éstos han trabajado largamente en el sistema posicional de base 10 y lo han utilizado para hacer todo tipo de cálculos. La OM en torno a dicho sistema de numeración está naturalizada y ha llegado a ser casi transparente para ellos.

Sin embargo, y a pesar de lo anterior, los estudiantes de dicha institución docente no pueden justificar la validez de dicha respuesta ya que, para ellos, es sólo una respuesta en el sentido "débil". Por lo tanto, no están en condiciones de *utilizarla* para llevar a cabo aquellas actividades, matemáticas o no, que requieren dicha justificación. Así, por ejemplo, no pueden cuestionar la pertinencia de la base 10 para llevar a cabo determinadas actividades matemáticas, ni proponer cómo podría modificarse dicha base para trabajar con números "grandes". Tampoco están en condiciones, como futuros maestros, de *enseñarla* a sus alumnos de Primaria.

Esta situación ha provocado algunas dificultades para llevar a cabo el proceso de estudio experimentado porque los estudiantes son reacios a implicarse en el estudio de una cuestión cuya respuesta supuestamente conocen. De todos modos, ha tenido la virtud de poner de manifiesto la insuficiencia de las respuestas "débiles" incluso en el caso en que éstas vayan acompañadas de un cierto manejo de las técnicas que forman parte de la OM que se insinúa en dichas respuestas. Ha surgido así la necesidad de reformular el *problema didáctico* inicial para plantearlo en los siguientes términos:

> *¿Cómo reconstruir en la Institución de Formación de Maestros una OM en torno al sistema de Numeración Posicional,* OM_p, *de tal manera que dicha reconstrucción contenga explícitamente su "razón de ser", esto es, las cuestiones a las que* OM_p *responde*?

4.1. Evaluación del proceso de estudio experimentado

A fin de resolver el problema didáctico tal como ha sido replanteado era necesario diseñar un proceso de estudio fundado en una cuestión, que llamaremos *cuestión generatriz*, que fuese susceptible de imponer numerosas cuestiones derivadas. El proceso debía de permitir integrar de manera *funcional* las sucesivas *respuestas provisionales* que fuesen apareciendo a lo largo de su desarrollo (respuestas que, al ser consideradas en sentido "fuerte", tienen estructura praxeológica) en una OM al menos local. Además dicho proceso debía diseñarse de tal forma que permitiese y potenciase una *reestructuración de las responsabilidades* matemáticas y didácticas asignadas a los miembros de la comunidad de estudio por el contrato didáctico vigente. Dicha reestructuración debería permitir que los alumnos llevaran a cabo una actividad bastante *autónoma* y el profesor pudiese considerarse como *director del estudio* más que como un *enseñante* que muestra a los alumnos el modo de resolver las tareas propuestas. Este tipo de proceso de estudio es lo que denominamos un Recorrido de Estudio e Investigación (REI), en el sentido introducido recientemente por Chevallard (2004, 2005).

Si queremos evaluar, en términos de un REI, el proceso de estudio diseñado y experimentado deberemos empezar por preguntarnos si la cuestión generatriz *q* elegida: "*¿Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental*?" era la más adecuada. El análisis retrospectivo del proceso didáctico experimentado nos permite afirmar que, dadas las características de la institución docente de Formación de Maestros en la que se llevó a cabo el proceso de estudio, no parece que esta elección haya sido la más acertada. Aunque es cierto que a lo largo del proceso de estudio el profesor ha planteado cuestiones relativas a las limitaciones de los sucesivos sistemas de numeración que iban apareciendo e intentó que los alumnos tomaran conciencia de determinadas características de los algoritmos de designación y de cálculo aritmético que era posible implementar en cada uno de ellos (como el *dominio de validez*, la *economía* y la *fiabilidad*), lo cierto es que dichas cuestiones no constituyeron en ningún momento el motor de la actividad matemática de los alumnos.

Pensamos que en la institución docente de Formación de Maestros hubiese cumplido mucho mejor la función de *cuestión generatriz* una *cuestión tecnológica* como:

q': *¿Qué propiedades y características especiales tiene nuestro sistema de numeración para que se haya impuesto sobre todos los que han existido a lo largo de la historia y que han coexistido durante muchos siglos?*

Partiendo de esta nueva cuestión, decidimos experimentar un nuevo proceso de estudio con alumnos de 14-15 años de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (Bosch, Gascón y Sierra 2004). Los resultados confirmaron que, cuando se trata de alumnos que ya conocen y usan habitualmente el sistema de numeración posicional, las *cuestiones tecnológicas* tienen un poder generador mucho mayor. En efecto, si la cuestión "se toma en serio", aparecen inmediatamente las cuestiones derivadas que llevan a comparar las características de distintos sistemas de numeración con la ventaja adicional de que la propia cuestión generatriz propone un primer "medio" (los sistemas de numeración que han existido históricamente) para contrastar las conjeturas que vayan surgiendo. Esto no impide, sino que posibilita, que a lo largo del proceso surja la necesidad de construir sistemas de numeración con características prefijadas (que no tienen por qué haber existido históricamente) para utilizarlos como medio para seguir contrastando hipótesis o bien para compararlos con el sistema posicional completo o con cualquier otro.

Entre las cuestiones que pueden plantearse para evaluar el proceso de estudio experimentado en términos de un REI pueden citarse las siguientes:

- ¿Se ha "*tomado en serio*" la respuesta a la cuestión *q* de partida?
- ¿Cómo se ha *reestructurado* a lo largo del proceso de estudio el reparto de responsabilidades entre el profesor y los alumnos?
- ¿Hasta qué punto los alumnos han llevado a cabo el recorrido de manera *autónoma* y en qué medida se han dejado conducir por el profesor?

Estas cuestiones pueden responderse, en parte, a partir de la confluencia entre las restricciones de la institución docente y la naturaleza de la cuestión inicial *q* elegida. En general puede decirse que el proceso de estudio resultó ser demasiado *guiado* para ser considerado un REI y, por tanto, la pretendida *autonomía de los alumnos* bastante relativa.

Pero lo anterior no significa que, en el estado actual de desarrollo de la TAD, estemos en condiciones de precisar el grado de autonomía que pueden asumir los alumnos ni, mucho menos, cuáles son las condiciones que hacen posible que los alumnos asuman dicha autonomía efectivamente. En términos generales, hemos de reconocer que muchas de las cuestiones relativas a la *reestructuración del reparto de responsabilidades entre el profesor y los alumnos* que el REI provoca están esencialmente abiertas. Dado que en cada institución escolar (por ejemplo en la Formación de Maestros) se ha forjado históricamente un contrato didáctico institucional que evoluciona bastante lentamente, se plantean dos cuestiones abiertas e inseparables (en el sentido que la respuesta que pueda darse a cada una de ellas condiciona profundamente las posibles respuestas a la otra):

- ¿Cómo cambiar la distribución –implícita pero fuertemente arraigada– de las responsabilidades matemático-didácticas que otorga el contrato didáctico institucional para que sea posible poner en marcha un REI?
- ¿En qué medida y en qué forma la puesta en marcha de un REI en una institución docente actual modifica las restricciones institucionales que pesan sobre la reconstrucción escolar de OM y, en consecuencia, provoca cambios en la distribución de responsabilidades matemático-didácticas?

En lo que hace referencia a la evaluación del proceso de estudio experimentado, hay una cuestión importante que queremos volver a subrayar. Nos referimos a la estructura de las OM progresivamente construidas a lo largo del proceso. El cambio en la cuestión inicial q impide que se considere OM_p como única respuesta a q y, por lo tanto, devuelve el protagonismo a las OM intermedias que, de esta forma, no sólo forman parte del recorrido sino que constituyen, por así decirlo, su *núcleo*. Por lo tanto, la evaluación del proceso de estudio debe comprender una evaluación de las OM construidas a lo largo del mismo y el grado de integración funcional de estas OM que funcionan como *respuestas provisionales* a la cuestión inicial q.

4.2. Una amalgama de organizaciones didácticas “puntuales”

Volviendo a la organización OM_p estudiada inicialmente en la institución de Formación de Maestros, hemos visto más arriba que ésta aparece como el resultado final de un proceso de ampliaciones y completaciones progresivas que, partiendo de una praxeología puntual OM_i, ha pasado por una serie de praxeologías intermedias OM_a y OM_h generadas sucesivamente por un determinado desarrollo evolutivo de las cuestiones problemáticas y los tipos de tareas asociados que debían aparecer como las “razones de ser” de OM_p para los sujetos de dicha institución docente. De este modo, *el proceso de estudio* o reconstrucción de OM_p *ha estado guiado por la actividad matemática* que ha sido posible llevar a cabo en cada una de esas OM intermedias y, en particular, por las restricciones específicas que han ido apareciendo en cada una de ellas y que han evolucionado a medida que avanzaba el proceso de ampliación.

Resulta, en definitiva, que la organización didáctica ha estado fuertemente condicionada por la estructura de las OM intermedias y, en última instancia, por la cuestión matemática inicial q (independientemente del carácter más o menos “generador” del proceso que haya tenido efectivamente dicha cuestión) así como por el bloque práctico-técnico de OM_p que constituye una respuesta explícita a la citada cuestión inicial.

Para contrastar la tesis anterior y, sobre todo, para bajar a los detalles y mostrar cuál es el mecanismo mediante el cual “lo matemático” condiciona la organización didáctica del proceso de estudio, sería necesario explicitar las *tareas didácticas* a las que se han enfrentado el profesor y los alumnos para reconstruir OM_p, las *técnicas didácticas* que han utilizado para llevar cabo dichas tareas didácticas, así como el *discurso tecnológico-teórico* disponible para interpretar y justificar dichas técnicas.

En el caso concreto del proceso de estudio experimentado, un análisis minucioso del recorrido vivido por el profesor y los alumnos muestra que se llevaron a cabo una sucesión de tareas matemáticas T_{mk} en los distintos SN considerados (aditivo, híbrido, posicional):

$$T_i \to T_{a1} \to T_{a2} \to T_{a3} \to T_{a4} \to T_{h1} \to T_{h2} \to T_{h3} \to T_{h4} \to T_{p1} \to T_{p2}$$

Donde T_i permite un primer encuentro con los distintos sistemas de numeración. T_{a1},T_{h1} y T_{p1} son tareas que provocan un primer encuentro con OM_a, OM_h, y OM_p respectivamente. T_{a2} y T_{h2} son tareas para un trabajo exploratorio dentro de OM_a y OM_h, realizando algunas operaciones elementales en el SN considerado. T_{a3} y T_{h3} pretenden un trabajo sistemático de la técnica, de la evaluación y del análisis de las limitaciones dentro de OM_a y OM_h respectivamente. T_{a4} y T_{h4} consisten en destacar las limitaciones del SN aditivo e híbrido respectivamente, para el cálculo cuando el tamaño de los números aumenta y, en consecuencia, tienen el objetivo de provocar la construcción de una técnica más eficaz. Además en T_{h4} se propone la comparación del SN oral con el SN posicional. Por último, el objetivo de T_{p2} es que el estudiante descubra la gran aportación del SN posicional completo en lo que se refiere al *alcance, economía y fiabilidad* de los algoritmos de cálculo de las operaciones elementales.

Esta sucesión viene guiada por una sucesión paralela de *tareas didácticas* que, en el caso presentado, el profesor fue planteando "paso a paso" a los alumnos. Cada una de estas tareas didácticas tiene como finalidad ayudar a evolucionar el estudio en la dirección marcada por el modelo epistemológico de referencia. En consecuencia, con la realización de cada una de dichas tareas didácticas, el profesor pretendía ayudar a los alumnos a avanzar un paso en dicha dirección.

A su vez, cada una de dichas tareas didácticas requería, para su realización, de una *técnica didáctica*. En el caso que nos ocupa, podemos afirmar que las técnicas didácticas utilizadas por el profesor consistían en proponer una *tarea matemática* concreta a los alumnos. De este modo, si denominamos $\tau_{mk}{}^D$ a la *técnica didáctica* que utilizó el profesor para llevar a cabo la *tarea didáctica* $T_{mk}{}^D$, entonces podemos describir $\tau_{mk}{}^D$ como la técnica que consiste en proponer a los alumnos la tarea T_{mk}.

De lo anterior se desprende que la OD global efectivamente puesta en práctica consistió en una amalgama de OD "puntuales" en el sentido de que cada una sólo permitía construir "un pedazo" de la organización praxeológica global. A pesar de tener una estrategia didáctica global (la construcción de la sucesión $q \to OM_i \subset OM_a \subset OM_h \subset OM_p$), el profesor se planteó tareas didácticas aisladas: una para cada etapa de la construcción. Utilizó para ello únicamente técnicas didácticas "puntuales" que consistían en proponer tareas matemáticas concretas que aparecieron, a ojos de los alumnos, como totalmente aisladas las unas de las otras. En particular, el contrato didáctico establecido no consiguió asignar a los estudiantes ninguna responsabilidad más allá de la resolución de las tareas matemáticas aisladas que les iba proponiendo el profesor.

En resumen, podemos decir que la OD puesta en práctica se sustenta en el Modelo Epistemológico de Referencia que hemos esquematizado mediante la sucesión $q \to OM_i \subset OM_a \subset OM_h \subset OM_p$ y que constituye, por ello, un ingrediente esencial de la *tecnología didáctica* del profesor. Y también podemos decir que este ingrediente "matemático" no ha sido suficiente para la realización efectiva de una OD que vaya más allá de una amalgama de construcciones aisladas. La vía iniciada por los REI, y el nuevo reparto de responsabilidades que propone entre profesores y alumnos, podría ser una dirección prometedora en aras de superar las restricciones que emanan de los contratos didácticos habituales.

4.3. El papel de lo matemático en la creación de organizaciones didácticas

Ante todo hay que decir que, si bien es cierto que el proceso de estudio analizado ha sido realizado en condiciones un poco “especiales” y, en particular, después de explicitar el modelo epistemológico de referencia de OM_p, postulamos que, en términos generales, el caso descrito muestra claramente el papel central de lo matemático en la creación de la OD.

En efecto, de un modo general podemos afirmar que, aunque un profesor no utilice de manera explícita y consciente un modelo epistemológico de la OM que da respuesta a la cuestión estudiada, su práctica docente estará igualmente condicionada por el modelo epistemológico (de dicha OM) dominante en la institución docente[10]. Incluso es posible que en este caso, que se corresponde mejor con la práctica docente habitual de la inmensa mayoría de profesores de matemáticas, la incidencia del modelo epistemológico específico (de la OM que se pretende reconstruir) sobre la OD sea incluso más determinante que en el caso relativamente “experimental” que hemos analizado. Dado el carácter implícito, transparente y, por tanto, no cuestionable del modelo epistemológico dominante en una institución docente, es muy difícil que el profesor pueda considerar que existe otra manera de interpretar la OM en cuestión y, en consecuencia, una forma diferente de organizar el proceso de reconstrucción escolar de la misma.

Otra de las características que podría considerarse como “muy particular” del proceso didáctico descrito es el hecho de que la organización matemática OM_p que acaba siendo la respuesta a la cuestión planteada, se construya mediante un proceso de ampliaciones y completaciones sucesivas que parte de una OM puntual. Pues bien, queremos subrayar que este proceso de reconstrucción escolar de una OM, sin ser universal, es aplicable a una amplia gama de casos.[11] De hecho, la reconstrucción de OM_p, tal como ha sido descrita, puede considerarse como el resultado de aplicar una *técnica didáctica* muy general al caso particular del Sistema de Numeración y la institución de Formación de Maestros: la construcción de una OM, que aparece como la respuesta a una cuestión generatriz propuesta, mediante un proceso de ampliaciones y completaciones progresivas a partir de una OM puntual (o respuesta inicial).

Postulamos que, en general, la reconstrucción “artificial” o “escolar” de una OM en una institución docente I puede estar guiada por el desarrollo evolutivo de cierta problemática que proporcionará las “razones de ser” iniciales de OM en I. Éstas no tienen por qué coincidir con las “razones de ser” de OM en la institución I’, en la cual, OM aparece como respuesta aceptable a la cuestión a estudiar. En todo caso, la problemática y los tipos de tareas asociados (así como las técnicas y el entorno tecnológico-teórico) deberán estar adaptados a las restricciones ecológicas que I impone (Gascón, 2001).

[10] Podríamos decir que el modelo epistemológico de referencia habitual de los SN consiste en considerarlos como una técnica de representación de los números sin hacer hincapié sobre la simplificación del cálculo en las distintas operaciones. Esto conduce a que las OD propuestas para el estudio de los SN propongan sólo tareas que hacen referencia a la representación de los números y dejen de lado las tareas de cálculo.

[11] Ver por ejemplo Bolea *et al.* (2001) y García (2005) para el caso de las magnitudes proporcionales, el proceso de algebrización y la modelización funcional. También Gascón (2004) presenta la ampliación de la geometría sintética enseñada en la Secundaria obligatoria hacia la geometría analítica del Bachillerato.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J., (2001): La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1) 7-40.

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1994): La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), 314-332.

BOSCH, M., GASCÓN, J. y SIERRA, T. (2004): Análisis de un proceso de estudio en torno a la numeración. En De Castro, C.y Gómez, M. (ed.) *Anàlisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas*. Capítulo 3, 39-74. Edebé (Barcelona).

BROUSSEAU, G. (1998): *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, Eds.). La Pensée Sauvage: Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1985, 1991): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné,* La Pensée Sauvage : Grenoble. [Traducción en español de Claudia Gilman: *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado,* Aique: Buenos Aires (1997)]

CHEVALLARD, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.

CHEVALLARD, Y. (2004): La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire, *3e Université d'été Animath*, Saint-Flour (Cantal), 22 al 27 août 2004.

CHEVALLARD, Y. (2005): Steps towards a new epistemology in mathematics education. *IV Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4).* Sant Feliu de Guíxols (Spain).

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori: Barcelona.

GARCÍA, F. J. (2005): *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Cencias. Universidad de Jaén.

GASCÓN, J. (2004): Incidencia del "*autismo temático*" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. En Palacián, E. (ed.) *Aspectos didácticos de matemáticas*. Zaragoza: ICE de la Universidad de Zaragoza, pp. 81-124.

GASCÓN, J. (2001): *Algunos problemas de investigación relacionados con la práctica docente del profesor de matemáticas*, XVI Jornadas del SI-IDM, Huesca. (Recuperable en http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/).

GASCÓN, J. Y SIERRA, T. (2003): *Reconstrucción escolar de la numeración. De la representación de los números a la simplificación de los algoritmos de cálculo.* (Recuperable en: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin15.htm)

GUITEL, G. (1975) : *Histoire comparée des numérations écrites*. Paris: Flammarion.