

# SERIES DE FOURIER

TRABAJO FIN DE GRADO  
CURSO 2022/2023



UNIVERSIDAD  
**COMPLUTENSE**  
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS  
GRADO EN MATEMÁTICAS

ALUMNA  
Paola Diago Nañez

TUTORA  
María del Mar Jiménez Sevilla

Septiembre de 2023

# Índice

Resumen . . . . .	iii
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentos teóricos. Los espacios <math>L^p</math></b>	<b>4</b>
2.1 Construcción de los espacios $L^p$ . . . . .	4
2.2 Espacios de Hilbert: el espacio $L^2$ . . . . .	9
2.2.1 Ortogonalidad y ortonormalidad . . . . .	11
<b>3 Series de Fourier</b>	<b>18</b>
3.1 Coeficientes de las series de Fourier . . . . .	18
3.1.1 Forma compleja . . . . .	18
3.1.2 Forma trigonométrica . . . . .	19
3.2 Convergencia de las Series de Fourier . . . . .	22
3.2.1 Convolución y Núcleo de Dirichlet . . . . .	23
3.2.2 Criterio de Dini . . . . .	27
3.2.3 Otros teoremas de convergencia puntual . . . . .	30
3.2.4 Convergencia uniforme . . . . .	31
3.2.5 Divergencia. Teorema de DuBouis-Reymond . . . . .	34
3.3 Extensiones periódicas . . . . .	36
3.4 Fenómeno de Gibbs . . . . .	37
3.5 Series de fourier no trigonométricas . . . . .	39
3.5.1 Series de Fourier-Jacobi . . . . .	39
3.5.2 Series de Fourier-Bessel . . . . .	41
<b>4 Aplicaciones: Resolución de EDPs</b>	<b>47</b>
4.1 Ecuación del calor en un rectángulo . . . . .	47
4.2 Problemas de Sturm-Liouville . . . . .	50
4.2.1 Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas . . . . .	52
4.2.2 Ecuación de ondas en un cilindro . . . . .	53
<b>5 Conclusión</b>	<b>56</b>
<b>A Resultados auxiliares</b>	<b>57</b>

<b>B Código de Matlab</b>	<b>63</b>
B.1 Serie de Fourier . . . . .	63
B.2 Series de Fourier-Jacobi . . . . .	64
B.3 Series de Fourier-Bessel . . . . .	65
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

## Resumen

A lo largo de esta memoria se sentarán las bases del Análisis de Fourier y algunas de sus aplicaciones. Primeramente se introducirá el concepto de los espacios  $L^2$  y se analizarán sus características principales, proporcionando así un contexto teórico adecuado para el estudio de la series de Fourier y de sus coeficientes, así como de las condiciones y requisitos para la convergencia de dichas series. Esta recopilación de resultados permitirá tener una perspectiva general de esta teoría, útil tanto en el ámbito matemático como en otra áreas de la ciencia e ingeniería.

**Palabras clave:** función periódica, producto interno, convergencia puntual, convolución, extensión periódica, polinomios de Jacobi, funciones de Bessel, problemas de Sturm-Liouville.

## Abstract

This thesis is about discussing Fourier Analysis and their applications. Giving a mathematical context is imperative, so firstly we are taking a close look at basic vector spaces such as the Hilbert Space  $L^2$  and his main characteristics. Afterwards, we will be ready to go into details about Fourier Series, focusing in their coefficients and types of convergence according to Analysis fundamental theorems. Thus we will be able to build up a complete theory which is useful not only in pure mathematics, but also in many fields of science and engineering.

**Key words:** periodic function, inner product, pointwise convergence, convolution, periodic extension, Jacobi's polynomials, Bessel's functions, Sturm-Liouville problems.

# Capítulo 1

## Introducción

A lo largo de la historia, los matemáticos se han dedicado a desarrollar numerosas herramientas que consiguiesen medir, explicar y predecir el mundo que nos rodea y todos los fenómenos que ocurren en él. Ha habido muchos periodos en los que se han producido grandes avances científicos, pero sin duda uno de los grandes hitos de las matemáticas fue el desarrollo del cálculo infinitesimal, por parte de Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Leibnitz (1646-1716), con el fin de dar solución a varios problemas de la antigüedad que hasta entonces se consideraban irresolubles, como por ejemplo el cálculo exacto de áreas y volúmenes o la optimización de determinados procesos. Así, la notación del análisis infinitesimal se fue convirtiendo en el lenguaje matemático usado para modelar numerosos fenómenos en la naturaleza. Por medio de las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs en adelante) se conseguía sintetizar las variables fundamentales de un sistema físico y sus variaciones en un conjunto de entidades conocidas, de las que se podían extraer numerosas conclusiones acerca de la evolución de dicho sistema. No obstante, resolver una EDP (o un sistema de EDPs) en general no suele ser una tarea fácil (de hecho, casi nunca se puede obtener una solución general de una dada arbitrariamente) y hallar muchas de esas soluciones (que a día de hoy siguen siendo una incógnita) requiere del desarrollo de nuevas técnicas matemáticas.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 1768-París, 1830) fue un matemático y físico francés que se valió de su participación activa en la Revolución Francesa para optar a una cátedra en la École Polytechnique. Después de sus numerosas expediciones como acompañante de Napoleón, Fourier volvió a París y en 1816 comenzó sus experimentos sobre la difusión del calor, gracias a los cuales consiguió modelar la evolución de la temperatura por medio de la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

donde  $u$  es la función temperatura que varía en el espacio y en el tiempo y  $\kappa$  es una constante positiva. Seis años más tarde, Fourier publicó un tratado llamado *Théorie analytique de la chaleur* (Teoría analítica del calor), en el que incluyó la deducción de la ecuación (1.1), para la cual, además, encontró sus soluciones explícitas en forma de series infinitas de funciones trigonométricas. Dicho tratado no solo profundiza en los procesos de la difusión del calor, sino que desarrolla los primeros rudimentos de lo que hoy conocemos como análisis de Fourier (o análisis armónico) partiendo de la premisa de que toda función admite una representación

en serie de senos y cosenos, y que esta es siempre convergente.



Figura 1.1: J.B Joseph Fourier [6].

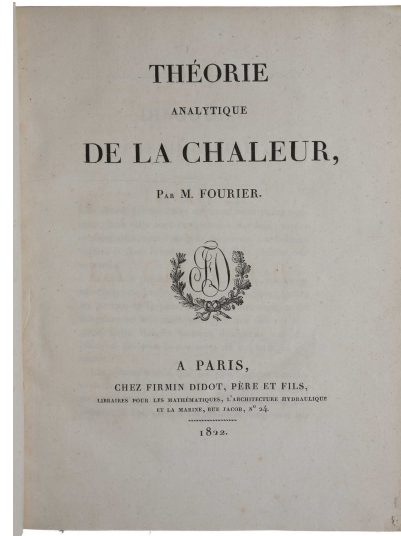


Figura 1.2: *Théorie analytique de la chaleur* [27].

Sin embargo, Fourier nunca aportó una demostración precisa de que dichas series fuesen siempre convergentes (de hecho no siempre lo son) y mucho menos concretó las hipótesis bajo las cuales una función admitía esta representación. Después de la publicación de su tratado, numerosos matemáticos como Dirichlet o Jordan se lanzaron a la ardua tarea de desarrollar criterios de convergencia para las series de Fourier mientras que, simultáneamente, matemáticos como Heine y Riemann investigaban las implicaciones que tenía cada tipo de convergencia a la hora de manipular series y operar con ellas. La llegada del siglo XX trajo consigo el nacimiento de la teoría de la medida e integral de Lebesgue, que reinventaba el concepto de función integrable e introducía la característica de *para casi todo punto* de algunas proposiciones y teoremas. Además, durante estos años también se definieron y fundamentaron las bases de los espacios de Hilbert y se establecieron las principales características de los espacios  $L^p$ , estudiando así las series de Fourier desde un nuevo enfoque que permitió extender todo el análisis de Fourier desarrollado hasta entonces a funciones pertenecientes a dichos espacios.

Esta memoria está dividida esencialmente en tres partes. La primera de ellas está dedicada a la construcción del espacio  $L^2$ , así como al estudio del mismo como espacio vectorial y a la introducción de las primeras nociones y tipos de convergencia de funciones. A esta sección le sigue el estudio propiamente dicho de las series de Fourier y sus coeficientes, que contiene los resultados más relevantes sobre convergencia, divergencia y extensiones periódicas, además del análisis del fenómeno de Gibbs. Posteriormente, introducimos el Análisis de Fourier no trigonométrico con el planteamiento de las Series de Fourier-Jacobi y las Series de Fourier-Bessel. Por último, se dedica un capítulo a las aplicaciones que tienen las series de Fourier, aparte de la que tienen en la resolución de EDPs, destacando así el papel fundamental de esta herramienta matemática en otras áreas de conocimiento como

la física o la ingeniería. Por medio del estudio de una amplia bibliografía se ha conseguido recopilar las cuestiones más importantes que atañan al análisis de Fourier, relacionándolo con el resto de áreas de estudio y profundizar no solo en las aplicaciones de esta herramienta, sino en los problemas propios que surgen de su desarrollo.

# Capítulo 2

## Fundamentos teóricos. Los espacios $L^p$

Antes de adentrarnos en el estudio y análisis de las series de Fourier se verá qué condiciones debemos imponer a las funciones cuya representación queremos obtener para que dicha descomposición en serie esté bien definida. Para ello se construirán unos espacios de funciones con buenas propiedades en cuanto a integración y convergencia se refieren: Los espacios de Lebesgue  $L^p$  (o de forma simplificada, espacios  $L^p$ ) para  $p \in [1, \infty]$ , generados a partir de un espacio vectorial y una determinada relación de equivalencia. De esta forma, dispondremos de un contexto óptimo para el estudio de todas las propiedades y características de las serie de Fourier, así como de sus generalizaciones y variantes. La mayoría de los resultados teóricos, así como sus demostraciones, se han extraído de [23].

### 2.1 Construcción de los espacios $L^p$

Como punto de partida de toda la teoría que desarrollaremos en esta memoria, consideremos los espacios de medida  $(\mathbb{T}, \mathcal{M}, \mu)$ , donde  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$  es intervalo de longitud  $2\pi$ ,  $\mu$  denota la medida de Lebesgue y  $\mathcal{M}$  la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue, y  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}}, \mu)$  (con  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$  la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos en  $\mathbb{C}$ ).

Antes de introducir el espacio de funciones con el que trabajaremos, veamos algunas definiciones previas.

**Definición 2.1.1.** 1. Sea  $f$  una función  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ . Decimos que  $f$  es  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ -medible (o medible si no hay lugar a confusión) si para todo  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ ,  $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ . Al conjunto de dichas funciones medibles lo llamaremos  $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ .

2. Denotamos por  $\mathcal{C}(\mathbb{T})$  el espacio de funciones  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periódicas continuas en  $\mathbb{T}$ .

3. Denotamos por  $PC(\mathbb{T})$  al conjunto de las funciones  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periódicas que son continuas a trozos en  $\mathbb{T}$ , es decir, que verifican las siguientes condiciones:

- Para todo  $x_0 \in \mathbb{T}$  que no sea uno de los extremos del intervalo existen  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

- Para  $x_1$  extremo izquierdo y  $x_2$  extremo derecho del intervalo existen  $\lim_{x \rightarrow x_1^+} f$  y  $\lim_{x \rightarrow x_2^-} f(x)$ .
  - $f$  es continua en todo  $\mathbb{T}$  salvo quizá en una cantidad finita de puntos.
4. Denotamos por  $PS(\mathbb{T})$  al conjunto de las funciones  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$  periódicas que son regulares a trozos, es decir, a aquellas funciones tal que  $f, f' \in PC(\mathbb{T})$ .
5. En las condiciones de la definición anterior, si además  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ , entonces diremos que  $f$  es continua y regular a trozos en  $\mathbb{T}$ . El espacio que forman dichas funciones se denota por  $PSC(\mathbb{T})$ .

**Observación 2.1.2.** Nótese que

$$PSC(\mathbb{T}) \subset PS(\mathbb{T}) \subset PC(\mathbb{T}).$$

Como últimos preliminares enunciemos algunas propiedades relacionadas con la medida de Lebesgue.

**Definición 2.1.3.** Decimos que una función  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$  cumple una cierta propiedad  $\mathcal{P}$  casi para todo punto (y lo denotamos c.p.t.) si el conjunto de puntos en el que  $f$  no satisface  $\mathcal{P}$  tiene medida nula.

Ahora, comenzaremos definiendo ciertos espacios de funciones, que serán la base de nuestros  $L^p(\mathbb{T})$ , y describiremos sus propiedades.

**Definición 2.1.4.** Sea  $p \in [1, \infty)$ . Definimos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{T}) := \left\{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{T}) : \int_{\mathbb{T}} |f|^p d\mu < \infty \right\}. \quad (2.1)$$

**Proposición 2.1.5.** Para  $p \in [1, \infty)$ ,  $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$  es un espacio vectorial.

*Demostración.* Sean  $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$  para  $p \in [1, \infty)$ . Supongamos que  $p$  es finito. En tal caso, para cada  $x \in \mathbb{T}$

$$|f(x) + g(x)|^p \leq [2 \max(|f(x)|, |g(x)|)]^p \leq 2^p [|f(x)|^p + |g(x)|^p]$$

Integrando se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}} |f + g|^p d\mu \leq 2^p \left[ \int_{\mathbb{T}} |f|^p d\mu + \int_{\mathbb{T}} |g|^p d\mu \right] < \infty \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T}).$$

Por otro lado, para  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{T}} |\lambda f|^p d\mu = |\lambda|^p \int_{\mathbb{T}} |f|^p d\mu < \infty \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{L}^p.$$

□

Con el fin de construir un espacio normado, definamos los siguientes funcionales y algunas de sus propiedades:

**Definición 2.1.6.** Dada una función  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$  con  $p \in [1, \infty)$ , se define el siguiente funcional

$$\|f\|_p := \left( \int_{\mathbb{T}} |f|^p d\mu \right)^{1/p}. \quad (2.2)$$

**Proposición 2.1.7. (Desigualdad de Hölder)** Sean  $p, q \in (1, \infty)$  tal que  $pq = p + q$ <sup>1</sup> y las funciones  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$  y  $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{T})$ . Entonces se cumple que

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad (2.3)$$

*Demostración.* Distingamos dos casos:

- Supongamos que  $\|f\|_p = 0$  c.p.t.  $x \in \mathbb{T}$ , entonces  $f(x) = 0$  c.p.t.  $x \in \mathbb{T}$  y  $f(x)g(x) = 0$  c.p.t.  $x \in \mathbb{T}$ . Por tanto  $\|fg\|_1 = 0$ . El caso  $\|g\|_q = 0$  es análogo.
- Supongamos que  $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$ , entonces tomemos las funciones

$$\tilde{f} := \frac{1}{\|f\|_p} f \quad \tilde{g} := \frac{1}{\|g\|_q} g$$

Se tiene que

$$\|\tilde{f}\|_p^p = \left\| \frac{1}{\|f\|_p} f \right\|_p^p = \frac{1}{\|f\|_p^p} \|f\|_p^p = 1.$$

Análogamente

$$\|\tilde{g}\|_q^q = \left\| \frac{1}{\|g\|_q} g \right\|_q^q = \frac{1}{\|g\|_q^q} \|g\|_q^q = 1.$$

Por el lema A.0.1, concluimos que

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \|fg\|_1 = \|\tilde{f}\tilde{g}\|_1 \leq \frac{1}{p} \|\tilde{f}\|_p^p + \frac{1}{q} \|\tilde{g}\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Despejando, tenemos el resultado buscado. □

**Proposición 2.1.8.** Para cada  $p \in [1, \infty)$ , los funcionales de la familia  $(\|\cdot\|_p)_p$  son seminormas en  $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ .

---

<sup>1</sup>En tal caso se dice que  $p$  y  $q$  son exponentes conjugados.

*Demostración.* Dada  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ , es claro que  $\|f\|_p \geq 0 \forall x \in \mathbb{T}$  por ser  $|f|^p \geq 0$ .

Por otro lado, dado  $\lambda \in \mathbb{C}$  y  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ :

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_p &= \left( \int_{\mathbb{T}} |\lambda f|^p d\mu \right)^{1/p} = \left( |\lambda|^p \int_{\mathbb{T}} |f|^p d\mu \right)^{1/p} = |\lambda| \left( \int_{\mathbb{T}} |f|^p d\mu \right)^{1/p} = \\ &= |\lambda| \|f\|_p. \end{aligned}$$

Demostremos ahora que se cumple la desigualdad triangular (o desigualdad de Minkowski), que para  $p = 1$  es inmediata. Tomamos  $p > 1$  y  $q$  su exponente conjugado. Tenemos entonces que:

$$\|f + g\|_p^p = \int_{\mathbb{T}} |f + g|^p d\mu \leq \int_{\mathbb{T}} |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_{\mathbb{T}} |g| |f + g|^{p-1} d\mu = I_1 + I_2.$$

Por la desigualdad de Hölder (2.3), se obtienen las siguientes estimaciones:

$$I_1 \leq \left[ \int_{\mathbb{T}} |f|^p d\mu \right]^{1/p} \left[ \int_{\mathbb{T}} |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right]^{1/q} = \|f\|_p \cdot \left[ \int_{\mathbb{T}} |f + g|^p d\mu \right]^{1/q}.$$

$$I_2 \leq \left[ \int_{\mathbb{T}} |g|^p d\mu \right]^{1/p} \left[ \int_{\mathbb{T}} |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right]^{1/q} = \|g\|_p \cdot \left[ \int_{\mathbb{T}} |f + g|^p d\mu \right]^{1/q}.$$

Sustituyendo en la primera desigualdad obtenemos que

$$\|f + g\|_p^p = \int_{\mathbb{T}} |f + g|^p d\mu \leq \left[ \|f\|_p + \|g\|_p \right] \cdot \left[ \int_{\mathbb{T}} |f + g|^p d\mu \right]^{1/q}.$$

Dividiendo por el último término se concluye que

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (2.4)$$

□

La desigualdad (2.4) se conoce como Desigualdad de Minkowski. Nótese que para construir los espacios normados que buscamos necesitamos que los funcionales anteriormente mencionados sean normas, es decir, que verifiquen que si  $\|f\|_p = 0$ , entonces  $f \equiv 0$  para  $p \in [1, \infty)$  y  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$  arbitraria.

Para ello, definamos el conjunto  $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{T}) : f(x) = 0 \text{ c.p.t. } x \in \mathbb{T}\}$ , que es un subespacio vectorial de  $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$  para  $p \in [1, \infty)$  y la siguiente relación de equivalencia en  $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ :

$$f \sim g \iff f - g \in \mathcal{N}. \quad (2.5)$$

Así, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.9.** Para  $p \in [1, \infty)$ , los espacios  $L^p(\mathbb{T}) := \mathcal{L}^p(\mathbb{T})/\mathcal{N}$  con el funcional definido para cada clase  $[f] \in L^p(\mathbb{T})$  como la expresión

$$\|[f]\|_p := \left( \int_{\mathbb{T}} |f|^p d\mu \right)^{1/p}. \quad (2.6)$$

son normados.

Se comprueba trivialmente que (2.6) está bien definida y que no depende del representante elegido.

De aquí en adelante, por un pequeño abuso del lenguaje, se trabajará con los elementos del espacio  $L^p(\mathbb{T})$  como si fuesen funciones, identificando las clase de equivalencia con uno de sus representantes.

La norma (2.6) así definida permite dar una definición rigurosa de distancia entre dos funciones:

**Definición 2.1.10.** Dadas dos funciones  $f, g \in L^p(\mathbb{T})$ , definimos la distancia- $p$  a la cantidad:

$$\|f - g\|_p := \left( \int_{\mathbb{T}} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (2.7)$$

Por último, finalizamos esta sección con el resultado principal.

**Teorema 2.1.11.** Para  $p \in [1, \infty)$ , los espacios  $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$  son de Banach.

*Demostración.* Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $L^p(\mathbb{T})$ , entonces existe una subsucesión estrictamente creciente de naturales  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tales que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$$

para todo  $k = 1, 2, \dots$ . Definimos ahora para cada  $x \in \mathbb{T}$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Veamos que está bien definida. Aplicando la desigualdad de Minkowski (2.4) se tiene que para todo  $K \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\mathbb{T}} \left( \sum_{k=1}^K |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right)^p d\mu \right]^{1/p} &\leq \sum_{k=1}^K \left( \int_{\mathbb{T}} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^K \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \end{aligned}$$

Además, por el teorema de convergencia monótona,

$$\int_{\mathbb{T}} |g|^p d\mu = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} \left( \sum_{k=1}^K |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right)^p d\mu \leq 1$$

Así,  $g^p$  y por tanto  $g$  es finita en casi todo punto de  $\mathbb{T}$ . Sea  $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{T} : g(x) = \infty\}$ . Por lo anterior,  $\mu(\mathcal{A}) = 0$  y de esta forma definimos una nueva función  $h$  tal que:

$$h(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) & \text{si } x \notin \mathcal{A} \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Por ser  $|h| \leq g$  deducimos que  $h \in L^p(\mathbb{T})$  y tenemos que para casi todo  $x \in \mathbb{T}$ :

$$h(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} f_{n_K}(x) - f_{n_1}(x).$$

Las funciones  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  convergen casi para todo punto a la función  $f := h + f_{n_1} \in L^p(\mathbb{T})$ . Veamos que dicha subsucesión también converge en norma a  $f$ . Como

$$|f - f_{n_k}| = \left| h - \sum_{k=1}^{K-1} f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right| \leq |h| + \sum_{k=1}^{K-1} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq 2g$$

y  $g^p \in L^1(\mathbb{T})$ , por el teorema de convergencia dominada

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\|_p = \lim_{K \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{T}} |f - f_{n_k}|^p d\mu \right)^{1/p} = 0.$$

Demostremos finalmente que la sucesión de partida converge. Sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Por ser  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de Cauchy existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m > n \geq N$ , entonces

$$\|f_n - f_m\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, por lo anterior sabemos que existe  $k \in \mathbb{N}$  con  $n_k \geq N$  tal que

$$\|f_{n_k} - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando  $n \geq n_k$  deducimos de lo anterior que

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p < \varepsilon.$$

□

## 2.2 Espacios de Hilbert: el espacio $L^2$

Esta sección está dedicada al espacio  $L^2(\mathbb{T})$  por ser el más significativo para secciones posteriores. Se estudiarán algunas de sus propiedades fundamentales y se verá que, además de ser un espacio de Banach, es también un espacio de Hilbert, lo cual nos proporcionará un conjunto de generadores de dicho espacio y relaciones de ortogonalidad entre ellos.

**Definición 2.2.1.** Dadas dos funciones  $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ , llamaremos producto interno al producto escalar de funciones definido como:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (2.8)$$

Este producto interno está bien definido pues:

1. Es lineal respecto al primer operando, es decir, para  $f, g$  y  $h \in L^2(\mathbb{T})$ , dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} \langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \int_{\mathbb{T}} (\alpha f(x) + \beta g(x)) \overline{h(x)} dx = \\ &= \alpha \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{h(x)} dx + \beta \int_{\mathbb{T}} g(x) \overline{h(x)} dx = \\ &= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle. \end{aligned}$$

2. Es lineal conjugado respecto al segundo operando, es decir, para  $f, g$  y  $h \in L^2(\mathbb{T})$ , dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} \langle f, \alpha g + \beta h \rangle &= \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{(\alpha g(x) + \beta h(x))} dx = \overline{\alpha} \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx + \overline{\beta} \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{h(x)} dx = \\ &= \overline{\alpha} \langle f, g \rangle + \overline{\beta} \langle f, h \rangle. \end{aligned}$$

3. Es conjugado simétrico, es decir, para  $f$  y  $g \in L^2(\mathbb{T})$  se cumple que:

$$\overline{\langle f, g \rangle} = \overline{\int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx} = \int_{\mathbb{T}} \overline{f(x)} g(x) dx = \langle g, f \rangle.$$

De forma natural, este producto interno induce la norma-2, es decir, la norma-p que habíamos definido en (2.6) para  $p = 2$ , de la siguiente forma:

**Definición 2.2.2.** Dada una función  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , llamamos norma-2 de  $f$  a la expresión dada por:

$$\|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{1/2} = \left( \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{f(x)} dx \right)^{1/2} = \left( \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.9)$$

**Proposición 2.2.3.** La norma  $\|\cdot\|_2$  verifica las siguientes propiedades:

1. **Teorema de pitágoras:** Sean  $(f_i)_{i=1}^n \subset L^2(\mathbb{T})$  tal que  $\langle f_i, f_j \rangle = 0$  para  $i \neq j$ , entonces:

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_2^2.$$

2. **Desigualdad de Cauchy-Schwartz:** Dadas  $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ , entonces:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

*Demostración.* Para demostrar el teorema de Pitágoras, basta escribir la definición de la norma y operar:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|^2 &= \langle f_1 + \dots + f_n, f_1 + \dots + f_n \rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{T}} f_i(x) \overline{f_j(x)} dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2 + \sum_{i \neq j} \int_{\mathbb{T}} f_i(x) \overline{f_j(x)} dx = \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2 + \sum_{i \neq j} \langle f_i, f_j \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2. \end{aligned}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwartz es trivial para  $\|g\| = 0$  porque por las propiedades de la norma,  $g = 0 \implies \langle f, g \rangle = 0$ . Para  $\|g\| \neq 0$ , sea  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \|f + \alpha g\|^2 &= \langle f + \alpha g, f + \alpha g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, \alpha g \rangle + \langle \alpha g, f \rangle + \langle \alpha g, \alpha g \rangle = \\ &= \|f\|^2 + \bar{\alpha} \langle f, g \rangle + \alpha \overline{\langle f, g \rangle} + |\alpha|^2 \|g\|^2 = \\ &= \|f\|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha} \langle f, g \rangle) + |\alpha|^2 \|g\|^2 \geq 0 \\ &\implies \|f\|^2 \geq -2\operatorname{Re}(\bar{\alpha} \langle f, g \rangle) - |\alpha|^2 \|g\|^2. \end{aligned}$$

Por ser  $\|g\| \neq 0$  se puede sustituir  $\alpha$  por  $-\frac{\langle f, g \rangle}{\|g\|^2}$  y se tiene que:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &\geq 2 \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|g\|^2} - \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|g\|^4} \|g\|^2 = \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|g\|^2} \\ &\implies \|f\|^2 \|g\|^2 \geq |\langle f, g \rangle|^2. \end{aligned}$$

Y tomando raíces cuadradas se tiene el resultado. □

**Corolario 2.2.4.** *El espacio  $(L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)$  es de Hilbert.*

### 2.2.1 Ortogonalidad y ortonormalidad

Esta sección resulta esencial para poder desarrollar el siguiente capítulo. El fin último de fundamentar las bases de los espacios  $L^2$  no es otro que el de emplear funciones que pertenezcan a dicho espacio para poder representar cualquier otra dada arbitrariamente. Por ese motivo, estamos interesados en funciones que tengan buenas propiedades en cuanto a continuidad, derivabilidad y periodicidad se refiere. Además, sería deseable que, dado que  $L^2$  es un espacio vectorial completo equipado con un producto escalar, dichas funciones generasen este espacio y pudiesen establecerse relaciones de ortogonalidad entre ellas. Comencemos primero introduciendo formalmente estos conceptos con resultados obtenidos principalmente de [11] y [19].

**Definición 2.2.5.** *Sea  $N \subset \mathbb{N}$ . Sea  $\Theta = \{f_n : f_n \neq 0, n \in N\}$  un subconjunto del espacio de funciones  $L^2(\Omega)$ , con  $\Omega$  un intervalo arbitrario de longitud  $P$ . Decimos que  $\Theta$  es un conjunto ortogonal si  $\langle f_n, f_m \rangle \equiv 0$  para  $n \neq m$ . Si, además, cada elemento de  $\Theta$  tiene norma 1, decimos que es un conjunto ortonormal.*

**Lema 2.2.6.** (*Desigualdad de Bessel*) Sea  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  un sistema ortonormal en  $L^2(\Omega)$ , entonces para toda  $f \in L^2(\Omega)$  se cumple que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2. \quad (2.10)$$

*Demostración.* Tomemos  $f \in L^2(\Omega)$  y  $m \in \mathbb{N}$  arbitrarios, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f - \sum_{n=1}^m \langle f, f_n \rangle f_n \right\|^2 \leq \left\langle f - \sum_{n=1}^m \langle f, f_n \rangle f_n, f - \sum_{j=1}^m \langle f, f_j \rangle f_j \right\rangle = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^m \langle f_j, f \rangle \langle f, f_j \rangle - \sum_{n=1}^m \langle f, f_n \rangle \langle f_n, f \rangle + \sum_{n=1}^m \sum_{j=1}^m \langle f, f_n \rangle \langle f_j, f \rangle \langle f_n, f_j \rangle = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^m |\langle f, f_j \rangle|^2 - \sum_{n=1}^m \langle f, f_n \rangle \langle f_n, f \rangle + \sum_{n=1}^m \langle f, f_n \rangle \langle f_n, f \rangle = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^m |\langle f, f_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

Y así obtenemos el resultado.  $\square$

**Definición 2.2.7.** Sea  $V \subset L^2(\Omega)$  un espacio vectorial. Decimos que  $\Gamma$  es una base de Schauder ortogonal de  $V$  si es un subconjunto ortogonal de  $V$  y para toda  $f \in V$ , existe una única sucesión de escalares complejos  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que:

$$f = \sum_n z_n f_n.$$

Ahora conviene poner el foco en un tipo concreto de funciones que posteriormente nos serán útiles a la hora de manejar las Series de Fourier por tener propiedades como la continuidad, periodicidad y derivabilidad.

**Teorema 2.2.8.** La colección de funciones  $\Gamma_P := \{e^{2\pi i n x/P} : P > 0\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortogonal en  $L^2(\Omega)$ .

*Demostración.* Demostremos que el conjunto es ortogonal respecto del producto escalar definido en (2.8). En efecto, sean  $f_n, f_m \in \Gamma_P$ ,  $n \neq m$ :

$$\begin{aligned} \langle f_n, f_m \rangle &= \int_{\Omega} e^{2\pi i n x/P} \overline{e^{2\pi i m x/P}} dx \\ &= \int_{\Omega} e^{2\pi i n x/P} e^{-2\pi i m x/P} dx = \left[ \frac{P}{2\pi i(n-m)} e^{2\pi i x(n-m)/P} \right]_{\Omega} = 0. \end{aligned}$$

$\square$

**Corolario 2.2.9.** El conjunto  $\Delta_P := \left\{ \frac{1}{\sqrt{P}} e^{2\pi i n x/P} : P > 0 \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal en  $L^2(\Omega)$ .

*Demostración.* Basta comprobar que la norma de  $f := \frac{1}{\sqrt{P}}e^{2\pi ix/P}$  es 1. En efecto:

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{P} \int_{\Omega} e^{2\pi ix/P} \overline{e^{2\pi ix/P}} dx = \frac{1}{P} \int_{\Omega} e^{2\pi ix/P} e^{-2\pi ix/P} dx = \int_{\Omega} dx = 1.$$

□

Por la identidad de Euler, la exponencial compleja puede expresarse en términos de funciones seno y coseno, por lo que conviene enunciar el siguiente teorema, análogo al anterior.

**Teorema 2.2.10.** *El conjunto  $\Sigma_P := \{1, \cos(2\pi nx/P), \sin(2\pi nx/P) : P > 0\}_{n \in \mathbb{N}}$  es ortogonal  $L^2(\Omega)$ .*

*Demostración.* Comprobemos que para  $f_n, f_m \in \{1, \cos(2\pi nx/P), \sin(2\pi nx/P)\}$ ,  $\langle f_n, f_m \rangle$  se anula para  $n \neq m$  en  $\Omega$ :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \cos(2\pi nx/P) dx = \left[ \frac{P}{2\pi n} \sin(2\pi nx/P) \right]_{\Omega} = 0 \\ \int_{\Omega} \sin(2\pi nx/P) dx = - \left[ \frac{P}{2\pi n} \cos(2\pi nx/P) \right]_{\Omega} = 0 \\ \int_{\Omega} \sin(2\pi nx/P) \cos(2\pi nx/P) dx = \left[ \frac{P}{4\pi n} \sin^2(2\pi nx/P) \right]_{\Omega} = 0 \end{cases}$$

□

**Corolario 2.2.11.** *El conjunto  $\Phi_P := \left\{ \sqrt{\frac{1}{P}}, \sqrt{\frac{2}{P}} \cos(2\pi nx/P), \sqrt{\frac{2}{P}} \sin(2\pi nx/P) : P > 0 \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es ortonormal  $L^2(\Omega)$ .*

*Demostración.* De nuevo, igual que en el anterior corolario, basta ver que la norma de cada elemento es 1:

$$\begin{aligned} \left\| \sqrt{\frac{1}{P}} \right\|^2 &= \left\langle \sqrt{\frac{1}{P}}, \sqrt{\frac{1}{P}} \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{1}{P} dx = 1 \\ \left\| \sqrt{\frac{2}{P}} \cos(2\pi nx/P) \right\|^2 &= \left\langle \sqrt{\frac{2}{P}} \cos(2\pi nx/P), \sqrt{\frac{2}{P}} \cos(2\pi nx/P) \right\rangle = \\ &= \frac{2}{P} \int_{\Omega} \cos^2(2\pi nx/P) dx = \frac{2}{P} \left[ \frac{P \sin(4\pi nx/P)}{8\pi n} + \frac{x}{2} \right]_{\Omega} = \frac{2}{P} \frac{P}{2} = 1 \\ \left\| \sqrt{\frac{2}{P}} \sin(2\pi nx/P) \right\|^2 &= \left\langle \sqrt{\frac{2}{P}} \sin(2\pi nx/P), \sqrt{\frac{2}{P}} \sin(2\pi nx/P) \right\rangle = \\ &= \frac{2}{P} \int_{\Omega} \sin^2(2\pi nx/P) dx = \frac{2}{P} \left[ -\frac{P \sin(4\pi nx/P)}{8\pi n} + \frac{x}{2} \right]_{\Omega} = \frac{2}{P} \frac{P}{2} = 1 \end{aligned}$$

□

Esta sección culmina con varios de los teoremas más importantes de esta memoria, que nos darán las bases de funciones necesarias para desarrollar el resto del trabajo.

**Teorema 2.2.12.** Sea  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  un conjunto ortonormal de  $L^2(\Omega)$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  es una base ortonormal de  $L^2(\Omega)$ .
2. Para todas  $f, g \in L^2(\Omega)$  se verifica

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle \overline{\langle g, f_n \rangle}. \quad (2.11)$$

3. Para toda  $f \in L^2(\Omega)$  se cumple que:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \quad (\text{Identidad de Parseval}). \quad (2.12)$$

4. El subespacio  $\text{span}\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$  es denso en  $L^2(\Omega)$ .
5. Sea  $f \in L^2(\Omega)$ . Si  $\langle f, f_n \rangle = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f \equiv 0$ .

*Demostración.*  $\boxed{1 \Rightarrow 2}$  Por ser  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  una base ortonormal, existen  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i$  y  $g = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j f_j$ . Veamos qué valor tienen los coeficientes  $\lambda_i$  y  $\mu_j$ :

$$\langle f, f_n \rangle = \left\langle \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i, f_n \right\rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i, f_n \right\rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_n$$

Por lo tanto tenemos que  $f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle f_i$  y  $g = \sum_{j=1}^{\infty} \langle g, f_j \rangle f_j$ . Así se tiene lo siguiente:

$$\langle f, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i=1}^n \langle f, f_i \rangle f_i, \sum_{j=1}^n \langle g, f_j \rangle f_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle \overline{\langle g, f_i \rangle}.$$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$  Se deduce de la anterior proposición tomando  $g \equiv f$ .

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$  Sea  $f \in L^2(\Omega)$ , entonces por la Identidad de Parseval se tiene:

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^m \langle f, f_n \rangle f_n \right\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left\langle f - \sum_{n=1}^m \langle f, f_n \rangle f_n, f_j \right\rangle \right|^2 = \\ &= \sum_{j=1}^m \left| \left\langle f - \sum_{n=1}^m \langle f, f_n \rangle f_n, f_j \right\rangle \right|^2 + \sum_{j=1}^{m+1} \left| \left\langle f - \sum_{n=1}^m \langle f, f_n \rangle f_n, f_j \right\rangle \right|^2 = \\ &= \sum_{j=1}^{m+1} |\langle f, f_j \rangle|^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

por ser las colas de una serie convergente.

$\boxed{4 \Rightarrow 5}$  Sea  $f \in L^2(\Omega)$  tal que  $\langle f, f_n \rangle = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f \perp \text{span}\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$  por lo que existe una sucesión  $(g_n) \subset \text{span}\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$  tal que  $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ . Así,

$$\langle f, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g_n, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \implies f \equiv 0.$$

$\boxed{5 \Rightarrow 1}$  Tomemos  $f \in L^2(\Omega)$  y pongamos  $g := \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n$ . Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \langle f - g, f_n \rangle &= \left\langle f - \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \langle f, f_j \rangle f_j, f_n \right\rangle = \langle f, f_n \rangle - \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \langle f, f_j \rangle \langle f_j, f_n \rangle = \\ &= \langle f, f_n \rangle - \langle f, f_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Así, por el apartado 2, se tiene que  $f = g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n$ . □

**Teorema 2.2.13. (Stone-Weierstrass)** Sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario y  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ . Entonces existe un polinomio trigonométrico  $T(x)$  tal que  $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ , es decir, los polinomios trigonométricos son densos en  $\mathcal{C}(\Omega)$ .

*Demostración.* Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\mathbb{T} = [-P, P]$ . Fijamos  $\varepsilon > 0$  arbitrario y sea  $x \in \mathbb{T}$ , veamos que  $T(x)$  definido de la forma

$$T(x) = c_n \int_{\mathbb{T}} \cos^{2n}(u/2) f(x+u) du$$

es un polinomio trigonométrico de grado al menos  $n$  que satisface  $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$  para un  $n$  suficientemente grande. Tomemos  $c_n$  que cumpla:

$$c_n \int_{\mathbb{T}} \cos^{2n}(u/2) du = 1 \tag{2.13}$$

Donde, evaluando la integral, se tiene que:

$$c_n = \frac{2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{2\pi \cdot (2n-1) \cdots 5 \cdot 3} < n$$

De (2.13) se deduce que  $c_n \int_{\mathbb{T}} \cos^{2n}(u/2) f(x) du = f(x)$ . Por tanto para algún  $0 < \delta < P$  se tiene que:

$$\begin{aligned} |T(x) - f(x)| &= \left| c_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(u/2) [f(x+u) - f(u)] du \right| \leq \\ &\leq c_n \int_{-\delta}^{\delta} \cos^{2n}(u/2) |f(x+u) - f(u)| du + \\ &+ c_n \int_{-\pi}^{-\delta} \cos^{2n}(u/2) |f(x+u) - f(u)| du + \\ &+ c_n \int_{\delta}^{\pi} \cos^{2n}(u/2) |f(x+u) - f(u)| du = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Donde estimaremos cada  $I_i$  por separado.

En primer lugar, por ser  $f$  continua en  $\mathbb{T}$ , fijado  $\delta > 0$ , se tiene para todo  $x \in \mathbb{T}$ :

$$|f(x+u) - f(x)| < \varepsilon/2$$

Por lo tanto,

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} c_n \int_J \cos^{2n}(u/2) du < \varepsilon/2.$$

Por otro lado, la continuidad de  $f$  garantiza que existe una constante  $M > 0$  tal que  $|f| < M$  en  $\mathbb{T}$ . Así,

$$I_2 \leq 2Mc_n \left( \int_{-P}^{-\delta} \cos^{2n}(u/2) du + \int_{\delta}^P \cos^{2n}(u/2) du \right) < 4Mn \int_{\delta}^P \cos^{2n}(u/2) du$$

por ser  $c_n < n$ . Ahora, para  $\delta < |u| < P$  se tiene que

$$\cos^{2n}(u/2) \leq \cos^{2n}(\delta/2) = \eta^{2n}$$

para algún  $0 < \eta < 1$ . Así, como  $n\eta^{2n} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , para un  $n$  suficientemente grande se tiene que  $I_2 \leq 4M\pi n\eta^{2n} < \varepsilon/2$ .

Finalmente se tiene que para todo  $x \in \mathbb{T}$ :

$$|T(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Por último solo queda probar que  $T(x)$  es de hecho un polinomio trigonométrico. Empleando el cambio de variable  $t = x + u$  se tiene que:

$$T(x) = \int_{\mathbb{T}+x} \cos^{2n}((t-x)/2) f(t) dt = \int_{\mathbb{T}} \cos^{2n}((t-x)/2) f(t) dt$$

donde, aplicando las identidades trigonométricas del lema A.0.5, se obtiene el polinomio trigonométrico. □

**Teorema 2.2.14.** *Sea  $\mathcal{S}$  el conjunto de las funciones simples  $s$  definidas en  $\Omega$  tales que  $\mu\{x \in \Omega : s(x) \neq 0\} < \infty$ . Sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario y  $f \in L^2(\Omega)$ . Entonces  $\mathcal{S}$  es denso en  $L^2(\Omega)$ .*

*Demostración.* Sea  $f \in L^2(\Omega)$ . Es claro que  $\mathcal{S} \subset L^2(\Omega)$  y que toda función simple que pertenezca a  $L^2(\Omega)$  también pertenece a  $\mathcal{S}$ . Por otro lado, por A.0.6 existe  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones simples que convergen a  $f$  puntualmente y tales que  $|s_1| \leq |s_2| \leq \dots \leq |f|$ . Esto implica que  $s_n \in L^2(\Omega)$  y por tanto  $s_n \in \mathcal{S}$ . Como  $|s_n - f|^p \leq (2|f|)^p$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , por el teorema de convergencia dominada  $\|s_n - f\|_p \rightarrow 0$ . □

**Teorema 2.2.15.**  $\mathcal{C}(\Omega)$  es denso en  $L^2(\Omega)$ .

*Demostración.* Tomemos el conjunto  $\mathcal{S}$  como en el teorema anterior. Sea  $f \in L^2(\Omega)$ , entonces dado  $\varepsilon > 0$  arbitrario existe  $s \in \mathcal{S}$  tal que  $\|f - s\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Aplicando el teorema de Lusin A.0.7 tenemos que existe  $g \in \mathcal{C}(\Omega)$  tal que

$$\mu\{x \in \Omega : g(x) \neq s(x)\} \leq \left(\frac{\varepsilon}{4\|s\|_\infty}\right)^2$$

y  $|g| \leq \|s\|_\infty$ . Por tanto,

$$\|s - g\|_2^2 = \int_\Omega |s - g|^2 \leq (2\|s\|_\infty)^2 \mu\{x \in \Omega : g(x) \neq s(x)\} \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2.$$

Finalmente se concluye que

$$\|f - g\|_2 \leq \|f - s\|_2 + \|s - g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

**Teorema 2.2.16.** *El conjunto de los polinomios trigonométricos es denso en  $L^2(\Omega)$ .*

*Demostración.* Por el Teorema de Stone-Weierstrass 2.2.13, resulta que los polinomios trigonométricos son densos en  $\mathcal{C}(\Omega)$ . Dicha convergencia implica la convergencia en el espacio  $L^2(\Omega)$ . En efecto, sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario, entonces existe  $T(x)$  polinomio trigonométrico tal que  $|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{P}}$ . Por lo tanto integrando tenemos que

$$\int_\Omega |f(x) - T(x)|^2 < \varepsilon^2.$$

Finalmente, teniendo en cuenta el teorema 2.2.15, concluimos que los polinomios trigonométricos son densos en  $L^2(\Omega)$ .

□

**Corolario 2.2.17.** *Los conjuntos  $\Delta_P$  y  $\Phi_P$  son dos bases del espacio  $L^2(\Omega)$ .*

*Demostración.* Se deduce trivialmente de los teoremas 2.2.16 y 2.2.12.

□

# Capítulo 3

## Series de Fourier

Después de construir y describir el espacio  $L^2$ , en el que se trabajará de aquí en adelante, estamos en condiciones idóneas de sumergirnos en la teoría que fundamenta y caracteriza el tema central de esta memoria. Las Series de Fourier son esencialmente una suma infinita de funciones (inicialmente periódicas) obtenidas a partir de una función inicial dada. El objetivo principal de este capítulo es, pues, explicitar el desarrollo de dichas series y obtener sus coeficientes, así como estudiar bajo qué condiciones una función  $2\pi$ -periódica dada admite una representación de esta forma. Así, se extenderá la teoría desarrollada para funciones no necesariamente periódicas, introduciendo la noción de extensión y generalizando los resultados para funciones de periodo arbitrario. Este capítulo finaliza con la introducción de algunas variantes de las Series de Fourier usuales incluyendo una pequeña sección centrada en los rudimentos del análisis de Fourier no trigonométrico.

### 3.1 Coeficientes de las series de Fourier

En esta primera sección, que se basa en [15] y [23], se pretende obtener una expresión explícita de cada coeficiente que constituye la serie de Fourier de una función  $f$  que, en principio, suponemos que admite una representación de este tipo y que está definida en todo  $\mathbb{T}$  (posteriormente incluiremos hipótesis sobre periodicidad, continuidad y regularidad). Las funciones que forman las Series de Fourier han de ser periódicas, tal y como se ha indicado anteriormente, y es deseable que tengan además buenas propiedades respecto a la continuidad y derivación. Por este motivo, emplearemos las familias de funciones descritas en la sección anterior para construir estas series.

#### 3.1.1 Forma compleja

Supongamos que  $f$  definida en  $\mathbb{T}$  puede escribirse de manera formal como una combinación lineal infinita de elementos del conjunto  $\Gamma_{\mathcal{P}}$ :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \quad (3.1)$$

Halleemos el coeficiente  $c_n(f)$ . Sea  $k \in \mathbb{N}$  fijado. Multiplicamos la expresión (3.1) por  $e^{-ikx}$  e integramos en  $\mathbb{T}$ :

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{\mathbb{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} e^{-ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\mathbb{T}} e^{inx} e^{-ikx} dx. \quad (3.2)$$

De donde se deduce, empleando las relaciones de ortogonalidad de la sección anterior (tomando  $P = 2\pi$ ), que:

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} dx = c_k \cdot 2\pi \Rightarrow c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} dx \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

**Definición 3.1.1.** Sea  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ . Se define de manera formal la serie de Fourier en forma compleja asociada a  $f$  como:

$$\mathcal{S}(f)(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \quad (3.4)$$

Donde  $c_n$  es de la forma (3.3). En general, escribiremos  $\mathcal{S}_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$  para referirnos a la suma parcial de la Serie de Fourier de  $f$ .

### 3.1.2 Forma trigonométrica

La sección de ortogonalidad y ortonormalidad también nos proporciona una familia de funciones trigonométricas que cumplen con los requisitos que buscamos para las funciones empleadas en las Series de Fourier. Supongamos, pues, que  $f$  puede escribirse de manera como combinación lineal de senos y cosenos de la forma:

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \quad \forall x \in \mathbb{T}. \quad (3.5)$$

Entonces integrando (3.5) en  $\mathbb{T}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} f(x) dx &= \int_{\mathbb{T}} A dx + \int_{\mathbb{T}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) dx = \\ &= A \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{T}} \cos(nx) dx + b_n \int_{\mathbb{T}} \operatorname{sen}(nx) dx = \\ &= A \cdot 2\pi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Tomando  $A := \frac{a_0}{2}$ , se tiene que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x). \quad (3.7)$$

Ahora se obtendrá la expresión para  $a_n$ . Multiplicando (3.5) por  $\cos(kx)$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , y de nuevo integrando en  $\mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} f(x) \cos(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{\mathbb{T}} \cos(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{T}} \cos(nx) \cos(kx) dx + \\ &+ b_n \int_{\mathbb{T}} \sin(nx) \cos(kx) dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Que, de nuevo, empleando los resultados de la sección de ortogonalidad (con  $P = 2\pi$ ), se tiene que:

$$(3.8) = a_k \cdot \pi \Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \cos(kx) dx \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Análogamente, multiplicando de nuevo (3.5) esta vez por  $\sin(kx)$  e integrando en  $\mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} f(x) \sin(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{\mathbb{T}} \sin(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{T}} \cos(nx) \sin(kx) dx + \\ &+ b_n \int_{\mathbb{T}} \sin(nx) \sin(kx) dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Y finalmente se tiene que:

$$(3.10) = b_k \cdot \pi \Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \sin(kx) dx \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

Con todo esto ya podemos enunciar la definición de serie de Fourier.

**Definición 3.1.2.** Sea  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ . Se define de manera formal la serie de Fourier en forma trigonométrica asociada a  $f$  como:

$$S(f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx). \quad (3.12)$$

Donde  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son de la forma (3.7), (3.9) y (3.11), respectivamente. En general escribiremos  $S_N(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$  para referirnos a la suma parcial de la Serie de Fourier de  $f$ .

**Lema 3.1.3.**  $\mathcal{S}(f)(x) \equiv S(f)(x)$  para cada  $x \in \mathbb{T}$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{S}(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ . Podemos descomponer esta suma de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + c_{-n}) \cos(nx) + (c_n - c_{-n}) i \sin(nx). \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ . Por otro lado,

$$c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)(e^{-inx} + e^{inx}) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} 2f(x)\cos(nx) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)\cos(nx) = a_n.$$

Análogamente,

$$(c_n - c_{-n})i = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)(e^{-inx} - e^{inx}) dx = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} -2if(x)\sen(nx) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)\sen(nx) = b_n.$$

Además, es claro que para cada  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{S}_N(f) \equiv S_N(f)$ .  $\square$

Finalizamos el desarrollo teórico de esta sección con dos resultados de gran importancia:

**Teorema 3.1.4.** *Sea  $f$  una función  $2\pi$  periódica definida en  $\mathbb{T}$ . Si  $f \in L^2(\mathbb{T})$  entonces  $S_N(f)$  converge a  $f$  en norma, es decir, para todo  $x \in \mathbb{T}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - S_N(f)(x)\|_2 = 0. \quad (3.13)$$

*Demostración.* Para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx} = \\ &= \sum_{n=-N}^N \left( \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-int} dt \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \end{aligned}$$

Como el conjunto  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una base de Hilbert del espacio  $L^2(\mathbb{T})$  concluimos que  $S_N(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  en norma.  $\square$

## Ejemplo práctico

Sea  $f(x) = x^2 \in L^1(-\pi, \pi)$ . Calculemos su serie de Fourier compleja:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sen(nx) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot (-1)^n \frac{4\pi}{n^2} = (-1)^n \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$

De esta forma, la serie de Fourier de  $f$  en forma compleja en  $(-\pi, \pi)$  es:

$$\mathcal{S}(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2} e^{inx}.$$

Veamos ahora la forma trigonométrica:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) dx = \frac{2\pi^2}{3} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad b_n = 0.$$

Por lo tanto se tiene que la serie de Fourier de  $f$  en forma trigonométrica en  $(-\pi, \pi)$  es:

$$S(f)(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx).$$

En la siguiente figura se han representado las primeras 4 sumas parciales de la Serie de Fourier anterior, calculadas de forma numérica con el programa *Matlab* (se puede consultar el código en B.1).

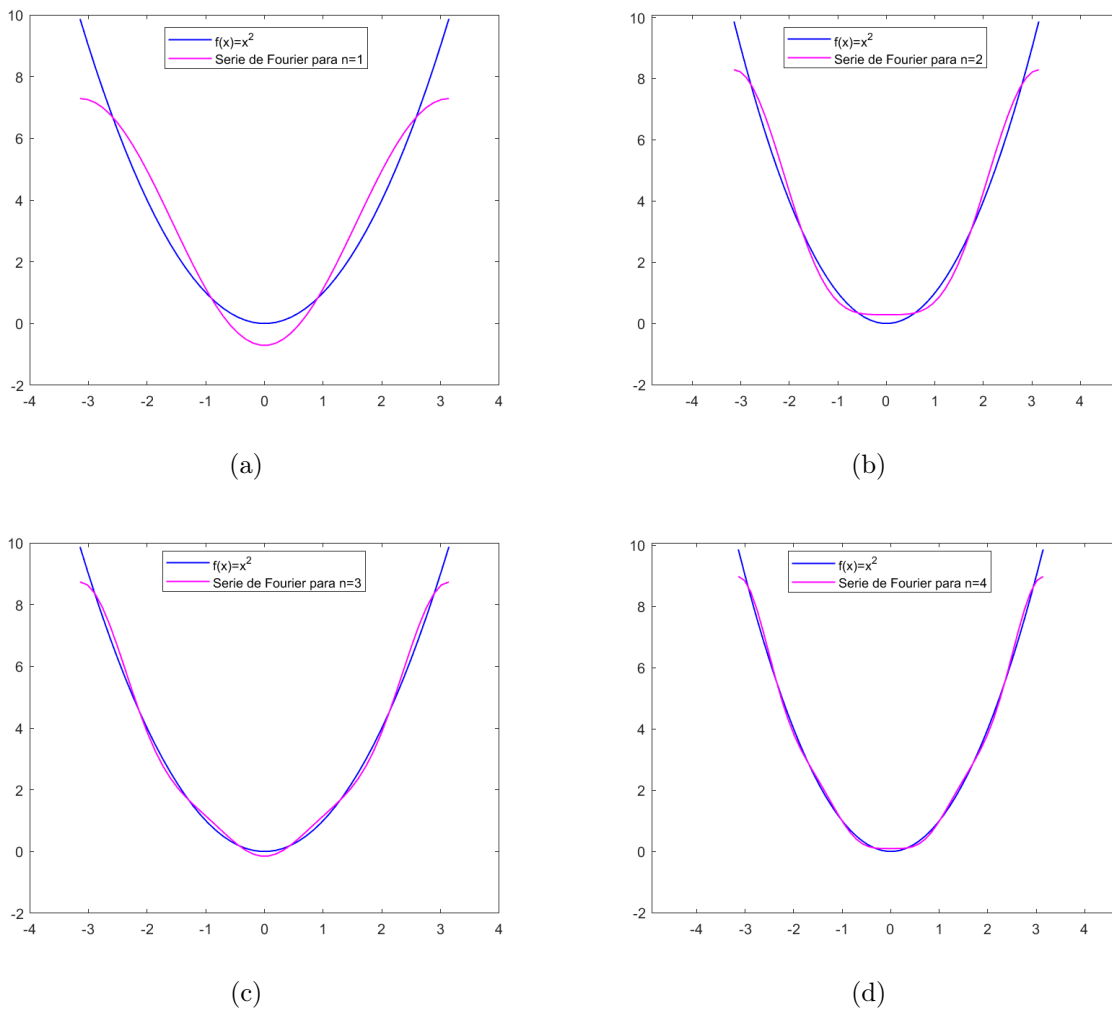


Figura 3.1: Distintas aproximaciones para  $f(x) = x^2$  por Series de Fourier para  $N = 1, 2, 3, 4$  respectivamente.

## 3.2 Convergencia de las Series de Fourier

Esta sección recoge los resultados fundamentales que describen los diferentes tipos de convergencia de las Series de Fourier a las funciones de partida. Los resultados que veremos

serán cruciales porque permitirán describir las condiciones en las que podemos identificar una función con su Serie de Fourier, que es el objetivo último del Análisis de Fourier. La definición de convolución se ha extraído de [13], mientras que lo relativo al Núcleo de Dirichlet y Condición de Dini se ha consultado en [15]. El resto de resultados provienen de numerosas fuentes, entre ellas [12] y [25].

Antes de comenzar con el enunciado de los distintos teoremas y proposiciones es conveniente que operemos la expresión de las sumas parciales de las Series de Fourier, pues serán de gran utilidad para sus demostraciones.

### 3.2.1 Convolución y Núcleo de Dirichlet

En primer lugar definiremos qué es el producto de convolución de funciones, que posteriormente nos será de utilidad para manejar las sumas parciales de las Series de Fourier.

**Definición 3.2.1.** Sean  $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  dos funciones  $L^1(\mathbb{T})$  y  $2\pi$  periódicas, se define el producto de convolución para todo  $x \in \mathbb{R}$  como la operación:

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{T}} f(t)g(x-t) dt. \quad (3.14)$$

Veamos algunas propiedades de interés sobre la convolución.

**Proposición 3.2.2.** Sean  $f, g, h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones en  $L^1(\mathbb{T})$  y  $2\pi$  periódicas. Entonces se verifica:

1. Existe  $f * g(x)$  c.p.t  $x \in \mathbb{R}$  y es  $2\pi$  periódica. Además,  $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ .
2. La convolución es conmutativa:  $f * g(x) = g * f(x)$ .
3. La convolución es asociativa:  $(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x)$ .
4. La convolución es distributiva y lineal por el producto por escalares:  $(\alpha f + \beta g) * h(x) = \alpha(f * h(x)) + \beta(g * h(x))$  para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

*Demostración.* La demostración del primer apartado se deduce de la propia definición de convolución, empleando el Teorema de Fubini, aplicando el cambio de variable  $u := x - t$  y teniendo en cuenta que ambas funciones  $f, g$  pertenecen a  $L^1(\mathbb{T})$ . Veamos en primer lugar que la convolución está bien definida y existe. Para ello veamos que  $F(t, x) := f(t)g(x-t)$  es integrable:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |F| &= \int_{\mathbb{T}} \left( \int_{\mathbb{T}} |F(t, x)| dx \right) dt = \int_{\mathbb{T}} |f(t)| \left( \int_{\mathbb{T}} |g(x-t)| dx \right) dt = \\ &= \left( \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt \right) \left( \int_{\mathbb{T}} |g(u)| du \right). \end{aligned}$$

donde el producto existe por ser  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ . Para comprobar que la convolución está en  $L^1(\mathbb{T})$  basta ver que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |f * g(x)| dx &= \int_{\mathbb{T}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t)g(x-t) dt \right| dx \leq \int_{\mathbb{T}} \left( \int_{\mathbb{T}} |f(t)| |g(x-t)| dt \right) dx = \\ &= \int_{\mathbb{T}} |f(t)| \left( \int_{\mathbb{T}} |g(x-t)| dx \right) dt = \left( \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt \right) \left( \int_{\mathbb{T}} |g(u)| du \right) < \infty. \end{aligned}$$

de nuevo, por ser  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ . La periodicidad se deduce trivialmente dado que  $f, g$  son  $2\pi$  periódicas.

La conmutatividad y asociatividad se deduce de la siguiente forma realizando el mismo cambio de variable que anteriormente. En efecto:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{T}} f(t)g(x-t) dt = \int_{\mathbb{T}} g(u)f(x-u) du = g * f(x).$$

$$\begin{aligned} (f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{T}} \left( \int_{\mathbb{T}} f(s)g(t-s) ds \right) h(x-t) dt = \int_{\mathbb{T}} \left( \int_{\mathbb{T}} f(s)g(t-s)h(x-t) ds \right) dt = \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(s) \left( \int_{\mathbb{T}} g(t-s)h(x-t) dt \right) ds = \int_{\mathbb{T}} f(s) \left( \int_{\mathbb{T}} g(u)h(x-s-u) du \right) ds = \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(s) (g * h(x-s)) ds = f * (g * h)(x). \end{aligned}$$

Por último, demostremos que la convolución es distributiva y lineal respecto al producto por escalares:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g) * h(x) &= \int_{\mathbb{T}} (\alpha f + \beta g)(t)h(x-t) dt = \alpha \int_{\mathbb{T}} f(t)h(x-t) dt + \beta \int_{\mathbb{T}} g(t)h(x-t) dt = \\ &= \alpha (f * h(x)) + \beta (g * h(x)). \end{aligned}$$

□

Después de describir las propiedades de la convolución de funciones, para definir el núcleo de Dirichlet tomaremos como punto de partida una función  $f \in L^1(\mathbb{T})$  que sea  $2\pi$  periódica. Entonces sus coeficientes de Fourier existen y podemos sustituirlos en la expresión de  $S_N(f)$ . En efecto:

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nt) \cos(nx) + \sin(nt) \sin(nx) \right] f(t) dt = \quad (3.15) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(k(t-x)) \right] f(t) dt. \end{aligned}$$

Por otro lado, por la fórmula trigonométrica para el seno:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N 2\sin(\theta/2) \cos(n\theta) &= \sum_{n=1}^N \sin(n\theta + \theta/2) - \sin(n\theta - \theta/2). \\ 2\sin(\theta/2) \sum_{n=1}^N \cos(n\theta) &= \sin(N\theta + \theta/2) - \sin(\theta/2) \end{aligned}$$

por ser una suma telescópica. Reordenando se obtiene:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n\theta) = \frac{\text{sen}((N+1/2)\theta)}{2\text{sen}(\theta/2)}$$

De esta forma la expresión (3.15) se lee:

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\text{sen}((N+1/2)(t-x))}{2\text{sen}((t-x)/2)} f(t) dt = \quad (3.16)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\text{sen}((N+1/2)u)}{2\text{sen}(u/2)} f(u+x) du \quad (3.17)$$

donde se ha hecho el cambio de variable  $u = t - x$ .

**Definición 3.2.3. (Núcleo de Dirichlet)** La expresión

$$D_N(x) = \frac{\text{sen}((N+1/2)x)}{2\text{sen}(x/2)} \quad (3.18)$$

recibe el nombre de núcleo de Dirichlet

**Proposición 3.2.4.** Dada  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  una función  $L^1(\mathbb{T})$  y  $2\pi$  periódica, se tiene que:

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{\pi} (f * D_N(x)). \quad (3.19)$$

*Demostración.* La demostración se deduce de la igualdad (3.16).  $\square$

**Observación 3.2.5.** Nótese que

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\text{sen}((N+1/2)u)}{2\text{sen}(u/2)} du = 1. \quad (3.20)$$

Este desarrollo nos lleva a concluir que para demostrar que las sumas parciales de la Serie de Fourier de  $f$  converja a ella puntualmente basta con ver que la expresión:

$$S_N(f)(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(x_0+u) - f(x_0)}{2\text{sen}(u/2)} [\text{sen}((N+1/2)u)] du \quad (3.21)$$

tenga límite 0 cuando  $N \rightarrow \infty$  para cada  $x_0 \in \mathbb{T}$  fijo.

Por último, veremos dos resultados interesantes sobre la acotación del núcleo de Dirichlet que nos será útil en secciones posteriores.

**Proposición 3.2.6.** Sea  $[a, b] \subset \mathbb{T}$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que para todo  $N \in \mathbb{N}$  se cumple que:

$$\left| \int_a^b D_N(x) dx \right| \leq C.$$

*Demostración.* Por la definición de  $D_N(x)$  se tiene que:

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b D_N(x) dx &= \int_a^b \frac{\text{sen}((N+1/2)x)}{\text{sen}(x/2)} dx = \\ &= \int_a^b \text{sen}((N+1/2)x) \left( \frac{1}{\text{sen}(x/2)} - \frac{1}{x/2} \right) dx + \int_a^b \frac{\text{sen}((N+1/2)x)}{x/2} dx \end{aligned}$$

Computando la primera integral se obtiene:

$$\left| \int_a^b \frac{\text{sen}((N+1/2)x)}{x/2} dx \right| = |2 [Si(b(N+1/2))] - Si(a(N+1/2))|$$

donde  $Si(x)$  es la función definida en A.0.10. Por las propiedades de dicha función, se tiene que la integral anterior está acotada por una constante  $K_1$ . Empleando el desarrollo en series de Taylor del seno y el cambio de variable  $u := x/2$ , veamos que la primera integral también está acotada:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \text{sen}((N+1/2)x) \left( \frac{1}{\text{sen}(x/2)} - \frac{1}{x/2} \right) dx \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{1}{\text{sen}(x/2)} - \frac{1}{x/2} \right| dx = \\ &= \int_{a/2}^{b/2} \left| \frac{1}{\text{sen}(u)} - \frac{1}{u} \right| dx = \int_{a/2}^{b/2} \left| \frac{u - \text{sen } u}{u \text{sen } u} \right| dx = \\ &= \int_{a/2}^{b/2} \left| \frac{u - (u - u^3/3! + O(u^5))}{u \text{sen } u} \right| dx = \\ &= \int_{a/2}^{b/2} \left| \frac{u}{\text{sen } u} \right| |u/3! + O(u^3)| dx \leq \int_{a/2}^{b/2} K_2 dx = C \end{aligned}$$

para cierta contante  $K_2$ . □

**Proposición 3.2.7.** *Para todo  $N \in \mathbb{N}$  se verifica que*

$$\int_{\mathbb{T}} |D_N(x)| dx \geq \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}.$$

*Demostración.* Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\mathbb{T} = (-\pi, \pi)$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\text{sen}((N+1/2)x)}{2\text{sen}(x/2)} \right| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\text{sen}((N+1/2)x)}{2\text{sen}(x/2)} \right| dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\text{sen}((2N+1)x)}{2\text{sen}(x)} \right| dx \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\text{sen}((2N+1)x)}{x} \right| dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2N+1}{2}} \left| \frac{\text{sen}(\pi u)}{u} \right| du > \frac{1}{\pi} \int_0^N \left| \frac{\text{sen}(\pi u)}{u} \right| du = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} \left| \frac{\text{sen}(\pi u)}{u} \right| du = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \frac{\text{sen}(\pi u)}{u+k} du \geq \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \frac{\text{sen}(\pi u)}{1+k} du = \frac{1}{\pi} \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right) \int_0^1 \text{sen}(\pi u) du = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

□

### 3.2.2 Criterio de Dini

Introducimos ahora la condición de Dini, que, como se verá ahora, es un concepto que hace referencia a un punto y su entorno, sin importar el resto de la función. El comportamiento que describe la condición de Dini recibe el nombre de Principio de localización de Riemann.

**Definición 3.2.8. (Condición de Dini)** Sea  $\mathbb{T}$  un intervalo centrado en  $x_0$ . Decimos que una función  $f$  satisface la condición de Dini en un punto  $y_0 \in \mathbb{T}$  si

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left| \frac{f(y_0 + u) - f(y_0)}{u} \right| du < \infty \quad (3.22)$$

para algún  $\varepsilon > 0$

El siguiente lema resultará fundamental para probar los siguientes resultados sobre convergencia puntual.

**Lema 3.2.9. (Riemann-Lebesgue)** Sea  $g \in L^1[a, b]$  una función continua excepto en una cantidad finita de puntos, entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_a^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx = 0 = \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_a^b g(x) \operatorname{cos}(\lambda x) dx$$

*Demostración.* Demostremos que, en general,  $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_a^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx = 0$ .

- Supongamos en primer lugar que  $g \in \mathcal{C}([a, b])$

Sea  $I = \int_a^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx$ . Efectuamos el cambio de variable  $x = t + \pi/\lambda$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} g(t + \pi/\lambda) \operatorname{sen}(\lambda t + c + \pi) dt = - \int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} g(t + \pi/\lambda) \operatorname{sen}(\lambda t + c) dt \\ \Rightarrow 2I &= I + I = \int_a^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx - \int_{a-\pi/\lambda}^{b-\pi/\lambda} g(x + \pi/\lambda) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx = \\ &= \int_{b-\pi/\lambda}^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx - \int_{a-\pi/\lambda}^a g(x + \pi/\lambda) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx + \\ &\quad + \int_a^{b-\pi/\lambda} [g(x) - g(x + \pi/\lambda)] \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Donde se tiene que, por ser  $g \in \mathcal{C}([a, b])$ ,  $\exists M > 0$  tal que  $|g(x)| < M \forall x \in [a, b]$ :

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{M\pi}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \\ |I_2| &\leq \frac{M\pi}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Para acotar  $I_3$  empleamos que por ser  $g$  continua en un compacto, entonces  $\forall \varepsilon > 0$   $\exists \delta > 0$  tal que si  $|x - y| < \delta$ , entonces  $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$  para todos  $x, y$  del compacto ( $g$  es uniformemente continua en  $[a, b]$ ). Tomemos  $\lambda$  suficientemente grande tal que  $\pi/\lambda < \delta$ , entonces  $|g(x) - g(x + \pi/\lambda)| < \varepsilon$  para  $x \in [a, b - \pi/\lambda]$ . Esto implica que:

$$I_3 \leq \varepsilon |b - a| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

- Supongamos ahora que  $\exists a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$  tal que  $g \in \mathcal{C}(c_i, c_{i+1})$  y  $g \in L^1(c_i, c_{i+1}) \forall i = 0, 1, \dots, n - 1$ , entonces:

$$\int_a^b g(x) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} g(x) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx$$

Probemos que  $\forall i = 0, 1, \dots, n - 1$ ,  $\int_{c_i}^{c_{i+1}} g(x) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$

Como  $g \in L^1(c_i, c_{i+1})$ , supongamos que  $g \xrightarrow{x \rightarrow c_i^+} +\infty$ , entonces aplicando integrales impropias:

$$\begin{aligned} \int_{c_i}^{c_{i+1}} |g(x)| dx &= \int_{c_i}^{d_i} |g(x)| dx + \int_{d_i}^{c_{i+1}} |g(x)| dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_i + \varepsilon}^{d_i} |g(x)| dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{d_i}^{c_{i+1} - \varepsilon} |g(x)| dx \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado  $\eta > 0$  se tiene que

$$\int_{c_i}^{c_i + \varepsilon} |g(x)| dx < \eta \quad \text{y} \quad \int_{c_{i+1} - \varepsilon}^{c_{i+1}} |g(x)| dx < \eta$$

De esta forma se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \left| \int_{c_i}^{c_{i+1}} g(x) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx \right| &\leq \left| \int_{c_i}^{c_i + \varepsilon} g(x) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx \right| + \left| \int_{c_i + \varepsilon}^{c_{i+1} - \varepsilon} g(x) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx \right| + \\ &+ \left| \int_{c_{i+1} - \varepsilon}^{c_{i+1}} g(x) \operatorname{sen}(\lambda x + c) dx \right| = J_1 + J_2 + J_3 \end{aligned}$$

Donde de nuevo realizamos las siguientes acotaciones:

$$J_1 \leq \int_{c_i}^{c_i + \varepsilon} |g(x)| dx < \eta \quad \text{y} \quad J_3 \leq \int_{c_{i+1} - \varepsilon}^{c_{i+1}} |g(x)| dx < \eta$$

$J_2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$ , que se obtiene del caso particular estudiado antes

□

**Teorema 3.2.10. (Criterio de Dini)** Sea  $f \in PC(\mathbb{T})$  una función  $L^1(\mathbb{T})$ . Si  $f$  satisface la condición de Dini (3.22) en un punto  $x_0 \in \mathbb{T}$ , entonces:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = f(x_0).$$

*Demostración.* La demostración de este teorema se basa en aplicar el Lema de Riemann-Lebesgue (3.2.9) a la expresión (3.21).

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\mathbb{T}$  está centrado en el 0. Para cada  $x_0 \in \mathbb{T}$  fijo definimos la función  $g(u) := \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{2\text{sen}(u/2)}$ ,  $\forall u \in \mathbb{T}$ . Comprobemos que  $g$  cumple las hipótesis del Lema de Riemann-Lebesgue.

En primer lugar, veamos que  $g$  es continua en  $\mathbb{T}$  salvo en un conjunto finito de puntos. En efecto, si  $f$  es continua a trozos,  $g$  es continua en  $\mathbb{T}$  salvo en los puntos de discontinuidad de  $f$ ,  $x_1 - x, x_2 - x, \dots, x_{k+1} - x$ .  $g$  tampoco es continua en  $x_{k+2} = 0$ . Por lo tanto,  $g$  tiene como máximo  $k + 2$  puntos de continuidad.

Ahora probemos que  $g \in L^1(\mathbb{T})$ . Por ser  $f \in L^1(\mathbb{T})$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |g(u)| \, du &= \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{2\text{sen}(u/2)} \right| \, du = \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} \right| \left| \frac{u}{2\text{sen}(u/2)} \right| \, du \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} K \left| \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} \right| \, du \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene por ser la función  $\frac{x}{2\text{sen}(x/2)}$  acotada en  $\mathbb{T}$  por una cierta constante  $K$  y

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{2\text{sen}(u/2)} = 1.$$

Por lo tanto, solo queda ver que efectivamente  $\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} \right| \, du < \infty$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} \right| \, du &= \int_{J_1} \left| \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} \right| \, du + \int_{J_2} \left| \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} \right| \, du + \\ &+ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} \right| \, du = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

con  $J_1 \cup J_2 \cup (-\varepsilon, \varepsilon) = \mathbb{T}$ . Acotemos las tres integrales:

- $I_i \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{J_i} |f(x_0 + u)| + |f(x_0)| \, du \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{s \in \mathbb{T}} |f(s)| + \frac{|f(x_0)|}{\varepsilon} (\pi - \varepsilon) < \infty$  para  $i = 1, 2$ .
- $I_3 < \infty$  por satisfacer  $f$  la condición de Dini.

Finalmente, por el Lema de Riemann-Lebesgue 3.2.9, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{\pi} g(u) \text{sen}((N + 1/2)u) \, du &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{\pi} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{2\text{sen}(u/2)} \text{sen}((N + 1/2)u) \, du = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) - f(x_0) = 0. \end{aligned}$$

□

### 3.2.3 Otros teoremas de convergencia puntual

Esta sección completa los apartados anteriores con varios resultados relevantes sobre la convergencia puntual de las Series de Fourier, que han sido extraídos de [23] y [9].

**Teorema 3.2.11. (Teorema de Dirichlet)** Sea  $f \in PC(\mathbb{T})$  tal que existen los límites laterales de  $f'(x)$ . Entonces para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}. \quad (3.23)$$

En particular, si además  $f$  es continua en  $x$ , entonces  $S_N(f)(x)$  converge a  $f(x)$ .

El anterior criterio puede adaptarse para funciones que simplemente sean  $L^1(\mathbb{T})$  sin necesidad de concretar hipótesis sobre su continuidad o derivabilidad:

**Teorema 3.2.12. (Teorema de Dirichlet-Jordan)** Sea  $f \in L^1(\mathbb{T})$  una función creciente en un entorno de un punto  $x_0 \in \mathbb{T}$ , entonces se verifica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}. \quad (3.24)$$

*Demostración.* Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\mathbb{T} = (-\pi, \pi)$ . Sea  $\delta > 0$  tal que  $f$  es creciente en el intervalo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , entonces por (3.19):

$$\begin{aligned} S_N(f)(x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f * D_N(t) dt - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} D_N * f(t) dt - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x_0 - t) D_N(t) dt - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x_0 + t) D_N(t) dt - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0 + t) - f(x_0^+)] D_N(t) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x_0 + t) - f(x_0^-)] D_N(t) dt = \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Acotemos  $I_1$ , y para  $I_2$  se realizaría de manera análoga.

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{\pi} \cdot \left( \left| \int_0^\delta [f(x_0 + t) - f(x_0^+)] D_N(t) dt \right| + \left| \int_\delta^\pi [f(x_0 + t) - f(x_0^+)] D_N(t) dt \right| \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot (|A| + |B|) \end{aligned}$$

donde  $|B| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$  de nuevo por el lema de Riemann-Lebesgue. Ahora, aplicando el teorema A.0.9,  $\exists \eta \in (0, \delta)$  tal que:

$$|A| = |f(x_0 + \delta) - f(x_0^+)| \left| \int_{\eta}^{\delta} D_N(t) dt \right| \leq C |f(x_0 + \delta) - f(x_0^+)|$$

donde la última desigualdad se obtiene de la acotación 3.2.6. Finalmente, basta tomar  $\delta > 0$  tal que  $|f(x_0 + \delta) - f(x_0^+)| < \frac{\varepsilon}{2C}$  para algún  $\varepsilon > 0$ . De esta forma,  $|A| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ .  $\square$

Como aplicación directa del criterio de Dirichlet-Jordan, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.13.** *Sea  $f \in L^1(\mathbb{T})$  de variación acotada en  $\mathbb{T}^1$ , entonces para todo  $x_0 \in \mathbb{T}$  se da (3.24). Además, si  $f$  es continua y  $P$  periódica en  $\mathbb{T}$ , entonces  $S_N(f)$  converge puntualmente a  $f$ .*

*Demostración.* Se demuestra trivialmente teniendo en cuenta el teorema 3.2.12 y la definición de función de variación acotada.  $\square$

Relajando las hipótesis del anterior teorema se puede generalizar el resultado a uno global para funciones que no necesariamente son Lebesgue integrables.

**Teorema 3.2.14.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $P$  periódica tal que  $f \in BV(\mathbb{R})$ . Entonces se tiene la igualdad (3.24). Si además  $f$  es continua en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , entonces  $S_N(f)$  converge uniformemente a  $f$  en dicho intervalo.*

Finalmente, presentamos el resultado más importante sobre la convergencia puntual de las Series de Fourier, con el que culmina esta sección. Se trata del teorema de Carleson-Hunt, que en un primer momento fue la conjetura de Luzin y que decía que la Serie de Fourier de toda función  $f \in L^p(\mathbb{T})$  convergía puntualmente a  $f$  en casi todo punto. Sin embargo, el matemático Kolmogorov dio un ejemplo explícito de una función que no lo era para  $p = 1$ .

Omitimos esta demostración pues se escapa a los contenidos de esta memoria. Puede consultarse en [2], documento íntegramente dedicado a este teorema, que explora, además, los fundamentos sobre la transformada de Hilbert necesarios para demostrarlo.

**Teorema 3.2.15. (Carleson-Hunt)** *Sea  $f \in L^p(\mathbb{T})$  con  $p > 1$ . Entonces  $S_N(f)$  converge puntualmente a  $f$  c.p.t.  $x \in \mathbb{T}$ .*

### 3.2.4 Convergencia uniforme

En esta sección se recogen algunos de los teoremas principales sobre la convergencia uniforme de las Series de Fourier, que completan los resultados vistos hasta el momento. Veamos unos lemas previos antes de desarrollar el contenido principal de esta sección.

---

<sup>1</sup>Decimos que una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es de variación acotada si la podemos escribir como diferencia de dos funciones crecientes, es decir, si  $f = g - h$  con  $g$  y  $h$  funciones crecientes en  $I$ . En tal caso escribiremos  $f \in BV(I)$ .

**Lema 3.2.16.** Dada  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  tal que sus coeficientes de Fourier son 0 para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$ , entonces  $f \equiv 0$

*Demostración.* Si  $a_n = b_n = 0$  para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$ , entonces por la Identidad de Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |f|^2 dx = 0 \Rightarrow f^2 = 0 \Rightarrow f \equiv 0$$

□

**Lema 3.2.17.** Dadas  $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  tal que sus coeficientes de Fourier son iguales para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Entonces  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{T}$ .

*Demostración.* Denotemos por  $a_n(f), b_n(f)$  a los coeficientes de Fourier de  $f$  y  $a_n(g), b_n(g)$  a los de  $g$ . Sea  $h := f - g$ . Entonces sus coeficientes de Fourier son  $a_n(h) = a_n(f) - a_n(g) = 0$  y  $b_n(h) = b_n(f) - b_n(g) = 0$ . Por lo tanto por el lema 3.2.16,  $h \equiv 0$  y  $f \equiv g$ . □

**Teorema 3.2.18.** Dada  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  tal que las sumas parciales de su Serie de Fourier  $S_N(f)$  son uniformemente convergentes, entonces dicha serie converge a  $f$ , es decir,  $f \equiv S(f)$ .

*Demostración.* Por hipótesis  $S_N(f)$  converge uniformemente a una función  $g$ . Probemos que  $g \equiv f$ . Por ser  $S_N(f) \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  y  $2\pi$  periódica, también lo es  $g$ , cuyos coeficientes de Fourier son:

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x) \cos(nx) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} S_N(f)(x) \cos(nx) dx = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^N a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sen(kx) \right) \cos(nx) dx = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{a_0(f)}{2} \cos(nx) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N a_k(f) \int_{\mathbb{T}} \cos(kx) \cos(nx) dx + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} b_k(f) \int_{\mathbb{T}} \sen(kx) \cos(nx) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} a_n(f) = a_n(f). \end{aligned}$$

De forma análoga se tiene que  $b_n(g) = b_n(f)$  y por el lema 3.2.17,  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{T}$ . □

**Corolario 3.2.19.** Dada  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  tal que  $\sum |a_k| < \infty$  y  $\sum |b_k| < \infty$ , con  $a_k$  y  $b_k$  los coeficientes de  $S(f)$ , entonces  $S(f)$  converge uniformemente a  $f$ .

*Demostración.* La demostración es inmediata aplicando el criterio M de Weierstrass a  $S(f)$ . □

Para demostrar el siguiente resultado conviene enunciar un lema previo:

**Lema 3.2.20.** Sea  $f \in PSC(\mathbb{T})$ . Denotamos por  $a_n(f), b_n(f), c_n(f)$  a los coeficientes de la Serie de Fourier de  $f$  y por  $a_n(f'), b_n(f'), c_n(f')$  a los de  $f'$ . Entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_n(f') = n b_n(f) \qquad b_n(f') = -n a_n(f) \qquad c_n(f') = in c_n(f)$$

*Demostración.* La demostración se basa en aplicar la integración por partes a la expresión de los coeficientes de Fourier de  $f'$ :

$$a_n(f') = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f'(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ f(x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{\mathbb{T}} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx \right] = n b_n(f).$$

$$b_n(f') = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f'(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ f(x) \operatorname{sen}(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - n \int_{\mathbb{T}} f(x) \cos(nx) dx \right] = -n a_n(f).$$

$$c_n(f') = \int_{\mathbb{T}} f'(x) e^{-inx} dx = \left[ f(x) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + in \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx \right] = in c_n(f).$$

□

**Teorema 3.2.21.** *Sea  $f \in PSC(\mathbb{T})$ . Entonces  $S_N(f)$  converge uniformemente a  $f$  en  $\mathbb{T}$*

*Demostración.* Partiendo de la forma exponencial de la serie de Fourier de  $f$ , veamos que la suma de los coeficientes  $c_n$  es absolutamente convergente, es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < \infty.$$

Tal suma podemos reescribirla empleando el lema 3.2.20:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| = |c_0(f)| + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |c_n(f)| = |c_0(f)| + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{c_n(f')}{in} \right|. \quad (3.25)$$

Por otro lado, dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,

$$0 \leq (|z_1| - |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1 z_2| \implies |z_1 z_2| \leq (|z_1|^2 + |z_2|^2)/2.$$

Aplicando esta desigualdad al último sumatorio de la identidad, se tiene que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| \leq |c_0(f)| + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{|c_n(f')|^2}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{2n^2} < \infty \quad (3.26)$$

donde la convergencia está asegurada por la desigualdad de Bessel 2.2.6 y por ser  $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{2n^2} = \pi^2/12$ .

Probemos ahora que dicha convergencia a  $f$  es uniforme:

$$\begin{aligned} 0 \leq |\mathcal{S}_N(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx} \right| = \left| \sum_{|n|>N} c_n(f) e^{inx} \right| \leq \\ &\leq \sum_{|n|>N} |c_n(f) e^{inx}| = \sum_{|n|>N} |c_n(f)|. \end{aligned}$$

Tomando supremos a ambos lados de la desigualdad se tiene que:

$$0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{S}_N(f)(x) - f(x)| \leq \sum_{|n| > N} |c_n(f)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Por el criterio del Sándwich, se tiene la convergencia uniforme.  $\square$

El siguiente teorema proporciona una noción general de la convergencia de la Serie de Fourier de una función continua. Sin embargo, en vez de estudiar la propia sucesión de sumas parciales de la Serie, en su lugar construye una función que resulta ser la media aritmética de dicha sumas parciales, que usualmente suele tener mejores propiedades en lo que a convergencia se refiere. Su demostración puede consultarse en [13].

**Teorema 3.2.22. (Féjer)** Sea  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$   $2\pi$  periódica y sea para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k(f)(x). \quad (3.27)$$

Entonces  $\sigma_N$  converge uniformemente a  $f$ .

### 3.2.5 Divergencia. Teorema de DuBois-Reymond

Si bien es cierto que nuestro interés suele estar dirigido hacia la convergencia de las Series de Fourier, resulta interesante hacer un pequeño estudio sobre las condiciones bajo las cuales podemos asegurar la divergencia de dichas Series. En este caso, veremos un teorema que asegura la existencia de una función cuya serie converge. Además, al final del apartado se incluye la expresión explícita de dicha función.

**Teorema 3.2.23. (DuBois-Reymond)** Existe una función  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  tal que su Serie de Fourier diverge en  $x = 0$ , es decir,  $\nexists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(0)$

*Demostración.* Realicemos esta demostración por reducción al absurdo empleando la expresión compleja de la Serie de Fourier. Supongamos que para toda función  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  existe  $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(0)$ . Se define entonces para cada  $N \in \mathbb{N}$  el siguiente operador lineal:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{N_0} : \mathcal{C}(\mathbb{T}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longrightarrow \mathcal{S}_N(f)(0). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Este operador es además continuo pues

$$|\mathcal{S}_{N_0}(f)| = \left| \sum_{n=-N}^N c_n \right| = 2\pi(2N+1) \|f\|_\infty$$

por ser  $|c_n| \leq \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt \leq \int_{\mathbb{T}} \|f\|_\infty dt = 2\pi \|f\|_\infty$ .

Por otro lado, por hipótesis para toda  $f$  fija

$$\sup_N |\mathcal{S}_{N_0}(f)| = C_f < \infty.$$

Por lo tanto, por el principio de acotación uniforme A.0.3 aplicado a la familia  $\{\mathcal{S}_{N_0}\}_{N \in \mathbb{N}}$ , existe  $C$  constante tal que para toda  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$   $2\pi$  periódica,

$$|\mathcal{S}_{N_0}(f)| \leq C \|f\|_\infty. \quad (3.29)$$

Se tiene por tanto que:

$$|\mathcal{S}_{N_0}(f)| = |\mathcal{S}_N(f)(0)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t) D_N(t) dt \right| \leq C \|f\|_\infty \quad (3.30)$$

empleando la identidad (3.19) para  $x = 0$ .

Tomando, pues, la familia de funciones  $f_N(t) = \text{sen}((2N+1)\pi t) \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  que son  $2\pi$  periódicas, el operador (3.28) aplicado a  $f_N$  da como resultado:

$$\mathcal{S}_{N_0}(f_N) = \mathcal{S}_N(f_N)(0) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\text{sen}^2((2N+1)\pi t)}{2\text{sen}(\pi t)} dt.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\mathbb{T} = (-\pi, \pi)$ . En tal caso, teniendo en cuenta la acotación 3.2.7 se sigue la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{N_0}(f_N) = \mathcal{S}_N(f_N)(0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\text{sen}^2((N+1/2)x)}{2\text{sen}(x/2)} \right| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\text{sen}^2((N+1/2)x)}{\text{sen}(x/2)} \right| dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\text{sen}^2((2N+1)x)}{\text{sen}(x)} \right| dx \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\text{sen}^2((2N+1)x)}{x} \right| dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2N+1}{2}} \left| \frac{\text{sen}^2(\pi u)}{u} \right| du > \frac{2}{\pi} \int_0^N \left| \frac{\text{sen}^2(\pi u)}{u} \right| du \geq \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} \left| \frac{\text{sen}^2(\pi u)}{u} \right| du = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \frac{\text{sen}^2(\pi u)}{u+k} du \geq \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 \frac{\text{sen}^2(\pi u)}{1+k} du = \frac{2}{\pi} \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right) \int_0^1 \text{sen}^2(\pi u) du = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{N_0}(f_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{S}_N(f_N)(0) = \infty$ , lo cual supone una contradicción con la hipótesis inicial. □

Existe una segunda versión de este teorema que proporciona una construcción explícita de la función  $f$  en términos de polinomios trigonométricos. Su expresión es la siguiente:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} e^{ip(n)x} H_n(x) \quad (3.31)$$

donde  $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de polinomios trigonométricos, que verifican  $|H_n(x)| < 1$  para todo  $x \in \mathbb{T}$ , y  $p(n) = \sum_{j=1}^n 2q(j) + 1$  con  $q(j)$  el grado del polinomio  $H_j$ . La demostración de esta segunda versión, así como la de los resultados auxiliares que construyen dicha función, pueden leerse con más detenimiento en [7].

### 3.3 Extensiones periódicas

Toda la teoría que hemos explicado en los anteriores apartados ha sido desarrollada sobre funciones definidas en un intervalo de longitud  $2\pi$ . Pero esta situación no es la usual, pues las funciones pueden estar definidas en general en un intervalo de longitud  $P/2$  arbitrario. Esta sección pretende adaptar todos los resultados vistos en apartados anteriores a estas funciones por medio de extensiones, que pueden ser pares o impares (según conveniencia). De esta forma podemos conseguir una función definida en un intervalo de longitud  $P$ , convertirla en periódica y, así, aplicar la misma teoría que hemos construido hasta ahora.

Nuestro punto de partida será una función  $f$  arbitraria definida en un intervalo de longitud  $P/2$  (de aquí en adelante supondremos, sin pérdida de generalidad, que este intervalo es de la forma  $[0, P/2)$ ). El primer paso es considerar una extensión de  $f$ , de forma que creemos una nueva función definida en  $(-P/2, P/2)$ .

**Definición 3.3.1.** Sean los conjuntos  $A, B, X$  e  $Y$  tal que  $A \subset X$  y  $B \subset Y$ . Sea una función  $f : A \rightarrow B$ . Una extensión de  $f$  a  $X$ , que denotaremos por  $\tilde{f}$ , es una función tal que  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$  y  $\tilde{f}|_A \equiv f$ .

A lo largo de esta sección trabajaremos fundamentalmente con dos tipos de extensiones: las pares y las impares, que se elegirán según conveniencia.

**Definición 3.3.2.** 1. Sea  $f : [0, P/2) \rightarrow \mathbb{C}$ , decimos que la función  $f_{par}$  definida como

$$f_{par} = \begin{cases} f(x) & x \in [0, P/2) \\ f(-x) & x \in (-P/2, 0] \end{cases} \quad (3.32)$$

es una extensión par de  $f$  al intervalo  $(-P/2, P/2)$ .

2. Sea  $f : [0, P/2) \rightarrow \mathbb{C}$ , decimos que la función  $f_{impar}$  definida como

$$f_{impar} = \begin{cases} f(x) & x \in [0, P/2) \\ -f(-x) & x \in (-P/2, 0] \end{cases} \quad (3.33)$$

es una extensión impar de  $f$  al intervalo  $(-P/2, P/2)$ .

Por último debemos de extender de nuevo nuestra función  $f$  de partida de forma que se convierta en una función  $P$  periódica.

**Definición 3.3.3.** Sea  $f : (-P/2, P/2) \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una extensión de  $f$  en  $\mathbb{R}$ . Decimos que  $\tilde{f}$  es una extensión  $P$  periódica si para todo  $x \in \mathbb{R}$  y para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , se verifica que  $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x + kP)$ .

Tomemos ahora el intervalo  $\mathbb{T}_P := (-P/2, P/2)$ . El objetivo es explicitar la Serie de Fourier para las funciones  $P$  periódicas definidas en dicho intervalo.

**Definición 3.3.4.** Sea  $f \in L^1(\mathbb{T}_P)$ . Se define la serie de Fourier en forma compleja asociada a  $f$  como:

$$\mathcal{S}(f)(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{P}}. \quad (3.34)$$

Donde, con un cálculo similar a la primera sección, se tiene que los coeficientes son

$$c_n = \frac{1}{P} \int_{\mathbb{T}_P} f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{P}}$$

**Definición 3.3.5.** Sea  $f \in L^1(\mathbb{T}_P)$ . Se define la serie de Fourier en forma trigonométrica asociada a  $f$  como:

$$S(f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{P}\right). \quad (3.35)$$

Donde, con un cálculo similar a la primera sección, se tiene que los coeficientes son

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{\mathbb{T}_P} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{P}\right) dx \quad b_n = \frac{2}{P} \int_{\mathbb{T}_P} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{P}\right) dx.$$

No es sorprendente ver que las propiedades que cumplen las funciones  $2\pi$  periódicas definidas en  $\mathbb{T}$  también las cumplen las funciones  $P$  periódicas definidas en  $\mathbb{T}_P$ . Para demostrarlo, dada  $f$  una función  $P$  periódica definida en  $\mathbb{T}_P$ , podemos definir una nueva función  $f^*$  tal que

$$f^*(x) = f\left(\frac{P}{2\pi}x\right).$$

$f^*$  es  $2\pi$  periódica y, aplicándole los resultados previos, podemos emplear un cambio de variable para deducir las mismas conclusiones en nuestra función  $f$  original.

## 3.4 Fenómeno de Gibbs

Las Series de Fourier son una buena forma de aproximar ciertas funciones periódicas por funciones trigonométricas que tienen buen comportamiento y son fáciles de manipular. El problema natural que surge es la aproximación de una función en sus puntos de discontinuidad, que por supuesto no coincidirá con el valor que proporciona la Serie de Fourier,

que podemos calcular por ejemplo con el Teorema de Dirichlet-Jordan 3.2.12. Se tiene que, en general, la representación de la Serie de Fourier oscila cada vez con mayor frecuencia y menor amplitud a medida que los términos de sus sumas parciales aumentan. Sin embargo, esto no ocurre en los puntos de discontinuidad ni en sus entornos, donde los *picos* no desaparecen. Este efecto, que se conoce como fenómeno de Gibbs, supone un importante error en la evaluación numérica de la Serie en los entornos de la discontinuidad que conlleva la inutilización de dichas soluciones cuando el nivel de precisión exigido es mínimamente alto. El contenido de esta sección se ha extraído fundamentalmente de [23].

Observemos este fenómeno a partir de la función salto en el intervalo  $(-\pi, \pi)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

y de su serie de Fourier  $S(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)x)}{(2n-1)}$ . En la figura (3.2) se pueden apreciar las protuberancias que comentábamos antes. Vamos a estimar en qué proporción *diverge* la Serie de Fourier [20].

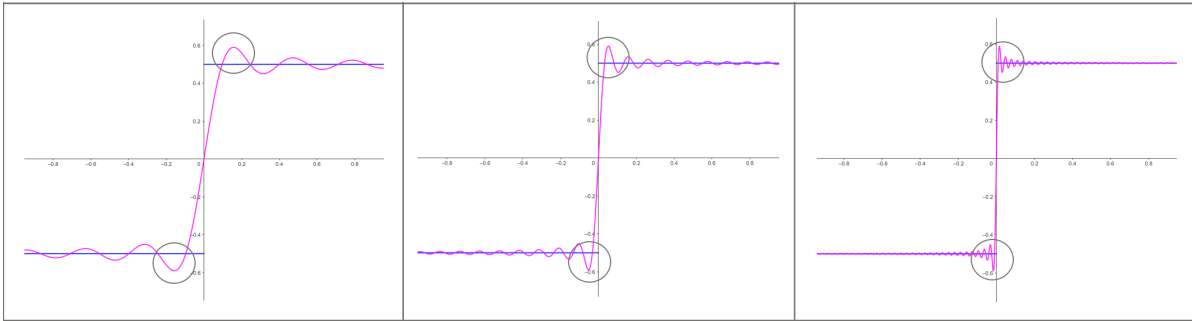


Figura 3.2: Representación de  $f$  y  $S_N(f)$  para  $N = 10, 30, 100$ , respectivamente. Los círculos señalan la región en la que ocurre el fenómeno de Gibbs.

Si derivamos término a término la serie  $S_N(f)$  y reordenamos tenemos que:

$$\pi S'_N(f) = 4 \sum_{n=1}^N \cos((2n-1)x)$$

Multiplicando a ambos lados por  $\text{sen}(x)$ :

$$\pi \text{sen } x S'_N(f) = 4 \text{sen } x \left[ \sum_{n=1}^N \cos((2n-1)x) \right] = 2 \text{sen}(2Nx),$$

donde la última igualdad se ha obtenido computando la serie anterior en WolframAlpha. Así concluimos que toma el máximo en  $x = \pi/2N$  y tiene el siguiente valor:

$$S_N(f)(\pi/2N) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\text{sen}((2n-1)\pi/2N)}{(2n-1)} \quad (3.36)$$

Por otro lado, sea  $Si(x)$  la función definida en A.0.10. Empleando la partición  $x_k = (2k-1)\frac{\pi}{2N}$  para  $k = 1, \dots, N$  y tomando el punto medio de cada intervalo  $(x_{k+1}, x_k)$  para evaluar el integrando, se tiene que, sustituyendo por (3.36):

$$\begin{aligned} Si(\pi) &= \int_0^\pi \frac{\sen t}{t} dt \approx \frac{\sen(\pi/2N)}{\pi/2N} \frac{\pi}{N} + \dots + \frac{\sen((2N-1)\pi/2N)}{(2N-1)\pi/2N} \frac{\pi}{N} = \\ &= \frac{\pi}{2} S_N(f)(\pi/2N). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por lo tanto se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(\pi/2N) = \frac{2}{\pi} Si(\pi) \approx 1.17896 \quad (3.38)$$

donde la integral  $Si(\pi)$  se ha computado de nuevo con WolframAlpha. Con esto concluimos que el valor que proporciona la serie de Fourier en el punto excede 0,17896 al valor verdadero de la función por la derecha ( $f(0+) = 1$ ), es decir, alrededor de un 9% del salto entre  $f(0+)$  y  $f(0-)$ .

## 3.5 Series de fourier no trigonométricas

Durante las últimas décadas, parte de la investigación en torno a las Series de Fourier se ha ido diversificando hacia el estudio de nuevas expresiones de las funciones por medio de la suma de series que no son necesariamente trigonométricas. Hablamos del Análisis de Fourier no trigonométrico, un área que desde hace años ha ido cobrando gran relevancia debido a su actividad investigadora. Los resultados obtenidos durante estos años no solo se enmarcan en líneas investigadoras relacionadas con el análisis armónico y teoría de la aproximación, sino que también son considerados como importantes contribuciones al mundo de la teoría de números, matemática computacional y ecuaciones diferenciales. En esta sección introduciremos las Series de Fourier-Jacobi y las Series de Fourier-Bessel, dos de las variantes más importantes dentro de este campo. La redacción de este apartado se basa en los artículos [1] y [14].

### 3.5.1 Series de Fourier-Jacobi

Para definir estas series conviene hacer un breve repaso sobre los polinomios de Jacobi y sus relaciones de ortogonalidad, así como una nueva definición de norma. Para ello, y durante todo el desarrollo que se hará en este apartado, se trabajará con funciones definidas en el intervalo  $\mathbb{I} = (-1, 1)$  y con valores en  $\mathbb{C}$ .

**Definición 3.5.1.** Denotamos por  $p_n^{(\alpha, \beta)}$  al polinomio de Jacobi de grado  $n \geq 0$  y de orden  $(\alpha, \beta)$  con  $\alpha, \beta > -1$ , que es de la forma:

$$p_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}). \quad (3.39)$$

Al igual que con las Series de Fourier trigonométricas, antes de plantear el desarrollo de las Series de Fourier-Jacobi, conviene definir relaciones de ortogonalidad entre los polinomios de Jacobi.

**Teorema 3.5.2.** *El conjunto  $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es ortonormal en  $L^2(\mathbb{I})$  respecto de la función peso  $w_{\alpha,\beta}(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ , es decir, para  $n, m \in \mathbb{N}$  se satisface la relación:*

$$\int_{\mathbb{I}} p_n^{(\alpha,\beta)}(x) p_m^{(\alpha,\beta)}(x) w_{\alpha,\beta}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!(2n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} & \text{si } n = m. \end{cases} \quad (3.40)$$

Como último preliminar, presentaremos una nueva norma, respecto a la cual estudiaremos la convergencia.

**Definición 3.5.3.** *Denotaremos como norma- $p$  de una función  $f$  (definida en  $\mathbb{I}$ ) respecto del peso  $w_{\alpha,\beta}(x)$  a la expresión de la forma:*

$$\|f\|_{w,p} = \left( \int_{\mathbb{I}} |f(x)|^p w_{\alpha,\beta}(x) dx \right)^{1/p}. \quad (3.41)$$

Ahora sí estamos en condiciones de deducir la expresión de las Series de Fourier-Jacobi. En este caso, nos interesa expresar una función  $f$  definida en  $\mathbb{I}$  como una suma infinita de polinomios de Jacobi:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n p_n^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (3.42)$$

Obtengamos, pues, la expresión de los coeficientes  $d_n$  en función de los polinomios de Jacobi. Para ello, multiplicamos la expresión (3.42) por otro polinomio de Jacobi,  $p_m^{(\alpha,\beta)}$ , e integramos en el intervalo  $\mathbb{I}$  respecto del peso  $w_{\alpha,\beta}(x)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{I}} f(x) p_m^{(\alpha,\beta)}(x) w_{\alpha,\beta}(x) dx &= \int_{\mathbb{I}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n p_n^{(\alpha,\beta)}(x) p_m^{(\alpha,\beta)}(x) w_{\alpha,\beta}(x) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n \int_{\mathbb{I}} p_n^{(\alpha,\beta)}(x) p_m^{(\alpha,\beta)}(x) w_{\alpha,\beta}(x) dx = \\ &= d_m \cdot \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{m!(2m+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+\beta+1)}{\Gamma(m+\alpha+\beta+1)} \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde la última igualdad se obtiene de las relaciones de ortogonalidad del teorema 3.5.2.

**Definición 3.5.4.** *Dada una función  $f$  definida en  $\mathbb{I}$ , definimos la serie de Fourier-Jacobi como la expresión:*

$$\mathcal{J}(f)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} d_n p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (3.44)$$

con  $d_n$  de la forma (3.43). Denotaremos a la suma parcial  $N$ -ésima de la Serie de Fourier-Jacobi como:

$$\mathcal{J}_N(f)(x) := \sum_{n=1}^N d_n p_n^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (3.45)$$

La cuestión que se pretende resolver, al igual que con las Series de Fourier, es bajo qué condiciones y para qué valores de  $p$  ocurre que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\mathcal{J}_N(f) - f\|_{w,p} = 0 \quad (3.46)$$

que se sabe que es cierto para  $p = 2$  gracias a la teoría sobre los espacios de Hilbert. El teorema de acotación uniforme A.0.3 reduce el problema (3.46) a demostrar que se da la acotación:

$$\|\mathcal{J}_N(f)\|_{w,p} \leq C \|f\|_{w,p} \quad (3.47)$$

donde  $C$  es una constante que no depende de  $N$  ni de  $f$ . Dicho estudio puede generalizarse incluyendo otras funciones peso a ambos lado de la desigualdad anterior, desarrollándose así numerosos resultados sobre convergencia, entre los que destacamos los realizados en [16], donde se recogen algunas nociones de la teoría de pesos y se emplean funciones peso logarítmicas. El siguiente teorema, con el que finaliza este apartado, pertenece al artículo de referencia de esta sección y proporciona un intervalo de convergencia media en el que se cumple y en cuyos extremos se puede obtener una acotación débil.

**Teorema 3.5.5.** *Sean  $\alpha, \beta > -1$  y  $1 < p < \infty$ . Sea  $u_{r,s}(x) := (1-x)^r(1+x)^s$ . Entonces*

$$\|u_{a,b} \mathcal{J}_N(f)\|_{w,p} \leq C \|u_{A,B} f\|_{w,p}$$

si y solo si

$$-\min\{1/4, (\alpha+1)/2\} - a < (\alpha+1)(1/p - 1/2) < \min\{1/4, (\alpha+1)/2\} - A$$

y

$$-\min\{1/4, (\beta+1)/2\} - b < (\beta+1)(1/p - 1/2) < \min\{1/4, (\beta+1)/2\} - B$$

con  $a \leq A$  y  $b \leq B$ .

### 3.5.2 Series de Fourier-Bessel

Otro ejemplo de Series de Fourier no trigonométricas son las Series de Fourier-Bessel, que se construyen a partir de las funciones de Bessel. Al igual que con las series de Fourier-Jacobi, definiremos primero las funciones de Bessel y estudiaremos las relaciones de ortogonalidad entre ellas. Después construiremos las Series de Fourier-Bessel y veremos algunos resultados importantes sobre su convergencia. En este caso, trabajaremos en el intervalo  $\mathbb{I} = (0, 1)$ .

**Definición 3.5.6.** *Sea la ecuación diferencial de segundo orden*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{N}$$

Denotamos por  $J_\alpha$  a las soluciones de dicha ecuación, que son de la forma

$$J_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\alpha)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\alpha}. \quad (3.48)$$

Estas funciones son muy interesantes por tener un conjunto numerable de raíces positivas. Denotaremos por  $\{\lambda_{n,\alpha}\}_{n \in \mathbb{N}}$  al conjunto de ceros de la función  $J_\alpha$ . A partir de ellos seremos capaces de establecer las siguientes relaciones de ortogonalidad.

**Teorema 3.5.7.** *El conjunto  $\{J_\alpha(\lambda_{n,\alpha}x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es ortogonal en  $\mathbb{I}$  respecto a la función peso  $w(x) := x \in \mathcal{C}(\mathbb{I})$ , es decir, para  $n, m \in \mathbb{N}$  se satisface*

$$\int_{\mathbb{I}} J_\alpha(\lambda_{n,\alpha}x) J_\alpha(\lambda_{m,\alpha}x) x dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{1}{2} J_{\alpha+1}^2(\lambda_{n,\alpha}) & \text{si } n = m \end{cases} \quad (3.49)$$

Análogamente a cómo hemos construido el espacio  $L^2$  para las series de Fourier, es deseable que definamos el espacio de funciones idóneo para desarrollar los resultados sobre las series de Fourier-Bessel.

**Definición 3.5.8.** *Denotamos por  $L_w^2(\mathbb{I})$  al espacio vectorial de clases de equivalencia de las funciones medibles  $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{C}$  que verifican que:*

$$\int_{\mathbb{I}} |f(x)|^2 w(x) dx < \infty. \quad (3.50)$$

**Teorema 3.5.9.** *a) Sea  $N \subset \mathbb{N}$  y  $\mathcal{F} = \{\rho_n : n \in N\}$  un conjunto ortogonal en  $L_w^2(a, b)$ . Entonces  $\mathcal{F}$  es una base ortogonal de  $L_w^2(a, b)$  si y solo si*

$$f = \sum_{n \in N} \frac{\langle f, \rho_n \rangle_w}{\|\rho_n\|_w^2} \rho_n \quad (3.51)$$

para cada  $f \in L_w^2(a, b)$ .

*b) El conjunto  $\mathcal{R} = \{J_\alpha(\lambda_{n,\alpha}x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una base ortogonal de  $L_w^2(\mathbb{I})$ .*

Vamos, pues, a construir las Series de Fourier-Bessel, que tienen como objetivo expresar una función  $f \in L_w^2(\mathbb{I})$  como una suma de elementos del conjunto ortogonal anterior, es decir,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{n,\alpha} J_\alpha(\lambda_{n,\alpha}x). \quad (3.52)$$

Para obtener la expresión de los coeficientes  $d_{n,\alpha}$ , basta con multiplicar la expresión (3.52) por una función de Bessel  $J_\alpha(\lambda_{m,\alpha}x)$  e integrar en  $\mathbb{I}$  respecto del peso  $w(x) = x$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{I}} f(x) J_\alpha(\lambda_{m,\alpha}x) x dx &= \int_{\mathbb{I}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{n,\alpha} J_\alpha(\lambda_{n,\alpha}x) J_\alpha(\lambda_{m,\alpha}x) x dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} d_{n,\alpha} \int_{\mathbb{I}} J_\alpha(\lambda_{n,\alpha}x) J_\alpha(\lambda_{m,\alpha}x) x dx = \\ &= d_{m,\alpha} \frac{1}{2} J_{\alpha+1}^2(\lambda_{m,\alpha}). \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\implies d_{m,\alpha} = \frac{2}{J_{\alpha+1}^2(\lambda_{m,\alpha})} \int_{\mathbb{I}} f(x) J_\alpha(\lambda_{m,\alpha}x) x dx.$$

**Definición 3.5.10.** Dada una función  $f \in L_w^2(\mathbb{I})$ , definimos su Serie de Fourier-Bessel como la expresión:

$$\mathcal{B}(f)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} d_{n,\alpha} J_{\alpha}(\lambda_{n,\alpha} x) \quad (3.54)$$

donde los coeficientes  $d_{n,\alpha}$  son de la forma (3.53). Denotaremos a la suma parcial  $N$ -ésima de la Serie de Fourier-Bessel de  $f$  a

$$\mathcal{B}_N(f)(x) := \sum_{n=1}^N d_{n,\alpha} J_{\alpha}(\lambda_{n,\alpha} x). \quad (3.55)$$

Al igual que en el apartado anterior, nuestro objetivo es estudiar para qué  $p > 1, p \neq 2$  las series convergen en los espacios  $L_w^p(\mathbb{I})$ . El problema puede reformularse, por el teorema de Banach-Steinhaus A.0.3, en términos de las sumas parciales (3.55), resultados que pueden consultarse en [3]. En dicho artículo, además, estos autores plantearon varias estimaciones de normas de la forma:

$$\|\mathcal{B}_N(f)(x) u(x)\|_{p,w} \leq C \|f(x) v(x)\|_{p,w} \quad (3.56)$$

con  $C$  una constante independiente de  $N$  y de  $f$  y  $u \equiv v$ . Sin embargo, para  $u \neq v$  tenemos dos resultados muy interesantes, cuya demostración, junto a los lemas técnicos complementarios, pueden consultarse en [14].

**Teorema 3.5.11.** Sea  $\alpha > -1$  y  $1 < p < \infty$  y  $f \in L_w^2(\mathbb{I})$ . Sean las funciones peso

$$u(x) = x^a (1-x)^b \prod_{k=1}^m |x - x_k|^{c_k}$$

$$v(x) = x^A (1-x)^B \prod_{k=1}^m |x - x_k|^{C_k}$$

con  $0 < x_1 < \dots < x_m < 1$  y  $a, A, b, B, c_k, C_k \in \mathbb{R}$ . Si se satisfacen

$$B \leq b; \quad pB < p - 1; \quad -1 < pb$$

$$C_k \leq c_k; \quad pC_k < p - 1; \quad -1 < pc_k$$

$$A \leq a; \quad |1/p - 1/2 + a/4 + A/4| < (a - A)/4 + \min\{1/4, (\alpha + 1)/2\}$$

entonces  $\|\mathcal{B}(f)(x) u(x)\|_{w,p} \leq C \|f(x) v(x)\|_{w,p}$ .

El siguiente resultado trata de ser un recíproco en el sentido de que intenta establecer las características de  $u$  y  $v$  en función de la acotación en norma.

**Teorema 3.5.12.** Si  $\|\mathcal{B}(f)(x) u(x)\|_{w,p} \leq C \|f(x) v(x)\|_{w,p}$  para una función  $f \in L_w^2(\mathbb{I})$ , entonces las funciones  $u, v$  han de cumplir

$$\int_0^1 u(x)^p x^{\alpha p + 1} dx < \infty; \quad \int_0^1 u(x)^p x^{1-p/2} dx < \infty$$

$$\int_0^1 v(x)^{-p'} x^{\alpha p' + 1} dx < \infty; \quad \int_0^1 v(x)^{-p'} x^{1-p'/2} dx < \infty$$

$$u(x) \leq v(x)$$

para todo  $p'$  exponente conjugado de  $p$ .

### Ejemplos para las Series de Fourier no trigonométricas

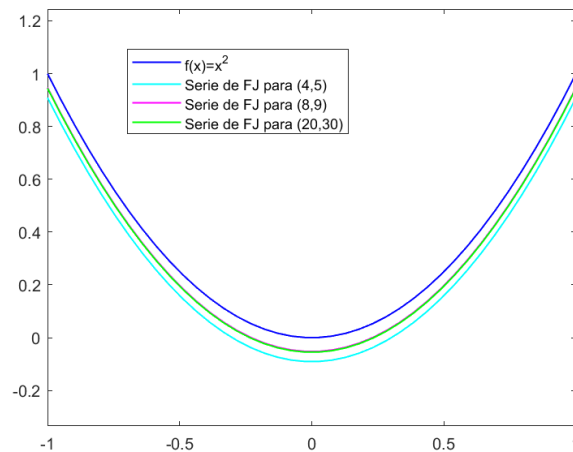
Vamos a calcular algunas aproximaciones a las Series de Fourier-Jacobi y a las Series de Fourier-Bessel para la función  $f(x) = x^2$  de forma numérica con el programa *Matlab* (se puede consultar el código en las secciones B.2 y B.3, respectivamente).

#### Serie de Fourier-Jacobi

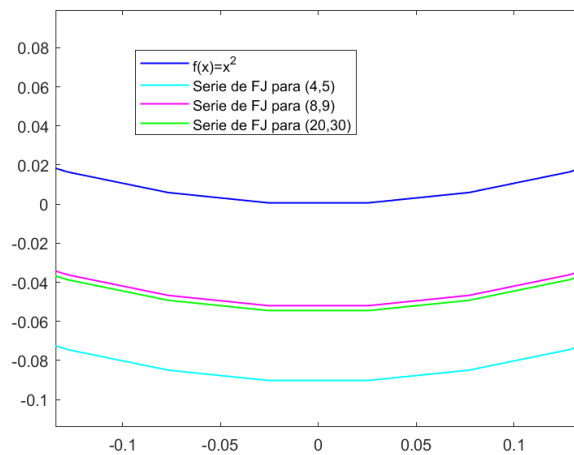
El objetivo es expresar  $f(x)$  de la forma  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  en el intervalo  $\mathbb{I} = (-1, 1)$  donde los coeficientes son

$$d_{m, (\alpha, \beta)} = \frac{m!(2m + \alpha + \beta + 1)}{2^{\alpha + \beta + 1}} \frac{\Gamma(m + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(m + \alpha + 1)\Gamma(m + \beta + 1)} \int_{\mathbb{I}} x^2 p_m^{(\alpha, \beta)}(x) w_{\alpha, \beta}(x) dx.$$

Se tienen las siguientes aproximaciones:



(a)



(b)

Figura 3.3: Distintas aproximaciones para  $f(x) = x^2$  por Series de Fourier-Jacobi para  $(\alpha, \beta) = (4, 5), (8, 9)$  y  $(20, 30)$ .

### Serie de Fourier-Bessel

En este caso pondremos  $f(x)$  de la forma  $\sum_{n=1}^{\infty} d_{n,\alpha} J_{\alpha}(\lambda_{n,\alpha}x)$  en el intervalo  $\mathbb{I} = (0, 1)$ , donde los coeficientes de la serie son  $d_{m,\alpha} = \frac{2}{J_{\alpha+1}^2(\lambda_{m,\alpha})} \int_{\mathbb{I}} x^3 J_{\alpha}(\lambda_{m,\alpha}x) dx$ .

Así, obtenemos las siguientes aproximaciones:

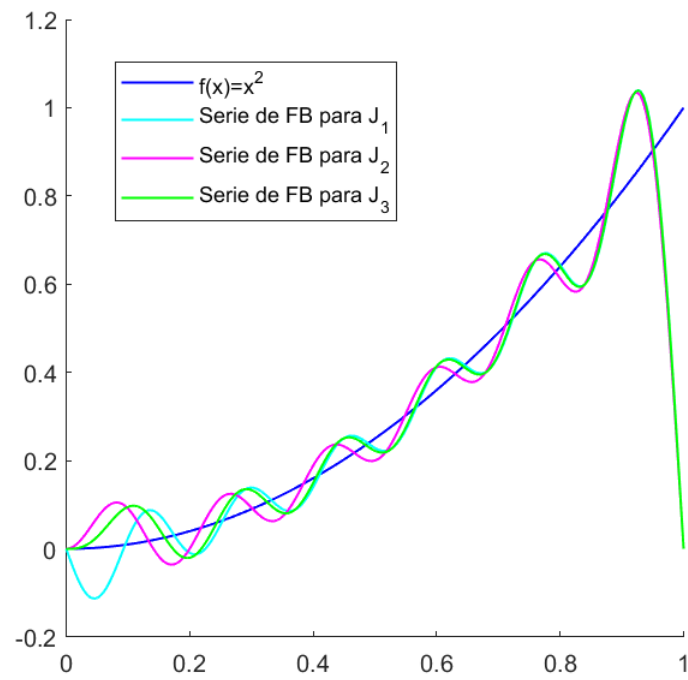


Figura 3.4: Distintas aproximações para  $f(x) = x^2$  por Series de Fourier-Bessel para  $\alpha = 1, 2, 3$

# Capítulo 4

## Aplicaciones: Resolución de EDPs

Una de las principales aplicaciones de la series de Fourier, así como de sus variantes, es la resolución de ciertas ecuaciones en derivadas parciales que modelizan distintos comportamientos en determinados recintos. Esta sección girará en torno a la búsqueda de una solución para la ecuación del calor bidimensional y la ecuación de Laplace en un cilindro. Como método de resolución se empleará la separación de variables, lo que nos conducirá al planteamiento de varios subsistemas de EDPs. Así, combinaremos todo el desarrollo teórico explicado en las anteriores secciones para dar una solución formal a un problema real como muestra de una de las innumerables aplicaciones del análisis de Fourier. Los resultados de este capítulo se han extraído principalmente de [15] y [11].

### 4.1 Ecuación del calor en un rectángulo

Como primera parte de esta sección, resolveremos el problema que motivó a Fourier a desarrollar toda su teoría: encontrar la función que parametriza la difusión del calor en un recinto rectangular acotado, es decir, un dominio de la forma:

$$\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, t > 0\}.$$

El problema consiste en encontrar una función  $u = u(x, t)$  que es  $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  en la primera variable y  $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  en la segunda variable, y que sea solución de la ecuación

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0 \tag{4.1}$$

con  $c^2$  un coeficiente constante relacionado con el movimiento del flujo inicial de calor. Suponiendo que la función  $u(x, t)$  puede expresarse como producto de funciones unidimensionales  $X(x)$  y  $T(t)$ , sustituimos en la ecuación y reordenamos:

$$\begin{aligned} X(x)T'(t) - c^2 X''(x)T(t) &= 0 \\ \frac{T'(t)}{c^2 T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \end{aligned}$$

para cierto  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Resolvamos ambas ecuaciones:

- $\frac{T'(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda \implies T'(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \implies T(t) = K e^{-\lambda c^2 t}$ .
- $\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \implies X''(x) + \lambda X(x) = 0$ .

El polinomio característico de esta ecuación es  $P(\mu) = \mu^2 + \lambda$ , que se anula en los valores  $\mu_1 = \sqrt{\lambda}i$  y en  $\mu_2 = -\sqrt{\lambda}i$ , por lo que la solución general de la ecuación es  $X(x) = B e^{\sqrt{\lambda}ix} + A e^{-\sqrt{\lambda}ix}$ .

## Condiciones de tipo Dirichlet

Las condiciones de tipo Dirichlet proporcionan la siguiente información sobre los puntos de la frontera:

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in (0, L) \end{cases}$$

con  $u_0 \in L^2(0, L)$ . Sustituyendo obtenemos que las nuevas condiciones de contorno (para obtener soluciones no triviales) para cada uno de los problemas unidimensionales son las siguientes:

$$\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \implies X(0) = 0 \\ X(L)T(t) = 0 \implies X(L) = 0. \end{cases}$$

Ahora particularizamos en las soluciones generales que habíamos encontrado para  $X$ :

$$X(0) = B + A = 0 \implies A = -B \implies X(x) = B \left( e^{\sqrt{\lambda}ix} - e^{-\sqrt{\lambda}ix} \right) = \widehat{B} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\lambda}x \right).$$

$$X(L) = \widehat{B} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\lambda}L \right) = 0 \implies \sqrt{\lambda}L = n\pi \implies \lambda = \lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Así, obtenemos soluciones de la forma

$$u_n(x, t) = K e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t} \widehat{B} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) = B_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

y por tanto también sería solución de nuestra ecuación inicial una suma finita de ellas:

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N B_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right).$$

Por último, estudiemos qué ocurre con la última condición de contorno original. Sustituyendo por  $t = 0$  se tiene que:

$$u_N(x, 0) = \sum_{n=1}^N B_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) = u_0(x).$$

De las expresiones anteriores surge la siguiente pregunta: ¿puede tomarse como solución la función  $u(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(x, t)$ ? La respuesta es afirmativa siempre que se pueda asegurar la convergencia de dicha serie, que pasa por asegurar la convergencia de  $u(x, 0) :=$

$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N(x, 0)$ . Para ello, primero extenderemos la función  $u_0(x)$  al intervalo  $(-L, L)$  y calcularemos su serie de Fourier. En este caso, conviene elegir una extensión impar  $\tilde{u}_0(x)$  de la forma (3.33), pues la función  $\cos x$  es par y nuestro objetivo es que los coeficientes  $a_n$  se anulen.

Así, tomando  $B_n = b_n$  los coeficientes de Fourier de  $\tilde{u}_0(x)$ , podemos asegurar, por el teorema de Carleson-Hunt, que  $u(x, 0) := \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(x, 0)$  está bien definido y en consecuencia,  $u(x, t)$  también por ser  $u(x, t) \leq u(x, 0)$ .

## Condiciones de tipo Neumann

En este caso, las condiciones de tipo Neumann proporcionan la siguiente información sobre los puntos de la frontera:

$$\begin{cases} u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in (0, L) \end{cases}$$

con  $u_0 \in L^2(0, L)$ .

Sustituyendo se tiene que

$$\begin{cases} X'(0)T(t) = 0 \implies X'(0) = 0 \\ X'(L)T(t) = 0 \implies X'(L) = 0. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que  $X'(x) = \sqrt{\lambda}iBe^{\sqrt{\lambda}ix} - \sqrt{\lambda}iAe^{-\sqrt{\lambda}ix}$ , se tiene que

$$X'(0) = \sqrt{\lambda}i(B - A) = 0 \implies B = A \implies X(x) = \hat{A} \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Por otro lado,

$$X'(L) = -\hat{A}\sqrt{\lambda} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \implies \sqrt{\lambda}L = n\pi \implies \lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Así, las soluciones para este problema son las funciones de la forma

$$u_n(x, t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por el mismo razonamiento que anteriormente, también son soluciones una suma finita de ellas:

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Para hallar el valor de los coeficientes  $A_n$ , veamos que valor toma la función en  $t = 0$ :

$$u_N(x, 0) = \sum_{n=1}^N A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0(x).$$

Aplicando el mismo razonamiento que en el caso anterior, extenderemos la función  $u_0(x)$  al intervalo  $(-L, L)$  y calcularemos su serie de Fourier. Elegiremos ahora una extensión par  $\hat{u}_0(x)$  de la forma (3.32), pues en este caso la función  $\sin x$  es impar y queremos que los coeficientes  $b_n$  se anulen. De esta forma tenemos la existencia de una solución con condiciones de tipo Neumann tomando  $A_n = a_n$  los coeficientes de Fourier de la función  $\hat{u}_0$ . La convergencia de la solución  $u(x, 0) := \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(x, 0)$  está asegurada de nuevo por el Teorema de Carleson-Hunt y consecuentemente la de  $u(x, t) := \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(x, t)$ .

## 4.2 Problemas de Sturm-Liouville

Los problemas de Sturm-Liouville son un conjunto de problemas matemáticos que se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales en las que se aplican ciertas condiciones de contorno. Estos problemas surgen en muchos campos de la física y la ingeniería, como la mecánica cuántica, la teoría de la elasticidad, la teoría del calor o, como en nuestro caso, con la ecuación de ondas.

**Definición 4.2.1.** *Un problema de Sturm-Liouville en el intervalo  $[a, b]$  es un problema de autovalores consistente en una EDP de la forma*

$$(p(x)X'(x))' + q(x)X(x) + \mu w(x)X(x) = 0 \quad (4.2)$$

con  $p, q, w$  funciones reales,  $p, p' \in \mathcal{C}[a, b]$ ,  $q, w \in \mathcal{C}(a, b)$  y  $p, w$  funciones positivas en  $(a, b)$ , y condiciones de contorno en un punto  $a$  de la frontera del dominio de definición de la forma  $\nu X(a) + \tau X'(a) = 0$ , para ciertos  $\nu, \tau \in \mathbb{R}$ .

La función  $w$  definida anteriormente hace referencia a la función peso de la que hablábamos en la sección anterior, la cual determinará las relaciones de ortogonalidad y propiedades del espacio en el que viven las soluciones.

**Definición 4.2.2.** *Decimos que el problema de Sturm-Liouville en  $[a, b]$  es singular cuando se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- *El intervalo  $[a, b]$  tiene longitud infinita.*
- *La función  $p$  o la función  $w$  se anula en algún punto de dicho intervalo.*
- *En el caso de que  $(a, b)$  sea acotado, algún coeficiente de la ecuación tiende a infinito en uno o ambos extremos del intervalo.*

**Teorema 4.2.3.** *Sea un problema de Sturm-Liouville en  $[a, b]$  y sea la función  $w$  integrable Lebesgue en  $(a, b)$ . Entonces se cumple que:*

- *Los autovalores  $\mu$  del problema son reales.*
- *Las autofunciones  $X_1, X_2$  correspondientes a distintos autovalores  $\mu_1, \mu_2$  son ortogonales en  $L_w^2(a, b)$ .*

Los siguientes teoremas nos proporcionan caracterizaciones de las soluciones de los problemas de Sturm-Liouville que aparecerán en los posteriores ejemplos.

**Teorema 4.2.4.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $\beta \in (0, \pi/2]$ .

a) El problema de Sturm-Liouville singular

$$\begin{cases} -\frac{\alpha^2}{r^2}R(r) + \frac{1}{r}[rR'(r)]' = -\mu R(r) & \text{para } 0 < r < b \\ R(b)\sin\beta + bR'(b)\cos\beta = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

tiene un autovalor  $\mu = s^2$  para cada solución positiva  $s$  de la ecuación

$$J_n(sb)\sin\beta + sbJ_n'(sb)\cos\beta = 0, \quad (4.4)$$

con  $J_n(x)$  la función de Bessel de orden  $n$ .

b) Para cada autovalor  $\mu$  descrito en a), toda autofunción es un múltiplo constante de

$$R(r) = J_n(\sqrt{\mu}r) = J_n(sr). \quad (4.5)$$

c) El conjunto de las soluciones positivas  $s$  de (4.4),  $\{s_{n,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  constituyen una sucesión infinita y no acotada. Además, dadas las funciones  $R_{n,j} = J_{n,j}(s_{n,j}r)$  y  $w(r) = r$ , el conjunto  $\mathcal{R} := \{R_{n,j}\}_j \cup \{1\}$  es una base ortonormal del espacio  $L_w^2(0, b)$ .

d) Para  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\|R_{n,j}\|_w^2 = \begin{cases} \frac{b^2}{2} J_{n+1}^2(s_{n,j}b) & \text{si } \beta = \pi/2 \\ \frac{b^2 s_{n,j} - n^2 + \tan^2 \beta}{2s_{n,j}^2} J_n^2(s_{n,j}b) & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.6)$$

**Teorema 4.2.5.** a) El problema de Sturm-Liouville singular

$$(\sin\theta \Theta'(\theta))' + \lambda \sin\theta \Theta(\theta) = 0 \quad (4.7)$$

para  $0 < \theta < \pi$  tiene para cada  $n \in \mathbb{N}$  los siguientes autovalores y autofunciones:

$$\lambda_n = n(n+1), \quad \Theta_n(\theta) = p_n^{(0,0)}(\cos\theta)$$

con  $p_n^{(0,0)}$  el polinomio de Jacobi de grado  $n$  y de orden  $(0, 0)$ .

b) El conjunto de las autofunciones  $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  constituyen una base ortogonal del espacio  $L_w^2(0, \pi)$ , con  $w(\theta) = \sin\theta$ .

c) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|\Theta_n\|_w^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

### 4.2.1 Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

En este apartado se pretende encontrar una solución  $u = u(x, y, z) \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  a la ecuación de Laplace  $\Delta u = 0$  en un recinto tridimensional de la forma

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < \ell^2\} \quad (4.8)$$

para algún  $\ell > 0$ . Por la geometría de este recinto conviene emplear el cambio a coordenadas esféricas  $(r, \phi, \theta)$ . La ecuación de Laplace después de dicho cambio queda de la forma

$$\Delta u = \frac{1}{r} (ru)_{rr} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} u_{\phi\phi} + (\sin \theta u_{\theta})_{\theta} \right] = 0. \quad (4.9)$$

En particular, trataremos el caso en el que la función que buscamos no depende de la coordenada  $\theta$ . Así, tenemos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} (ru)_{rr} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_{\theta})_{\theta} = 0 & \text{para } 0 < r < \ell, 0 < \theta < \pi \\ u(\ell, \theta) = f(\theta) & \text{para } 0 < \theta < \pi \end{cases} \quad (4.10)$$

para  $f \in \mathcal{C}(0, \pi)$ .

El método empleado para resolver este problema es el de separación de variables. Así, queremos expresar nuestra solución como  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ . Sustituimos esta expresión de la función  $u$  en la ecuación de (4.10) y multiplicando por  $r^2$  tenemos que:

$$r(rR(r))''\Theta(\theta) + \frac{1}{\sin \theta} R(r) (\sin \theta \Theta'(\theta))' = 0. \quad (4.11)$$

De esta ecuación obtenemos los siguientes problemas:

$$(\sin \theta \Theta'(\theta))' + \lambda \sin \theta \Theta(\theta) = 0 \quad (4.12)$$

$$r(rR(r))'' - \lambda R(r) = 0. \quad (4.13)$$

El problema (4.12) es justo el estudiado en el teorema 4.2.5. De aquí obtenemos que  $\Theta_n(\theta) = p_n^{(0,0)}(\cos \theta)$  y  $\lambda_n = n(n+1)$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Para estos autovalores, el problema (4.13) queda de la siguiente forma:

$$r(rR(r))'' - n(n+1)R(r) = 0.$$

La solución a esta ecuación se puede deducir fácilmente y es la siguiente:

$$R(r) = Kr^n + Cr^{-1-n},$$

de donde concluiremos que  $C = 0$  pues exigimos que  $\lim_{r \rightarrow 0^+} R(r)$  exista. Por lo tanto, una solución general a la ecuación original es  $u_n(r, \phi, \theta) = u_n(r, \theta) = Kr^n p_n^{(0,0)}(\cos \theta)$ .

Concluimos que, formalmente, la solución en forma de serie del problema inicial es la siguiente:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n r^n p_n^{(0,0)}(\cos \theta). \quad (4.14)$$

La condición de contorno se traduce en lo siguiente:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \ell^n p_n^{(0,0)}(\cos \theta). \quad (4.15)$$

Finalmente, aplicando los resultados vistos sobre las Series de Fourier-Jacobi y el resultado 4.2.5, tenemos que los coeficientes toman el siguiente valor:

$$K_n = \frac{2n+1}{2\ell^n} \int_0^\pi f(\theta) p_n^{(0,0)}(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta. \quad (4.16)$$

### 4.2.2 Ecuación de ondas en un cilindro

En esta sección se estudiarán las soluciones de la ecuación de ondas

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad (4.17)$$

dentro de un recinto cilíndrico que consta de dos dimensiones espaciales y una temporal.

Como punto de partida, tomemos ahora el siguiente recinto:

$$\Omega := \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < b^2, 0 < z < a\}.$$

Nuestro objetivo es encontrar la función  $u = u(x, y, t) \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  cumpla que  $\Delta u = 0$  la ecuación anterior en  $\Omega$  (más adelante precisaremos condiciones de contorno en la frontera del dominio).

Por la geometría del dominio  $\Omega$ , conviene realizar el cambio de variables a coordenadas cilíndricas. En tal caso, el nuevo recinto y el problema, con las condiciones iniciales pertinentes, quedan de la siguiente forma.

$$\Omega' = \{(r, \psi, t) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < b, 0 < \psi < 2\pi, 0 < t < a\}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \left( u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\psi\psi} \right) = 0 \text{ en } \Omega' \\ u(b, \psi, t) = 0 \\ u(r, 0, t) = u(r, 2\pi, t) \\ u_\psi(r, 0, t) = u_\psi(r, 2\pi, t) \\ u(r, \psi, 0) = f(r, \psi) \\ u_t(r, \psi, 0) = g(r, \psi). \end{cases} \quad (4.18)$$

con  $f, g \in \mathcal{C}[(0, b) \times (0, 2\pi)]$ . Tal y como decíamos anteriormente, aplicaremos separación de variables para construir una solución de la forma  $u(r, \psi, t) = R(r)\Psi(\psi)T(t)$ . Así, sustituyendo en la ecuación de Laplace y operando se tiene que

$$c^2 \left[ \frac{1}{r^2} R(r) \Psi''(\psi) T(t) + \frac{1}{r} [rR'(r)]' \Psi(\psi) T(t) \right] = R(r) \Psi(\psi) T''(t).$$

Tomando  $\Psi''(\psi) = -\alpha^2 \Psi(\psi)$ , la igualdad queda de la siguiente forma:

$$c^2 \Psi(\psi) T(t) \left( -\frac{\alpha^2}{r^2} R(r) + \frac{1}{r} [rR'(r)]' \right) = R(r) \Psi(\psi) T''(t).$$

Simplificando en  $\Psi$ , tenemos que existe  $\mu \in \mathbb{C}$  tal que:

$$-\frac{\alpha^2}{r^2}R(r) + \frac{1}{r}[rR'(r)]' = -\mu R(r) \quad \text{y} \quad T''(t) = -\mu c^2 T(t).$$

Nótese que la ecuación  $\Psi''(\psi) = -\alpha^2\Psi(\psi)$  ya se resolvió en el ejemplo anterior. Los autovalores de este problema son de la forma  $\{n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$  y las autofunciones asociadas son  $\Psi_n(\psi) = Ae^{in\psi} + Be^{-in\psi}$ , con  $A, B \in \mathbb{C}$ .

Por otro lado, para la ecuación  $T''(t) = -\mu c^2 T(t)$  y para cada autovalor  $\mu$  las soluciones son de la forma  $T_\mu(t) = K_1 \cos(\sqrt{\mu}ct) + K_2 \sen(\sqrt{\mu}ct)$ .

El problema de Sturm-Liouville restante no es más que un caso particular del teorema 4.2.4 para  $\beta = \pi/2$ , de donde además deducimos que  $\sqrt{\mu} = s_{n,j}$ .

Por lo tanto, para cada  $n, j \in \mathbb{N}$ , tenemos la siguiente solución al problema original:

$$u_{n,j}(r, \psi, t) = J_n(s_{n,j}r) (Ae^{in\psi} + Be^{-in\psi}) (K_1 \cos(s_{n,j}ct) + K_2 \sen(s_{n,j}ct)) \quad (4.19)$$

con  $A, B, K_1, K_2 \in \mathbb{C}$  y  $s_{n,j}$  los ceros positivos de la función  $J_n(sb)$ .

Para seguir operando con la expresión (4.19) conviene tratar de forma separada los términos  $e^{in\psi}$  y  $e^{-in\psi}$  reemplazando  $n$  por  $-n$  en el último de ellos. De esta forma, tenemos la siguiente solución para  $n \in \mathbb{Z}$  y  $j \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n,j}(r, \psi, t) = J_{|n|}(s_{|n|,j}r) (D_{n,j} \cos(s_{|n|,j}ct) + E_{n,j} \sen(s_{|n|,j}ct)) e^{in\psi}. \quad (4.20)$$

Así, podríamos tomar como solución formal del problema inicial la siguiente serie:

$$u(r, \psi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} J_{|n|}(s_{|n|,j}r) (D_{n,j} \cos(s_{|n|,j}ct) + E_{n,j} \sen(s_{|n|,j}ct)) e^{in\psi}. \quad (4.21)$$

Nuestro objetivo ahora es determinar los valores de los coeficientes  $D_{n,j}$  y  $E_{n,j}$ . Aplicando el lema A.0.11 y tomando  $W(r, \psi) = w(r) = r$ , podemos concluir que el conjunto  $\{F_{n,j} : n \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ , con  $F_{n,j} = J_{|n|}(s_{|n|,j}r)e^{in\psi}$ , es una base ortonormal del espacio  $L^2_W((0, b) \times (-\pi, \pi))$ , que por el cambio de variables que realizamos al principio, es el espacio  $L^2(D)$ , con  $D$  el disco de centro  $(0, 0)$  y de radio  $b$ . Esto nos va a permitir poder trabajar con las condiciones de contorno que nos proporciona el problema.

La condición  $u(r, \psi, 0) = f(r, \psi)$  se traduce en lo siguiente:

$$f(r, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} D_{n,j} J_{|n|}(s_{|n|,j}r) e^{in\psi}. \quad (4.22)$$

Teniendo en cuenta que según el apartado **c)** del teorema 4.2.4,

$$\begin{aligned} \|F_{n,j}\|_W^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^b |J_{|n|}(s_{|n|,j}r)e^{in\psi}|^2 r dr d\psi = \left( \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \right) (J_{|n|}^2(s_{|n|,j}r) r dr) = \\ &= 2\pi \|R_{n,j}\|_w^2 = \pi b^2 J_{|n|+1}^2(s_{|n|,j}b), \end{aligned}$$

obtenemos el valor de  $D_{n,j}$ :

$$D_{n,j} = \frac{\langle f, F_{n,j} \rangle_W}{\|F_{n,j}\|_W^2} = \frac{1}{\pi b^2 J_{|n|+1}^2(s_{|n|,j}b)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^b f(r, \psi) J_{|n|}(s_{|n|,j}r) e^{-im\psi} r dr d\psi. \quad (4.23)$$

Por otro lado, de  $u_t(r, \psi, 0) = g(r, \psi)$  se tiene que:

$$g(r, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} E_{n,j} s_{|n|,j} c J_{|n|}(s_{|n|,j}r) e^{im\psi}. \quad (4.24)$$

Con argumentos similares y aplicando los mismos resultados, llegamos a que

$$E_{n,j} = \frac{1}{\pi b^2 s_{|n|,j} c J_{|n|+1}^2(s_{|n|,j}b)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^b g(r, \psi) J_{|n|}(s_{|n|,j}r) e^{-im\psi} r dr d\psi. \quad (4.25)$$

# Capítulo 5

## Conclusión

En este trabajo se han recopilado algunos de los resultados fundamentales relacionados con las Series de Fourier y sus aplicaciones. El estudio del espacio de funciones  $L^2$ , constituido por las funciones cuadrado integrables, ha permitido establecer un marco teórico adecuado para desarrollar toda la teoría y ha proporcionado las condiciones necesarias para garantizar la convergencia en norma de las Series de Fourier.

Seguidamente hemos definido formalmente las Series de Fourier, explorado los distintos resultados y teoremas relacionados con su convergencia, tanto puntual como uniforme, aspectos fundamentales para garantizar su validez. Además, hemos analizado el fenómeno de Gibbs, presente en los puntos de discontinuidad de la función de partida y que por tanto es imprescindible tener en cuenta si nuestro objetivo es realizar aproximaciones numéricas con Series de Fourier. Para finalizar esta sección, hemos introducido dos variaciones de las Series de Fourier tradicionales: las Series de Fourier-Jacobi y las Series de Fourier-Bessel, siendo ambas objeto de investigación por sus propiedades de convergencia.

Este trabajo culmina con ejemplos de aplicaciones de todo lo explicado anteriormente. No solo hemos resuelto la ecuación del calor, motivación principal de Fourier, sino que hemos introducido los problemas de Sturm-Liouville para resolver la ecuación de Laplace y la ecuación de ondas en distintos recintos.

Podemos concluir por tanto que las Series de Fourier no solo tienen importancia en plano teórico sino que son una herramienta fundamental en el análisis de señales y de fenómenos periódicos. Sin embargo, es importante tener en cuenta que las Series de Fourier tienen limitaciones en cuanto a condiciones de aplicabilidad y precisión se refiere. Es por eso que hay todo un campo de investigación abierto que trata de ampliar esta teoría y establecer nuevas variantes que permitan cubrir dichas carencias y generalizar estos objetos a dimensiones mayores.

# Anexo A

## Resultados auxiliares

Este anexo tiene como objetivo recopilar resultados relevantes que se usarán a lo largo de la memoria, pero que además también tienen importancia por sí mismos.

**Lema A.0.1.** Si  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  y  $0 < t < 1$ , entonces:

$$\alpha^t \beta^{1-t} \leq t\alpha + (1-t)\beta. \quad (\text{A.1})$$

*Demostración.* Si  $\alpha$  o  $\beta$  vale 0, la igualdad (A.1) se verifica trivialmente. Supongamos que  $\alpha, \beta > 0$  y tomemos  $x = \log \alpha$  e  $y = \log \beta$ . Como la función  $f(x) = e^x$  es convexa, tenemos que:

$$\alpha^t \beta^{1-t} = e^{tx} e^{(1-t)y} = e^{tx+(1-t)y} \leq te^x + (1-t)e^y = t\alpha + (1-t)\beta.$$

□

**Teorema A.0.2. (Desigualdad de Tchebyshev)** Sea  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  una función medible. Para cada número real  $\lambda$  se verifica que

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f d\mu. \quad (\text{A.2})$$

*Demostración.* Sea para cada  $\lambda > 0$  el conjunto  $E_\lambda = \{x \in X : f(x) \geq \lambda\}$  y  $s = \lambda \chi_{E_\lambda}$ . La función  $s$  es simple y  $0 \leq s \leq f$ , por lo que

$$\lambda \mu(E_\lambda) = \int_X s d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

□

**Teorema A.0.3. (Principio de acotación uniforme/Teorema de Banach-Steinhaus)**

Tomemos  $E$  un espacio normado completo y  $F \subset E$  normado. Sea  $W$  un subconjunto del conjunto de operadores lineales acotados de  $E$  en  $F$  tal que para cada  $x \in E$ ,  $\sup\{\|Tx\|_F : T \in W\} < \infty$ . Entonces  $\sup\{\|T\| : T \in W\} < \infty$ .

*Demostración.* Puede consultarse en [4].

□

**Teorema A.0.4.** *Dada una sucesión de funciones  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $g_n$  converge a  $g$  uniformemente y  $g_n$  es continua para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces se tiene que  $g$  es continua.*

*Demostración.* Sea  $x_0 \in (-\pi, \pi) = I$  arbitrario. Sea  $\varepsilon > 0$ . Por la definición de continuidad se tiene que  $\exists \delta > 0$  tal que:

$$|g_n(x) - g_n(x_0)| < \varepsilon/3 \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta$$

Como por hipótesis  $g_n \rightarrow g$  uniformemente,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que:

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon/3 \quad \forall n \geq n_0, \forall x \in I$$

En particular:

$$|g_n(x_0) - g(x_0)| < \varepsilon/3 \quad \forall n \geq n_0$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= |g(x) - g_n(x) + g_n(x) - g_n(x_0) + g_n(x_0) - g(x_0)| \leq \\ &\leq |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_n(x_0)| + |g_n(x_0) - g(x_0)| < \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Lema A.0.5.** *Para todo ángulo  $\alpha$  y para todo  $k \in \mathbb{Z}$  se dan las siguientes identidades trigonométricas:*

1.  $\cos((k+1)\alpha) + \cos((k-1)\alpha) = 2\cos(k\alpha)\cos(\alpha)$
2.  $\cos^n \alpha = \sum_{k=0}^n c_k \cos(k\alpha)$
3.  $\cos^{2n} \alpha / 2 = \sum_{k=0}^n d_k \cos(k\alpha)$

para ciertos coeficientes  $c_k, d_k \in \mathbb{C}$ .

*Demostración.* La primera identidad se deduce fácilmente con las clásicas fórmulas para el ángulo suma:

$$\begin{aligned} \cos((k+1)\alpha) + \cos((k-1)\alpha) &= \cos(k\alpha + \alpha) + \cos(k\alpha - \alpha) = \cos(k\alpha)\cos(\alpha) - \\ &\quad - \sin(k\alpha)\sin(\alpha) + \cos(k\alpha)\cos(-\alpha) - \sin(k\alpha)\sin(-\alpha) = \\ &= 2\cos(k\alpha)\cos(\alpha). \end{aligned}$$

La segunda identidad se demuestra con inducción:

- Para  $n = 1$ ,  $\cos(\alpha) = c_0 \cos(0) + c_1 \cos(\alpha)$ , que es cierto para  $c_0 = 0$  y  $c_1 = 1$
- Supongamos que la igualdad es cierta para  $n$ , veámosla para  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \cos^{n+1}(\alpha) &= \cos^n(\alpha)\cos(\alpha) = \sum_{k=0}^n c_k \cos(k\alpha)\cos(\alpha) = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{2} (\cos((k+1)\alpha) + \cos((k-1)\alpha)) = \\ &= \frac{c_1}{2} + \left(c_0 + \frac{c_2}{2}\right)\cos(\alpha) + \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_3}{2}\right)\cos(2\alpha) + \dots + \frac{c_n}{2}\cos((n+1)\alpha) = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} c'_k \cos(k\alpha) \end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned} \cos^{2n}(\alpha/2) &= \left( \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} \right)^{2n} = \frac{1}{2^n} (\cos(\alpha) + 1)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\alpha) = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} c_j \cos(j\alpha) = \sum_{k=0}^n d_k \cos(k\alpha). \end{aligned}$$

□

**Proposición A.0.6.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}$  y  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ , entonces existe una sucesión  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones simples que convergen a  $f$  puntualmente y tales que

$$|s_1| \leq |s_2| \leq \dots \leq |f|.$$

Además,  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$  en los conjuntos en los que  $f$  esté acotada.

*Demostración.* Puede consultarse en [11].

□

**Teorema A.0.7. (Lusin)** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}$  y  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$  que se anula fuera de un conjunto medible Lebesgue de medida finita. Entonces dado  $\varepsilon > 0$  arbitrario, existe una función  $g \in \mathcal{C}(\Omega)$  tal que

$$\mu\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon.$$

*Demostración.* Puede consultarse en [11].

□

**Teorema A.0.8. (Regla de integración por partes de la integral de Riemann-Stieltjes)** Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x) df(x). \quad (\text{A.3})$$

*Demostración.* Puede consultarse en [21].

□

**Teorema A.0.9. (Teorema del valor medio para integrales)** Sean  $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi_1$  es monótona creciente en  $[a, b]$  y  $\varphi_2$  es continua en  $[a, b]$ . Entonces existe una constante  $\delta \in [a, b]$  que verifica que

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \varphi_1(a^+) \int_a^\delta \varphi_2(x) dx + \varphi_1(b^-) \int_\delta^b \varphi_2(x) dx.$$

*Demostración.* Nótese que si en la expresión

$$\int_a^b \phi(x) \varphi_2(x) dx = \phi(b^-) \int_\delta^b \varphi_2(x) dx \quad (\text{A.4})$$

con  $\phi$  monótona creciente, sustituimos  $\phi(x)$  por  $\varphi_1(x) - \varphi_1(a^+)$  tenemos

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx - \varphi_1(a^+) \int_a^b \varphi_2(x) dx = \varphi_1(b^-) \int_\delta^b \varphi_2(x) dx - \varphi_1(a^+) \int_\delta^b \varphi_2(x) dx \quad (\text{A.5})$$

que despejando y reordenando obtenemos la expresión que queremos demostrar. Por tanto demostramos la expresión (A.4), es decir, supongamos que  $\varphi_1(a^+) = 0$ . Consideramos

$$\Phi_2(x) = \int_x^b \varphi_2(t) dt.$$

$\Phi_2$  es derivable y  $\Phi_2'(x) = -\varphi_2(x)$ , por lo que aplicando la regla de integración por partes de la integral de Riemann-Stieltjes A.0.8 y teniendo en cuenta que  $\varphi_1(a^+) = 0 = \Phi_2(x)$  tenemos que

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x) dx = [-\varphi_1(x)\Phi_2(x)]_a^b + \int_a^b \Phi_2(x) d\varphi_1(x) = \int_a^b \Phi_2(x) d\varphi_1(x) \quad (\text{A.6})$$

Definiendo ahora  $m := \min\{\Phi_2(x) : x \in [a, b]\}$  y  $M := \max\{\Phi_2(x) : x \in [a, b]\}$  podemos acotar la anterior integral de la siguiente forma:

$$m\varphi(b^-) \leq \int_a^b \Phi_2(x) d\varphi_1(x) \leq M\varphi(b^-).$$

Finalmente aplicando el teorema del valor medio a la función  $\Phi_2$  concluimos que existe  $\delta \in [a, b]$  tal que:

$$\int_a^b \Phi_2(x) d\varphi_1(x) = \varphi_1(b^-)\Phi_2(\delta)$$

por lo que sustituyendo en (A.6) obtenemos

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x) dx = \int_a^b \Phi_2(x) d\varphi_1(x) = \varphi_1(b^-)\Phi_2(\delta) = \varphi_1(b^-) \int_\delta^b \varphi_2(x) dx.$$

□

**Proposición A.0.10.** *Definimos la función  $Si : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por la expresión:*

$$Si(x) := \int_0^x \frac{\text{sen } u}{u} du.$$

*Esta función verifica que:*

- $Si(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ .
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Si(x) = \frac{\pi}{2}$ .

*Demostración.* La primera condición se deduce trivialmente del Teorema Fundamental del Cálculo. Para el segundo apartado nótese que la función  $Si(x)$  es impar, por tanto

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Si(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen } u}{u} du$ . Calculemos esta integral empleando el Teorema de Cauchy de los Residuos.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen } u}{u} du &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\text{sen } u}{u} du = \lim_{R \rightarrow \infty} \text{im} \left( \int_{-R}^R \frac{e^{iu}}{u} du \right) = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty; r \rightarrow 0} \text{im} \left( \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iu}}{u} du + \int_r^R \frac{e^{iu}}{u} du \right). \end{aligned}$$

Consideramos entonces la función  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  y el camino cerrado  $\gamma(R, r) = I(R, r) * J(R, r) * C(R) * C^*(r)$  en el plano  $\mathbb{C}$ , con  $I$  el segmento que va de  $-R$  a  $-r$ ,  $J$  el que va de  $r$  a  $R$ ,  $C$  la semicircunferencia de centro  $(0, 0)$  que se recorre en el sentido usual y  $C^*$  la semicircunferencia de centro  $(0, 0)$  recorrida en el sentido contrario. Por el Teorema de Cauchy de los Residuos

$$\int_{\gamma(R,r)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(R,r)} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{I(R,r)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{J(R,r)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C^*(r)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C(R)} \frac{e^{iz}}{z} dz = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \end{aligned}$$

y que

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iu}}{u} du = I_1 \quad \text{y} \quad \int_r^R \frac{e^{iu}}{u} du = I_2$$

basta calcular  $I_3$  e  $I_4$ .

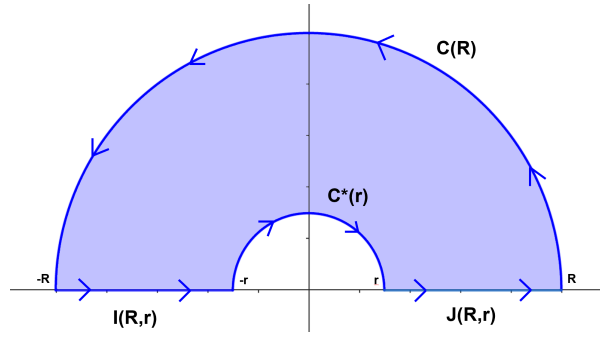


Figura A.1: Recinto delimitado por los caminos  $I(R, r)$ ,  $J(R, r)$ ,  $C(R)$  y  $C^*(r)$ .

En efecto, para  $I_3$ , por ser  $z = 0$  un polo de orden 1 de  $f(z)$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C^*(r)} f(z) dz = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C(r)} f(z) dz = -\pi i.$$

Veamos ahora qué ocurre con  $I_4$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{C(R)} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{iR \cos t - R \sin t}}{R e^{it}} R i e^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi |e^{iR \cos t - R \sin t}| dt = \int_0^\pi |e^{-R \sin t}| dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi} dt = \frac{\pi}{-R} (e^{-R} - 1) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sen u}{u} du &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty; r \rightarrow 0} im \left( \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iu}}{u} du + \int_r^R \frac{e^{iu}}{u} du \right) = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty; r \rightarrow 0} im (I_1 + I_2) = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty; r \rightarrow 0} im (I_3 + I_4) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

**Lema A.0.11.** Sean  $A, B$  dos intervalos y sea  $D = A \times B$ . Si  $\Gamma = \{\gamma_n : n \in \mathbb{Z}\}$  y  $\Delta = \{\delta_m : m \in \mathbb{Z}\}$  son bases ortonormales para  $L^2(A)$  y  $L^2(B)$  respectivamente, entonces

$$\Sigma = \{\gamma_n \delta_m : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

es base ortonormal de  $L^2(D)$ .

*Demostración.* Puede consultarse en [23].

□

# Anexo B

## Código de Matlab

### B.1 Serie de Fourier

Código empleado para elaborar las figuras (3.1):

```
x=linspace(-pi,pi,50);
f=@(x) x.^2;
c=(1/pi)*integral(f,-pi,pi);
a=zeros(1,4);
b=zeros(1,4);
% calculamos los coeficientes
for n=1:4
    a(n)=(1/pi)*integral(x.^2.*cos(n*x),-pi,pi);
    b(n)=(1/pi)*integral(x.^2.*sin(n*x),-pi,pi);
end
r=linspace(-pi,pi,50);
% calculamos las sumas parciales
it1= c+a(1).*cos(r)+b(1).*sin(r);
it2=it1+a(2).*cos(2*r)+b(2).*sin(2*r);
it3=it2+a(3).*cos(3*r)+b(3).*sin(3*r);
it4=it3+a(4).*cos(4*r)+b(4).*sin(4*r);
% ploteamos la funcion de partida y cada suma parcial
%%
figure(1)
axis equal
axis on
plot(r,r.^2,"LineWidth",1,"Color","blue");
%%
hold on
plot(r,it1,"LineWidth",1,"Color","magenta");
%%
hold on
plot(r,it2,"LineWidth",1,"Color","magenta");
%%
hold on
plot(r,it3,"LineWidth",1,"Color","magenta");
%%
hold on
plot(r,it4,"LineWidth",1,"Color","magenta");
```

## B.2 Series de Fourier-Jacobi

Código empleado para elaborar las figuras (3.3):

```
x=linspace(-1,1,40);
c=zeros(1,5);
d=zeros(1,5);
% calculamos los coeficientes
for i=1:5
    f=@(x) x.*x.*jacobiP(i,4,5,x).*(1-x).^4.*(1+x).^5;
    c(i)=factorial(i).*(2*i+4+5+1)*gamma(i+4+5+1)/((2.^(5+4+1))* ...
        gamma(i+4+1)*gamma(i+5+1));
    d(i)=c(i).*integral(f,-1,1);
end
r=linspace(-1,1,40);
%%
% hacemos las sumas parciales
y1=d(1).*jacobiP(1,4,5,r);
y2=y1+d(2).*jacobiP(2,4,5,r);
y3=y2+d(3).*jacobiP(3,4,5,r);
y4=y3+d(4).*jacobiP(4,4,5,r);
figure(1)
axis equal
plot(r,r.*r,"LineWidth",1,"Color","blue")
hold on
%%
plot(r,y4,"LineWidth",1,"Color","cyan")
axis equal
```

```
x=linspace(-1,1,40);
c=zeros(1,5);
d=zeros(1,5);
% calculamos los coeficientes
for i=1:5
    f=@(x) x.*x.*jacobiP(i,8,9,x).*(1-x).^8.*(1+x).^9;
    c(i)=factorial(i).*(2*i+8+9+1)*gamma(i+8+9+1)/((2.^(8+9+1))* ...
        gamma(i+8+1)*gamma(i+9+1));
    d(i)=c(i).*integral(f,-1,1);
end
r=linspace(-1,1,40);
%%
% hacemos las sumas parciales
y1=d(1).*jacobiP(1,8,9,r);
y2=y1+d(2).*jacobiP(2,8,9,r);
y3=y2+d(3).*jacobiP(3,8,9,r);
y4=y3+d(4).*jacobiP(4,8,9,r);
%%
plot(r,y4,"LineWidth",1,"Color","magenta")
axis equal
```

```
x=linspace(-1,1,40);
c=zeros(1,5);
d=zeros(1,5);
% calculamos los coeficientes
```

```

for i=1:5
    f=@(x) x.*x.*jacobiP(i,20,30,x).*(1-x).^20.*(1+x).^30;
    c(i)=factorial(i).*(2*i+50+1)*gamma(i+50+1)/((2.^(50+1))* ...
        gamma(i+20+1)*gamma(i+30+1));
    d(i)=c(i).*integral(f,-1,1);
end
r=linspace(-1,1,40);
%%
% hacemos las sumas parciales
y1=d(1).*jacobiP(1,20,30,r);
y2=y1+d(2).*jacobiP(2,20,30,r);
y3=y2+d(3).*jacobiP(3,20,30,r);
y4=y3+d(4).*jacobiP(4,20,30,r);
%%
plot(r,y4,"LineWidth",1,"Color","green")
axis equal

```

## B.3 Series de Fourier-Bessel

Código empleado para elaborar la figura (3.4):

```

function r = raices(f, x)
    y=f(x);
    indices=find(y(1:end-1).*y(2:end)<0);
    r=zeros(1,length(indices));
    for k=1:length(indices)
        r(k)=fzero(f, [x(indices(k)), x(indices(k)+1)]);
    end

x=linspace(0,40,40);
f=@(x) besselj(1,x);
k=raices(f,x); % Obtencion de raices de la func de Bessel

R=1;
a=zeros(1,length(k));
for i=1:length(k)
    f=@(r) (r.*r).*besselj(1,k(i)*r/R);
    a(i)=2*integral(f,0,R)/(R*besselj(2,k(i)))^2; % Coefs de la serie
end
r=linspace(0,R,200);
y=zeros(1,length(r));
for i=1:length(k)
    y=y+a(i)*besselj(1,k(i)*r/R); % Obtencion de la serie
end
hold on
fplot(@r) r,[0,R],"blue","LineWidth",1); % f(x)=x
plot(r,y,"cyan","LineWidth",1);
hold off
grid off
axis square

x=linspace(0,40,40);
f=@(x) besselj(2,x);

```

```

k=raices(f,x);

R=1;
a=zeros(1,length(k));
for i=1:length(k)
    f=@(r) (r.*r).*besselj(2,k(i)*r/R);
    a(i)=2*integral(f,0,R)/(R*besselj(3,k(i)))^2;
end
r=linspace(0,R,200);
y=zeros(1,length(r));
for i=1:length(k)
    y=y+a(i)*besselj(2,k(i)*r/R);
end
hold on
plot(r,y,"magenta","LineWidth",1);
hold off
grid off
axis square

x=linspace(0,40,40);
f=@(x) besselj(3,x);
k=raices(f,x);

R=1;
a=zeros(1,length(k));
for i=1:length(k)
    f=@(r) (r.*r).*besselj(3,k(i)*r/R);
    a(i)=2*integral(f,0,R)/(R*besselj(4,k(i)))^2;
end
r=linspace(0,R,200);
y=zeros(1,length(r));
for i=1:length(k)
    y=y+a(i)*besselj(3,k(i)*r/R);
end
hold on
plot(r,y,"green","LineWidth",1);
hold off
grid off
axis square

```

# Bibliografía

- [1] ARENAS, ALBERTO, CIAURRI, ÓSCAR, LABARGA, EDGAR, RONCAL, LUZ & VARONA, JUAN LUIS. *Series de Fourier no trigonométricas: una perspectiva familiar*, Zubía Monográfico, Universidad de la Rioja. 2014
- [2] ARIAS DE REYNA, JUAN, *Pointwise Convergence of Fourier Series*, Springer, 2002.
- [3] BENEDEK, A.I. & PANZONE, R., *Mean convergence of series of Bessel functions*, Revista de la unión matemática argentina, Vol 26, n<sup>o</sup>1, 42-62, 1972.
- [4] BRÉZIS, HAIM, *Análisis Funcional*, Alianza, Madrid 1984.
- [5] BOGGESE, ALBERT & NARCOWICH, FRANCIS J., *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, Wiley, 2<sup>nd</sup> edition.
- [6] BOILLY, LOUIS LÉOPOLD, *Retrato de Jean-Baptiste Joseph Fourier*. Fuente: Wikipedia
- [7] BOIS REYMOND, P. DU, Ueber die Fourierschen Reihen, *Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen*, 1873.
- [8] DUOANDIKOETXEA, JAVIER, *200 años de convergencia de las series de Fourier*, La gaceta de la RSME vol 10.3 (2007) páginas 651-688.
- [9] DUOANDIKOETXEA, JAVIER, *Análisis de Fourier*, Addison Wesley, 1995.
- [10] FACENDA AGUIRRE, JOSÉ ANTONIO & FRENICHE IBÁÑEZ, FRANCISCO JOSÉ, *Integración de funciones en varias variables*, Pirámide.
- [11] FOLLAND, GERALD B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, 1999.
- [12] F. WALNUT, DAVID, *An introduction to wavelet analysis*, Birkhäuser.
- [13] GASQUET, CLAUDE & WITOMSKI, PATRICK, *Fourier analysis and applications*, Springer.
- [14] GUADALUPE, J.J. PÉREZ, M. RUIZ, F.J. & VARONA, JOSE LUIS, *Mean and weak convergence of Fourier-Bessel series*, J. Math. Anal. Appl. 173 (1993), no. 2, 370–389.
- [15] GUENTHER, RONALD B. & LEE, JOHN W., *Partial differential equations of mathematical physics and integral equations*, Courier Corporation.

- [16] GUTIÉRREZ, JOSE MANUEL & VARONA, JUAN LUIS, *Convergencia en norma de la serie de Fourier Jacobi con pesos logarítmicos*, Colegio Universitario de La Rioja (Universidad de la Rioja).
- [17] KAMM, JAMES R., WILLIAMS, TODD O., BROCK, JERRY S. & LI, SHENGTAI, *Application of Gegenbauer polynomial expansions to mitigate Gibbs phenomenon in Fourier–Bessel series solutions of a dynamic sphere problem*, Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng. 26 (2010), no. 10, 1276–1292.
- [18] KENT NAGLE, R. & SAFF, EDWARD B., *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1992.
- [19] LAX, PETER D., *Functional Analysis*, Wiley.
- [20] RODRÍGUEZ DEL RÍO, ROBERTO & ZUAZUA, ENRIQUE, *Series de Fourier y fenómeno de Gibbs*, Cubo. Matemática Educacional, Universidad de La Frontera (Temuco, Chile) 2003, páginas 185-224.
- [21] RUDIN, WALTER, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.
- [22] SEELEY, ROBERT T., *An introduction to Fourier series and integrals*, Dover publications, Inc.
- [23] STADE, ERIC, *Fourier Analysis*, John Wiley & Sons.
- [24] STEEN, L. A. & SEEBACH, J. A., *Counterexamples in topology*, Courier Dover Publications, 1995.
- [25] STEIN, ELIAS M. & SHAKARCHI, RAMI, *Fourier Analysis. An introduction*, Princeton University Press.
- [26] WOLFRAM MATH WORLD, *Jacobi Polynomial*.
- [27] Portada de *Théorie analytique de la chaleur*, Google Books.